



RAPPORT DE STAGE 3A

**Révéler l'origine des galaxies naines satellites de la Voie
Lactée grâce au principe de moindre action**

18 septembre 2022

Stagiaire : Mazaud Elie

Tuteur : Pierre Boldrini





INSTITUT
POLYTECHNIQUE
DE PARIS

Remerciements

Il est important pour moi de remercier avant tout Pierre, mon tuteur, qui a su donner de son temps pour faire de ce stage une expérience aussi riche scientifiquement qu’humainement. Je remercie également l’ensemble des stagiaires de l’Institut d’Astrophysique de Paris avec lesquels il fut très agréable de travailler et d’échanger concernant nos sujets respectifs. Enfin, je porte une attention toute particulière à ceux qui m’accompagnent et m’aident au quotidien : mes colocataires et surtout mon amie Marion.

Résumé exécutif

Nous étudions dans ce rapport une alternative à l'intégration d'orbites. Celle-ci, proposée par Jim Peebles dans son article de 1989 [1], utilise un principe de minimisation de l'action dans l'espace des trajectoires. Nous décrivons le principe global de fonctionnement du code de Jim Peebles, dit **code LAP** (Least Action Principle) ou **code AVP** (Action Variation Principle) puis le principe de mise en place d'un code N-corps compatible. L'objectif est ainsi de tester le code LAP et ses limites avant de pouvoir l'appliquer aux données.

Ce stage fut l'occasion **d'initier le développement d'un code N-corps compatible avec le code LAP**, afin de pouvoir l'utiliser comme socle pour une étude quantitative de l'algorithme de Jim Peebles. L'étude de son efficience permettra alors de déterminer si son utilisation serait pertinente dans le cadre de notre système de galaxies naines orbitant autour de la Voie Lactée.

TABLE DES MATIÈRES

1	Le code de Jim Peebles	6
1.1	Conditions aux limites	7
1.2	Modèle de résolution	8
1.3	Comparaison avec la bibliographie	10
2	Code N-corps	12
2.1	Théorie du code N-corps	12
2.2	Nécessité d'un code cosmologique	13
2.3	Principe de comparaison entre les codes	15
3	Résultats et discussions	17
3.1	Travaux autour du système de coordonnées	17
3.2	Détermination des constantes régissant la dynamique	18
3.3	Problème de concordance pour les petites valeurs du facteur d'échelle	23
4	ANNEXE 1 : Théorie du code N-corps cosmologique	26
5	ANNEXE 2 : Théorie du code AVP	29

INTRODUCTION

La **mission GAIA**, en sondant très précisément le mouvement de plus de 100 milliards d'étoiles autour du centre de la Voie Lactée, a permis de dresser la carte tridimensionnelle la plus grande et la plus précise de notre galaxie et des galaxies naines proches de celle-ci, dans l'Amas Local et le Groupe Local.

Une quarantaine de galaxies naines ont été découvertes dans le Groupe local, qui comprend la Voie Lactée (MW) et la galaxie d'Andromède (M31). Ces galaxies naines sont plus de 100 fois moins massives que MW et M31. Les naines ont des populations stellaires anciennes et sont généralement dépourvues de gaz. Près de MW et de M31, on trouve principalement des sphéroïdes naines. Ces naines sont parmi les galaxies les plus dominées par la matière noire dans l'Univers (plus de 90 pourcents de leur masse totale), de sorte que la dynamique est entièrement déterminée par le champ gravitationnel de la matière noire.

La mission GAIA a fourni des estimations des vitesses 3D des galaxies mais aussi des positions de celles-ci. Les résultats des positions sont statistiquement robustes et sont indépendants du profil de masse de la Voie Lactée. Dans l'Amas Local et le Groupe Local, la Voie Lactée et la galaxie M31 régissent majoritairement la dynamique du fait de leurs grandes masses (estimées entre 10^{11} et 10^{12} fois la masse solaire), à comparer avec les masses des galaxies naines (Fornax, Draco, Sextan A et B, LEO, Sculptor...), 2 à 3 ordres de grandeur en deçà.

L'article de François Hammer [2] précise qu'il semblerait que les galaxies naines soient à leur **premier passage proche de la Voie Lactée** en raison de leurs vitesses, moments angulaires et énergies totales élevés. Nous remarquons également que plusieurs galaxies semblent proches de leur péricentre. Il conviendrait de vérifier ces affirmations en utilisant des modèles numériques.

Le code LAP (Least Action Principle) fourni par Jim Peebles pourrait constituer un outil efficace dans cette étude de la **dynamique des galaxies naines**. Cependant, il convient d'évaluer quantitativement la pertinence de ce code avant de l'utiliser. Pour cela, nous chercherons dans ce rapport à comprendre les modalités de fonctionnement du code LAP. Par la suite, nous démarrerons le développement d'un code N-corps cosmologique compatible avec le code LAP pour pouvoir confronter les résultats des deux algorithmes. A la lumière de ces comparaisons, nous pourrions porter un certains nombres de conclusions mais aussi soulever des questions auxquelles il conviendra de répondre avant de pouvoir continuer l'étude de l'efficacité du code LAP.

1

LE CODE DE JIM PEEBLES

Les données de la mission GAIA sont d'une précision sans précédent. Cependant, on observe des incertitudes importantes sur les vitesses des galaxies (notamment sur les vitesses tangentielles des galaxies qui sont en fort excès par rapport à celles attendues) et sur la distribution de masse de la voie Lactée. Ainsi, l'utilisation des techniques d'intégration d'orbites pour déterminer l'origine des galaxies naines satellites de la Voie Lactée est peu résiliente car elle repose sur des données difficiles à exploiter.

En effet, **l'intégration d'orbites** consiste à remonter le temps en intégrant numériquement pas-à-pas les équations du mouvement, avec comme conditions initiales les vitesses et positions des objets. Le package Python **Galpy** permet par exemple de résoudre des problèmes de gravitation à partir de cette méthode. L'intégration d'orbites a par exemple été utilisée pour étudier la dynamique passée des amas globulaires de la Voie Lactée.

Le code LAP constitue une alternative à l'intégration d'orbites pour opérer un retour dans le passé. Rédigé dans le langage de programmation FORTRAN, il permet de s'émanciper de l'incertitude sur les vitesses en utilisant des considérations cosmologiques, comme nous allons le décrire par la suite. Il décrit un système où les galaxies sont définies comme **des points massifs** qui n'interagissent que via la gravitation, **considérée comme Newtonnienne**. Ce code pourrait alors être appliqué aux galaxies du Groupe Local, comme expliqué dans l'article de J. Peebles [3].

Ces approximations sont justifiées dans le cas où les galaxies sont suffisamment lointaines de la Voie Lactée et peu massives. La distribution de masse de la Voie Lactée (due à la matière baryonique et majoritairement à la matière noire) étant peu modifiée par les objets avoisinants, on peut asymptotiquement l'approximer par un point. On peut ainsi passer outre notre méconnaissance du profil de densité de la Voie Lactée, notamment concernant la matière noire.

En effet, la masse de la Voie Lactée est très incertaine et oscille entre 10^{11} et 10^{12} fois la masse solaire. En première approximation, il faut donc que les galaxies soient considérées bien au-delà du **rayon de Viriel** associé à ces masses, de l'ordre de **200 kpc** pour la Voie Lactée. Avec cette approximation, on peut considérer que le halo de matière noire est peu perturbé par les galaxies avoisinantes. L'enjeu sera donc également de déterminer si l'approximation reste vraie sous 200 kpc.

1.1 CONDITIONS AUX LIMITES

Dans le cadre de l'étude d'un système soumis à l'interaction Newtonienne, on cherche à résoudre des équations différentielles d'ordre 2. Ainsi, six grandeurs pour chaque particule spécifieront complètement la dynamique. L'approche standard via l'intégration d'orbites consiste à définir les conditions initiales comme les positions et vitesses initiales en trois dimensions, puis à les intégrer dans le temps.

Cependant, il est également possible que trois grandeurs soient connues à l'instant initial et trois autres à l'instant final. Dans le code LAP, les premières dérivent d'arguments cosmologiques concernant l'état initial, et les secondes sont fournies par des données sur l'état actuel du système.

En effet, l'idée de J. Peebles (cf article [1]) fut de considérer les systèmes étudiés dans un **contexte cosmologique**. Si les galaxies sont le résultat d'instabilités gravitationnelles, on peut considérer que leurs **vitesse^s particulières initiales étaient quasiment nulles** au début de leur accré^{ti}on par la Voie Lactée. La première condition est donc que

$$a^2 \dot{x}_i(t) = 0 \quad (1)$$

pour $t \rightarrow 0$ où x_i est la position de la particule i .

Dans notre simulation, on prendra cette condition à $t = t_{ini}$, il faudra donc prendre t_{ini} (et donc a_{ini}) les plus petits possibles pour vérifier l'approximation. Ce choix de a représente un enjeu crucial sur la détermination de la trajectoire du point. En effet, contrairement à l'intégration d'orbites qui, si on diminue l'échelle de temps, renverra une trajectoire "tronquée", le code LAP renverra une trajectoire totalement différente selon les choix de l'échelle de temps. Nous avons travaillé durant le stage majoritairement sur une échelle de temps de l'ordre de 10 Gyr (correspondant à $a_{ini} = 0.36$) mais pour réellement vérifier la pertinence du code en situation réelle, il conviendra de travailler sur des échelles de temps plus longues (typiquement $a_{ini} = 0.01$).

La deuxième condition consiste à déterminer les positions actuelles des objets (données recueillies lors de la mission GAIA). Pour plus de détails, on pourra consulter l'article [5].

Les vitesses actuelles des objets ne sont donc pas des paramètres d'intérêt dans notre cas. Cependant, la détermination des vitesses finales comme sortie du code LAP peut nous permettre de jauger la pertinence du code en les comparant aux vitesses mesurées. Obtenir des vitesses des galaxies à redshift $z=0$ avec le code LAP proches de celles des observations assurerait le bon fonctionnement de l'algorithme. On pourrait alors potentiellement affiner les incertitudes concernant ces vitesses grâce au code LAP.

1.2 MODÈLE DE RÉOLUTION

La théorie du code LAP est décrite dans les différents travaux qui ont réutilisé et optimisé le code depuis sa création en 1989. Toutes les grandeurs sont exprimées (et seront par conséquent exprimées dans l'intégralité du rapport) dans les unités suivantes :

- **Méga parsec** (Mpc) pour les longueurs
- **10 Giga année** (10 Gyr) pour le temps
- $10^{11} M_{\odot}$ où M_{\odot} est la masse solaire, pour les masses

On introduit les paramètres cosmologiques H_0 qui représente la constante de Hubble, Ω_m la densité d'énergie liée à la matière dans l'univers et Λ la constante cosmologique qui apparait dans l'équation de Friedmann.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_b + \frac{\Lambda}{3} \quad (2)$$

où ρ_b est la densité moyenne de masse dans l'univers.

A partir de l'équation de Friedmann et en utilisant la relation

$$\Lambda = 3H_0^2\Omega_{\Lambda} \approx 3H_0^2(1 - \Omega_m) \quad (3)$$

où l'on néglige l'influence de l'énergie radiative, on obtient l'équation portant sur les coordonnées physiques de nos corps considérés

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -\sum_{i \neq j} Gm_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\Lambda}{3}\mathbf{r}_i \quad (4)$$

Cette équation est très importante pour notre étude, elle caractérise l'influence de l'expansion de l'univers qui reste pourtant purement newtonienne. Nous ne sommes ainsi pas dans le cadre de la relativité générale.

On notera qu'ici on travaille dans le modèle simple de cosmologie Λ CDM ; la cosmologie est encapsulée intégralement dans la valeur de Λ .

En passant en coordonnées comobiles, soit en écrivant $r_i = ax_i$, on obtient l'équation

$$\frac{da^2}{dt} \frac{d^2 x_i}{dt} = \frac{1}{a} \left[\sum_{i \neq j} G m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} + \frac{1}{2} \Omega_m H_0^2 x_i \right] \quad (5)$$

Cette équation se dérive du principe de Lagrange sur l'action.

$$S = \int_t dt \left[\sum \frac{m_i a^2}{2} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \frac{G}{a} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|} + \frac{2}{3} \pi G \rho a^2 \sum m_i x_i^2 \right] \quad (6)$$

On écrit donc les coordonnées comme $x_{i,k,n}$ où i est l'indice de la particule, k correspond à la composante cartésienne de la position et n est l'indice du pas de temps considéré.

Si on a n_x pas de temps, on sait donc que la position actuelle est connue, donc les conditions aux bords sont les x_{i,k,n_x} pour tout i, k .

La méthode de résolution est détaillée dans le document joint en annexe 4 mais aussi dans l'article [4] qui apporte un point de vue complémentaire sur la méthode LAP.

Qualitativement, le code de Jim Peebles définit une trajectoire comme une suite de n_x points correspondants aux n_x pas de temps et il attribue à chaque trajectoire une valeur de l'action. Dans nos travaux la trajectoire sera toujours considérée comme un **ensemble de 100 points**, le code de Jim Peebles laisse la liberté de choisir ce nombre.

Le code établit une expression discrète de l'action en fonction des positions, des temps et des valeurs du facteur d'échelle. On exprime ensuite la dérivée de cette action relativement aux différentes positions et on recherche les zéros de cette dérivée. On cherche ainsi les **nuages de points qui vont minimiser l'action**.

En faisant varier la trajectoire, le code tente de déterminer un minimum de l'action ; même s'il est analytiquement plus subtil, le code LAP peut structurellement se rapprocher d'une descente de gradient en n_x dimensions.

On peut voir sur la figure 1 le schéma de convergence d'une trajectoire, depuis la trajectoire initiale générée aléatoirement à partir des positions finales en entrée du code, vers la trajectoire minimisatrice de l'action qui constitue sa sortie.

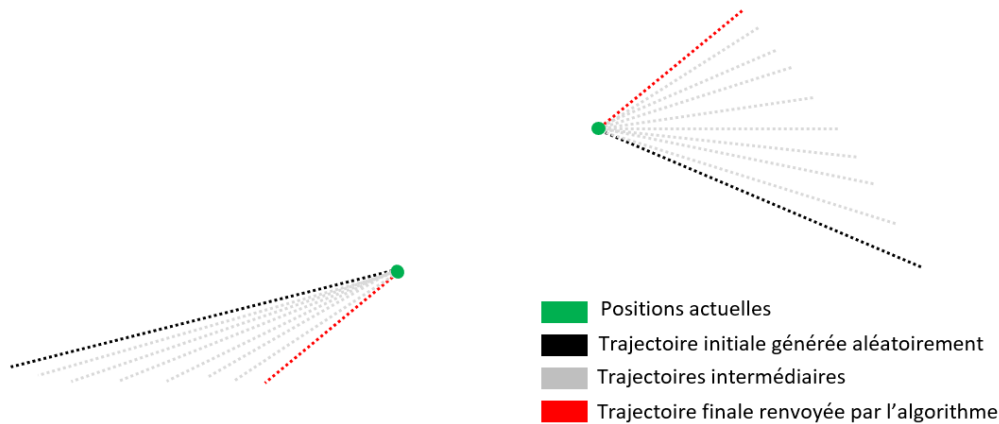


FIGURE 1 – Schéma de convergence du code LAP vers une trajectoire minimisant l'action

On notera cependant que le code peut rester "bloqué" dans des minimums locaux, ce qui peut induire, selon la trajectoire initiale, des résultats différents. Etudier la régularité de l'action comme fonction mathématique, ses minimums et les modalités de convergence du code vers des trajectoires non physiques constituerait un sujet à part entière, mais d'autres problématiques ont suffi à remplir la durée de mon stage.

1.3 COMPARAISON AVEC LA BIBLIOGRAPHIE

Plusieurs articles/thèses ont déjà utilisé le code LAP qui a été modifié et optimisé depuis sa création par J. Peebles en 1989. Nous avons donc d'abord cherché à comparer nos résultats en faisant fonctionner le code LAP et en comparant qualitativement nos figures à celles présentes dans ces articles (cf figures 2 et 3). Nous avons notamment comparé avec la thèse de Trond Hjorteland [6], une des rares à avoir étudié le code LAP.

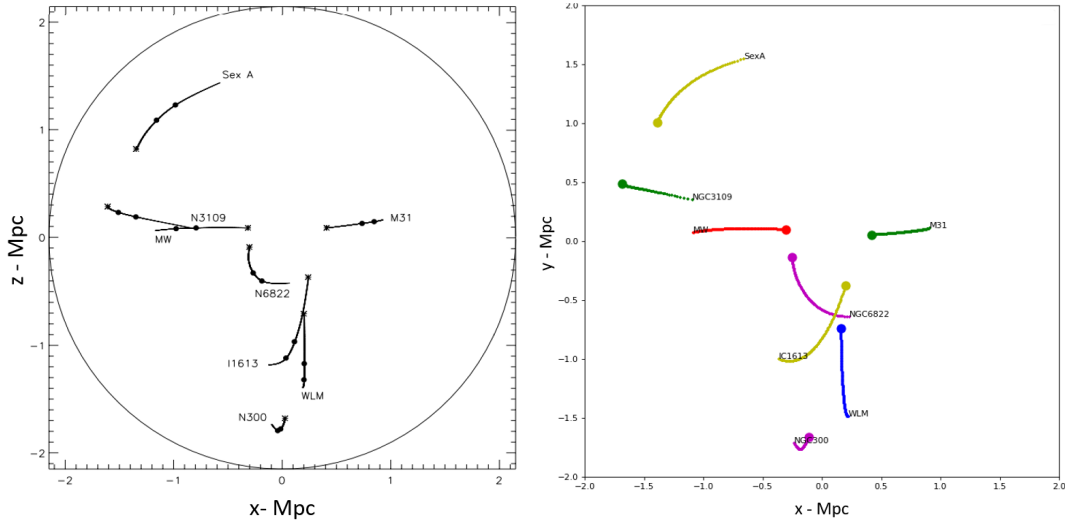


FIGURE 2 – Résultat du fonctionnement du code pour $\Omega = 1$, $H_0 = 84$ dans les unités de travail et $a_{init} = 0.01$. Gauche : résultat présenté dans la thèse - Droite : résultat obtenu avec notre simulation

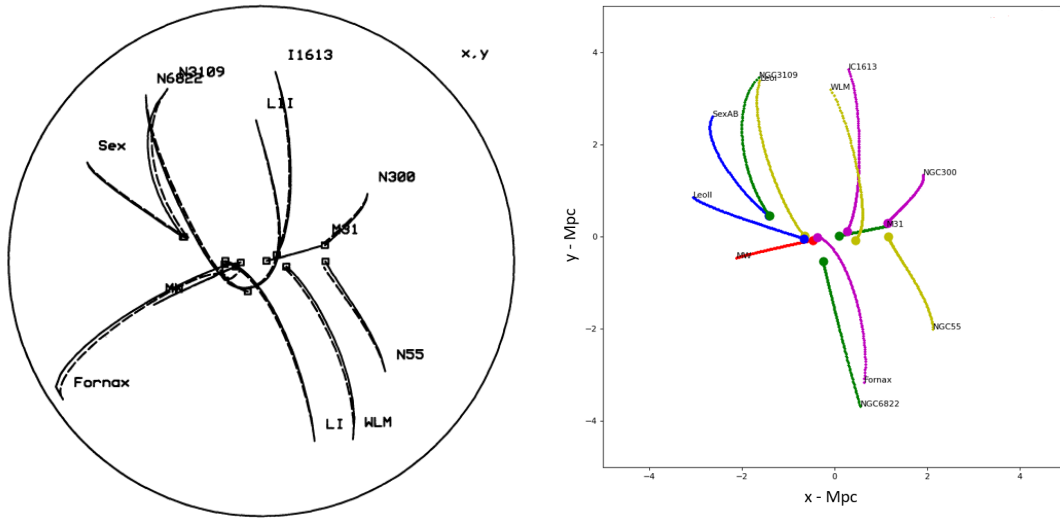


FIGURE 3 – Résultat du fonctionnement du code pour $\Omega_m = 0.1$, $H_0 = 70$ dans les unités de travail et $a_{ini} = 0.01$. Gauche : résultat présenté dans l'article de J. Peebles de 1995 - Droite : résultat obtenu avec notre simulation.

Sur les figures 2 et 3, on constate qu'on retrouve des résultats proches de ceux des articles, bien que certaines trajectoires soient parfois drastiquement différentes là où les interactions proches rentrent en jeu (par exemple Fornax sur la figure 3). Ces résultats différents peuvent être le résultat des modifications qui ont été apportées au code depuis sa création (difficile à mesurer étant donné que nous ne disposons que de la version la plus récente), du nombre de points choisis pour les trajectoires ou de la position initiale générée.

2

CODE N-CORPS

Afin de pouvoir évaluer notre code LAP qui opère un "retour dans le passé" pour le système considéré, nous avons utilisé un **code N-corps** classique. Le code LAP, comme expliqué précédemment, consistait en une approximation ponctuelle des galaxies dans un contexte de gravitation newtonienne. Ces approximations seront donc également utilisées et justifiées dans le cas de notre code N-corps.

2.1 THÉORIE DU CODE N-CORPS

La théorie du code N-corps non cosmologique est simple : on établit les équations résultant du principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = \mathbf{f}_{\text{grav}} \quad (7)$$

que l'on intègre en "saut de grenouille" pour gagner en précision. On a alors le système d'équations discrètes :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{tot}} \end{cases} \quad (8)$$

On obtient alors des résultats comme ceux de la figure 4 ci-dessous.

Pour vérifier la pertinence et la **juste mise à l'échelle** de notre code N-body, plusieurs vérifications ont été réalisées :

- une comparaison avec plusieurs autres codes en open source
- une comparaison avec le code N-body cosmologique "Gadget" communément admis comme un code très complet et fonctionnel. En rajoutant des distributions de masse non ponctuelles et en regardant les trajectoires des centres de masse, nous avons pu mettre en exergue à la fois la pertinence de nos approximations et le fait que notre code soit correctement mis à l'échelle ; le calcul des constantes liées à la cosmologie est exact.

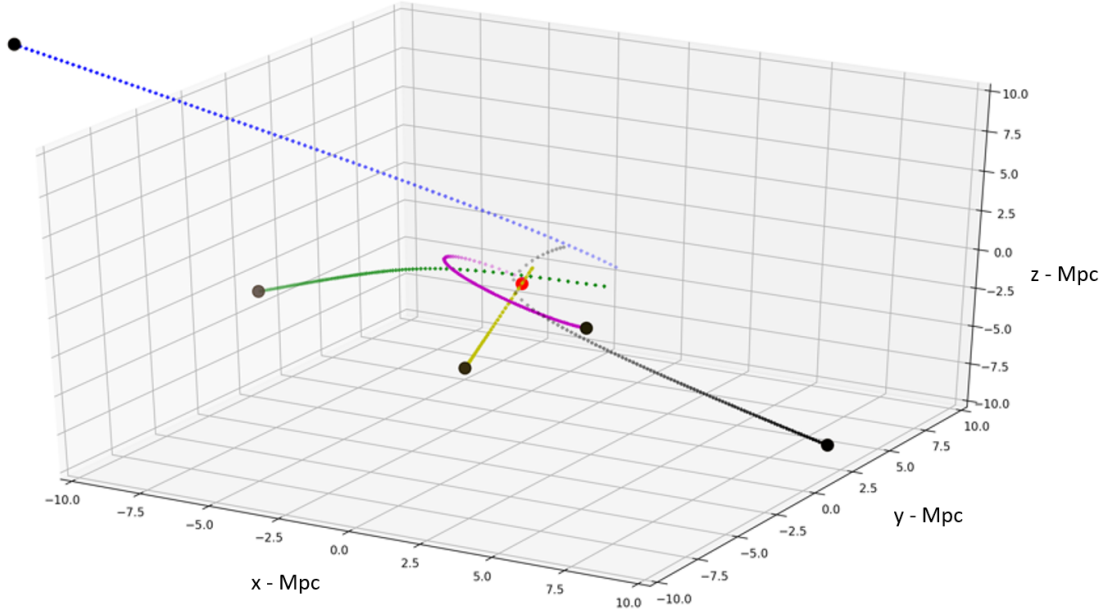


FIGURE 4 – Exemple de simulation à N-corps

Initialement $\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{f}_{\text{grav}}$, mais nous allons voir que l'expression de la force totale doit être modifiée dans un contexte cosmologique (comme expliqué dans [6]).

2.2 NÉCESSITÉ D'UN CODE COSMOLOGIQUE

Pour prendre en compte la cosmologie et l'expansion de l'univers dans notre simulation N-corps, il est nécessaire d'introduire (conformément à l'équation de Poisson) l'attraction répulsive impliquant la **constante cosmologique** Λ . On retrouve une description de ces modifications dans l'article [7].

Notre expression pour l'accélération dans le code à N-corps, selon l'équation de Poisson, devient alors, conformément à l'équation (4) :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} G m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} + \frac{\Lambda}{3} \mathbf{r}_i \quad (9)$$

où Λ s'écrit

$$\Lambda = 3(1 - \Omega_m)H_0^2 \quad (10)$$

En considérant que la densité d'énergie due aux radiations est nulle ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$), on obtient alors

$$\Lambda = \Omega_\Lambda H_0^2 \approx 0.317(100 \text{ km/s}) \text{ Mpc}^{-1} \quad (11)$$

Pour être certain que la **force attractive** (gravitationnelle) et la **force répulsive** (cosmologique) sont du même ordre de grandeur, nous pouvons simplement faire une application numérique, en considérant qu'une approximation des distances des objets est de l'ordre de 0,5 Mpc, et avec la masse de $10^{12} M_\odot$ pour la Voie Lactée.

$$|F_{grav}| \approx \frac{G}{0.5^2} \approx \frac{0.043}{0.5^2} \approx 0.17 \quad |F_{cosmo}| \approx \frac{0.98 * 0.5}{3} \approx 0.16$$

En l'absence d'interactions gravitationnelles, on observe donc dans ce cas un "éloignement" des corps comme on peut observer sur la figure 5, caractéristique de la présence d'une constante Λ liée à **l'accélération de l'expansion de l'univers**.

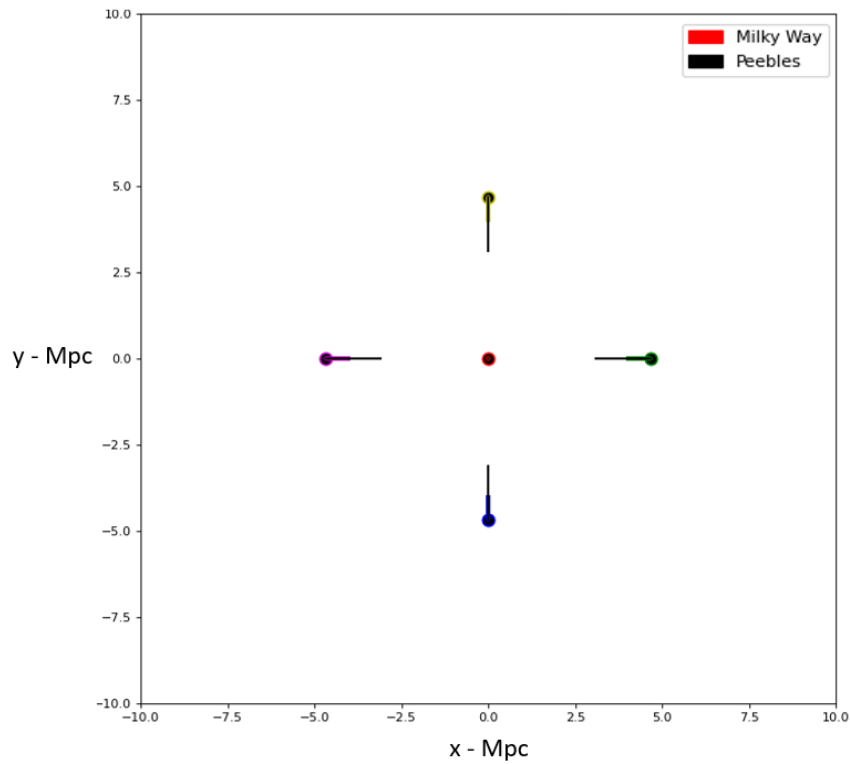


FIGURE 5 – Simulations N-body et LAP en l'absence d'interactions gravitationnelles

Dans un univers en expansion, la dynamique est également régie par le facteur d'échelle $a(t)$. On peut donc définir les **coordonnées comobiles** telles que $r(t) = a(t)x(t)$ où x est la position physique. Ainsi, en coordonnées comobiles, un système est statique en l'absence de force.

On en déduit la vitesse comobile d'un point comme la combinaison

$$v(\vec{t}) = \dot{r}(\vec{t}) = a(t)x(\vec{t}) + \frac{\dot{a}}{a}r(\vec{t}) = v_{peculiar} + v_{expansion} \quad (12)$$

C'est cette vitesse péculière qui est nulle dans les conditions aux limites imposées par le code LAP.

2.3 PRINCIPE DE COMPARAISON ENTRE LES CODES

Le but du code N-corps est de **simuler un scénario** à partir de positions et de vitesses initiales données. Les positions peuvent être choisies aléatoirement mais les vitesses initiales seront choisies nulles pour rendre compte de l'impératif cosmologique mentionné précédemment. Ce scénario nous permet ensuite d'obtenir les positions finales des objets du système qui constitue l'entrée du code LAP (voir figure 6).

	Masse	x initial	y initial	z initial
Particule 1
Particule 2
...				

FIGURE 6 – Format texte d'entrée du code LAP

A partir de ces conditions finales, le code LAP génère une trajectoire en "revenant en arrière" (figure 7).

	Facteur d'échelle	Temps	Particule 1	Particule 2	...
a initial	
...	
a = 1	

FIGURE 7 – Fichier de sortie du code LAP

Il ne reste alors plus qu'à comparer les résultats des deux codes, conformément au schéma de la figure 8.

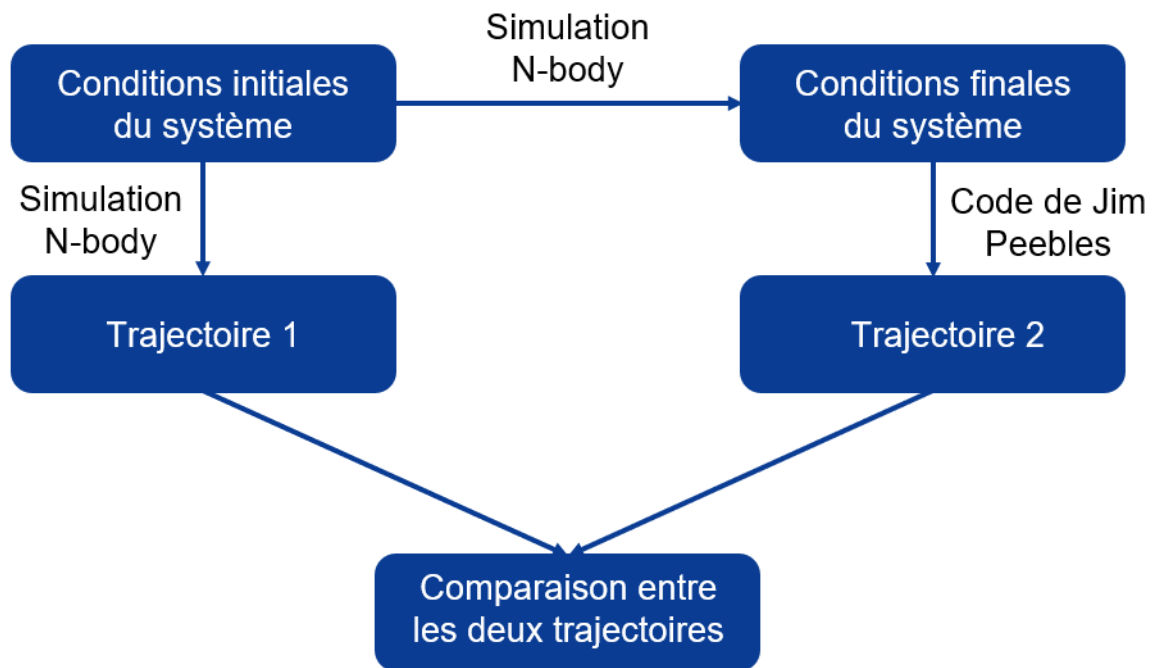


FIGURE 8 – Schéma récapitulatif de la démarche de comparaison

3

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

3.1 TRAVAUX AUTOUR DU SYSTÈME DE COORDONNÉES

Les collaborateurs de J. Peebles nous ont affirmé que les trajectoires de sortie du code LAP étaient exprimées en **coordonnées comobiles**. Dans les articles de la bibliographie avec lesquels nous avons comparé nos trajectoires (cf figure 2 et 3), il est également indiqué que les trajectoires sont exprimées dans ce système de coordonnées..

L'idée fut donc de **comparer le code N-corps en présence d'une constante cosmologique avec le code LAP**. Il s'est avéré que les longueurs des trajectoires ne concordaient pas (que ce soit en coordonnées physiques ou comobiles) comme nous pouvons le voir sur la figure 9 ci-dessous :

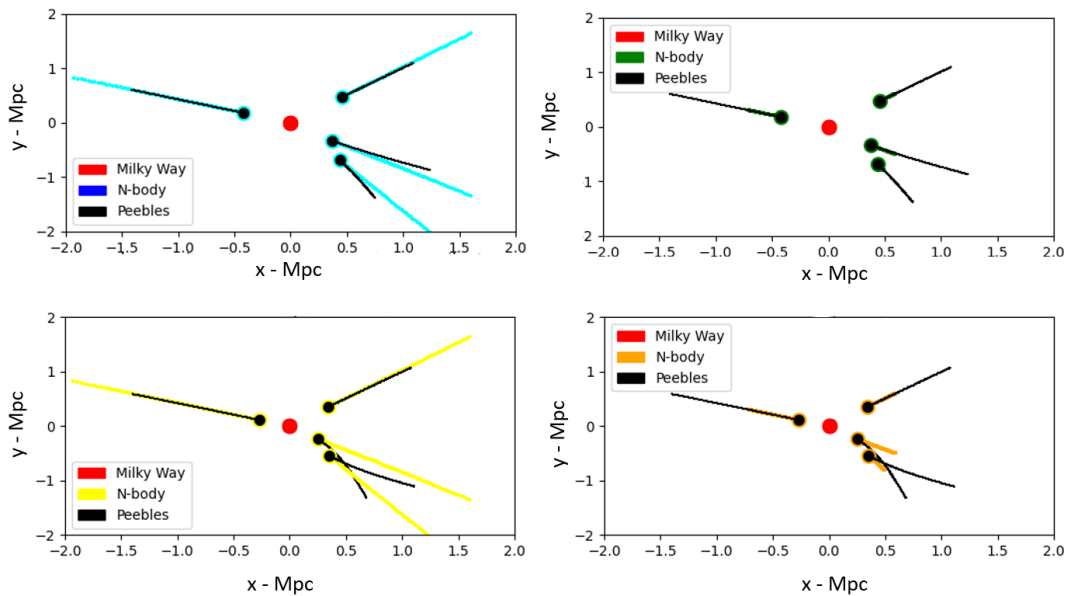


FIGURE 9 – Comparaisons des trajectoires N-corps dans différentes situations :

- En haut à gauche : avec Λ en coordonnées comobiles
- En haut à droite : avec Λ en coordonnées physiques
- En bas à gauche : sans Λ en coordonnées comobiles
- En bas à droite : sans Λ en coordonnées physiques

D'après les tests (cf figure 5) le code de Peebles prend tout de même en compte l'expansion de l'univers ce qui n'était initialement pas le cas dans le N-corps. Sur la figure on voit clairement qu'en l'absence d'interactions gravitationnelles, on peut voir l'effet de Λ sur le système considéré.

3.2 DÉTERMINATION DES CONSTANTES RÉGISSANT LA DYNAMIQUE

Pour contrôler le modèle, nous avons donc testé si notre modèle de code N-corps **avec une constante cosmologique** pouvait rendre compte des résultats obtenus moyennant des valeurs différentes de G et Λ . **Nous avons commencé à travailler en coordonnées physiques** car les équations de notre code N-corps portaient sur les coordonnées physiques, tout en gardant à l'esprit qu'une amélioration devrait sans doute être développée pour pouvoir travailler plus aisément en coordonnées comobiles.

Le premier test naïf fut de travailler sur l'intégralité des valeurs de G et Λ autour de leurs valeurs théoriques et de regarder si les trajectoires du code N-body et du code LAP concordaient pour un couple de valeurs G et Λ , le tout pour une position initiale de notre système donné. Sur les plages de valeurs considérées (proches de celles théoriques calculées), aucune valeur de G et Λ ne semblait rendre compte de la dynamique attendue avec le code de Jim Peebles (figure 10).

Une méthode fut alors de reconsidérer le modèle analytique. A l'infini, on a

$$F_{grav} \sim 1/r^2 \approx 0 \quad (13)$$

d'où l'équation

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\Lambda r}{3} = kr \quad (14)$$

qui s'intègre directement en

$$r(t) = r_0 \sinh(\sqrt{k}t) \quad (15)$$

On obtient donc une relation entre la longueur L de la trajectoire, le temps de la simulation T et la constante

$$\Lambda = \frac{3}{T^2} \left[\cosh^{-1}\left(1 + \frac{L}{r_0}\right) \right]^2 \quad (16)$$

A partir de ce calcul, on peut déterminer G grâce à la position initiale r_{stat} où la trajectoire du point est statique. Autrement dit, la trajectoire a une longueur nulle car on a

$$F_{grav} = F_{\Lambda} \quad (17)$$

soit

$$\frac{Gm}{r_{stat}^2} = \frac{\Lambda r_{stat}}{3} \Leftrightarrow G = \frac{\Lambda r_{stat}^3}{3m} \quad (18)$$

Ici Λ et G sont à priori déterminées et sont **uniques**. Le calcul donne des valeurs de nos deux constantes bien au-delà de celles considérées. Cependant, si Λ détermine le comportement des trajectoires à l'infini et G la position du minimum, la morphologie de la courbe est également influencée par ces deux paramètres.

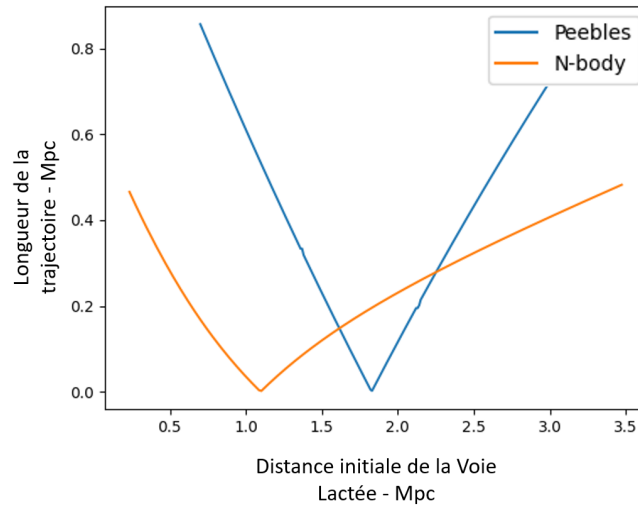


FIGURE 10 – Exemple de comparaison des courbes de longueur de trajectoire avec les valeurs théoriques calculées des constantes

Il s'avère que la forme de la courbe ainsi obtenue via le code N-corps est exactement semblable à la forme obtenue en regardant les résultats du code LAP (figure 11). Il semble donc que notre code N-corps **repose sur les mêmes fondements analytiques que le code LAP**, bien que la méthode de résolution soit drastiquement différente. Il convient cependant d'expliquer les valeurs de G et Λ obtenues. En effet, les valeurs théoriques calculées étaient $(G, \Lambda) = (0.043, 0.98)$ dans notre système d'unités (cf 1.2) et on obtenait ici des valeurs $(G, \Lambda) \approx (0.6, 2)$.

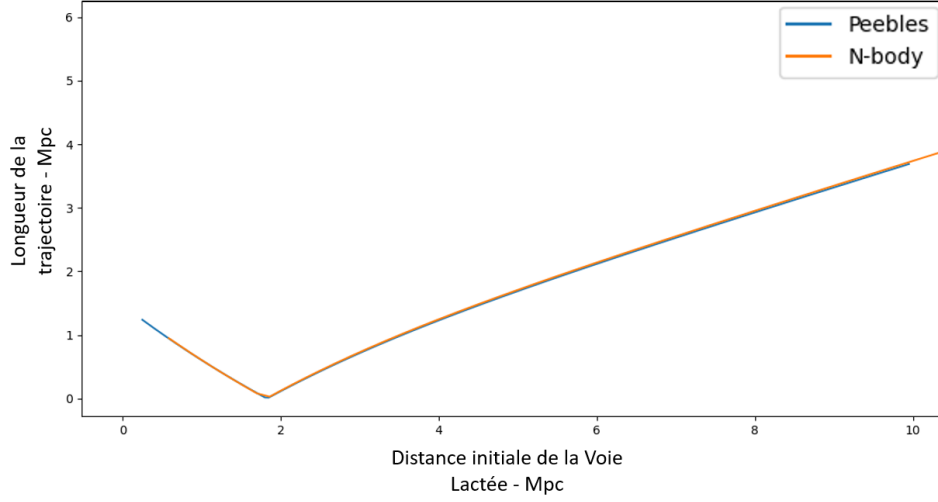


FIGURE 11 – Comparaison des courbes de longueur de trajectoire après réajustement des valeurs des constantes

Dès lors, pour un jeu de paramètres dans le code LAP (G, H_0, Ω) . On peut attribuer une paire unique (G, λ) correspondante dans notre code N-corps.

En utilisant les résultats de ces calculs dans notre code N-corps en coordonnées physiques, on peut tester si nos valeurs de G et Λ conviennent (figure 12).

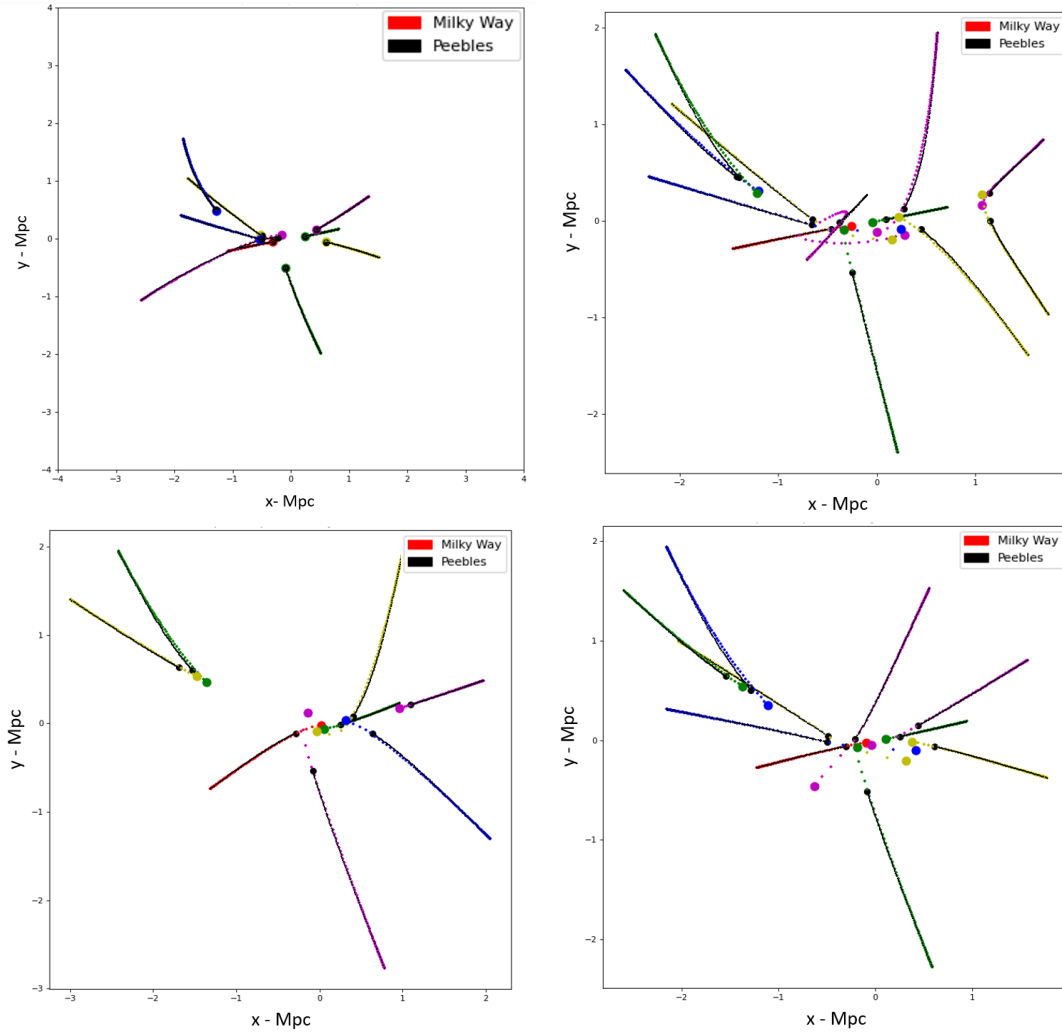


FIGURE 12 – Comparaison entre les résultats de nos deux codes pour des simulations avec $(G, H_0, \Omega) = (0.043, 0.7, 0.1)$ et avec $a_{init} = 0.36$

On obtient une très bonne concordance entre le code LAP et N-corps dès lors que des **interactions trop proches n'ont pas lieu**. Ceci nous permet d'affirmer, avant même une étude quantitative du code LAP, que celui-ci présente des limites dès lors qu'on considère des interactions de courte portée. Il conviendra de déterminer si cette portée est supérieure ou inférieure au rayon de Viriel de la Voie Lactée et à l'échelle de distance typique des galaxies naines. Ainsi, nous pourrons savoir si le code sera efficace sur les données recueillies par la mission GAIA concernant l'Amas Local et le Groupe Local.

On peut cependant aller plus loin en calculant les variations de G et Λ en fonction des 3 paramètres du code de Jim Peebles. On notera qu'ici on fera la distinction entre les constantes G du code N-corps et du code de Jim Peebles, vu comme deux constantes distinctes dont on cherche à évaluer le lien.

On obtient la figure 13 en fixant 2 des paramètres conformément aux valeurs de la cosmologie obtenues par les mesures du satellite Planck en 2018 ($(G, H_0, \Omega) = (0.043, 0.67, 0.31)$) dans les unités considérées), et en faisant varier le dernier paramètre.

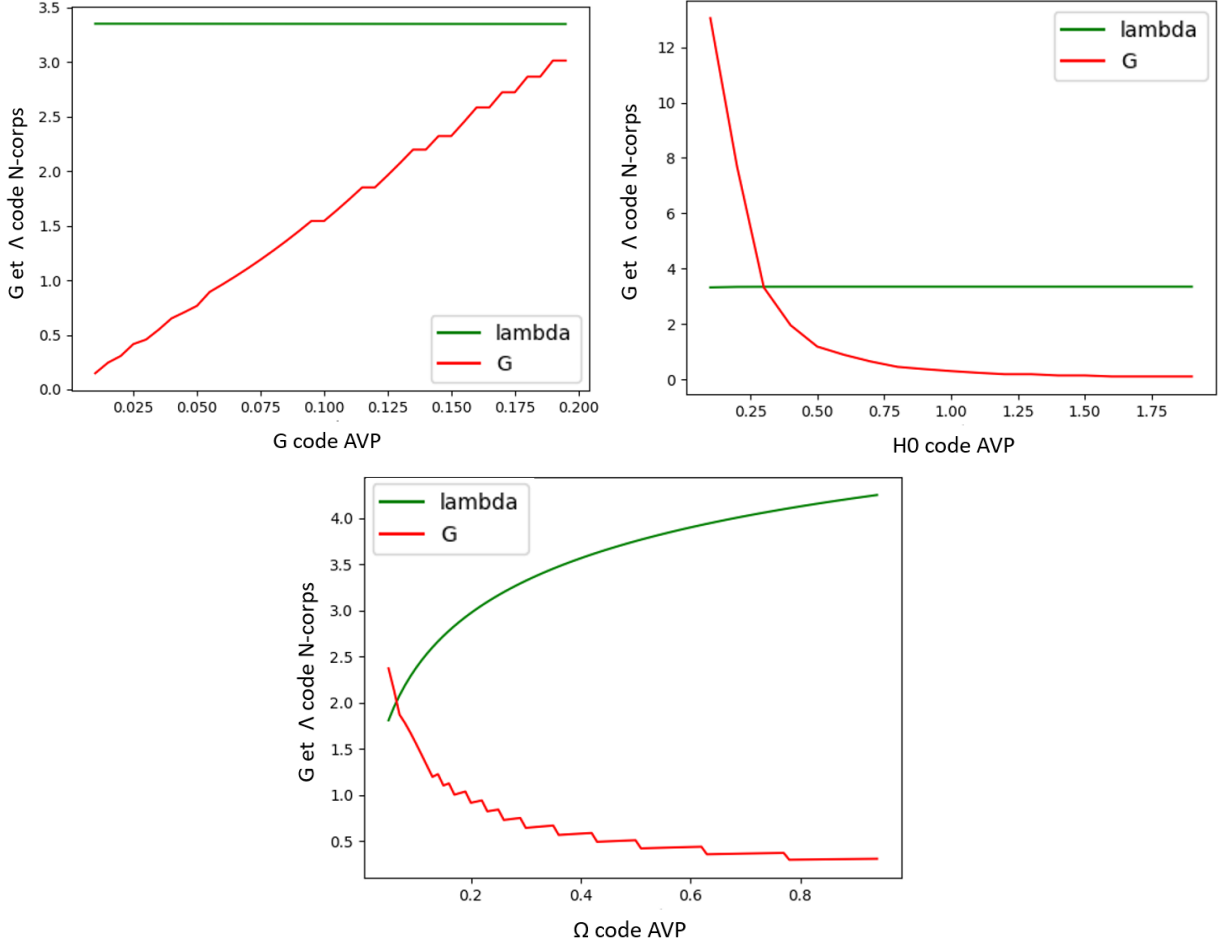


FIGURE 13 – Evolution de G et Λ du code N-corps selon les 3 paramètres du code LAP

Plusieurs conclusions peuvent être portées en utilisant ces courbes :

- le fait que la constante G_{nbody} soit linéaire avec $G_{peebles}$ et que Λ n'en dépende pas est rassurant : les constantes G ont, moyennant des valeurs numériques différentes selon nos unités et nos choix de normalisation, le même statut dans les équations de la dynamique.
- Λ ne dépend pas de H_0 et G varie avec à la fois Ω et H_0 ce qui est particulièrement contre intuitif, laissant penser que le G_{nbody} qui est à percevoir au sens Newtonien puisse avoir malgré tout une définition différente dans le code de Jim Peebles, ou du moins un lien avec les paramètres cosmologiques. Ceci pourrait résulter du fait que nous travaillons en coordonnées physiques et pas en coordonnées comobiles, d'où une dépendance sous-jacente avec a et donc avec les paramètres cosmologiques

3.3 PROBLÈME DE CONCORDANCE POUR LES PETITES VALEURS DU FACTEUR D'ÉCHELLE

La concordance évoquée précédemment est presque parfaite lorsque l'intervalle de temps utilisé est de l'ordre de 10 Gyr. Pour un triplet de constantes (G, H_0, Ω) dans le code LAP, le doublet (G, Λ) obtenu donne des trajectoires qui concordent très bien entre nos deux codes **dès lors que le facteur d'échelle reste assez grand**.

On remarque cependant que lorsque a devient plus petit (valeur typique de $a = 0.01$), les valeurs de G et Λ augmentent drastiquement. En effet, les valeurs typiques des deux paramètres du code N-corps, en remplaçant uniquement $a = 0.36$ par $a = 0.01$ dans le code LAP, sont de l'ordre de $(G, \Lambda) = (6.6, 11.2)$. Ces valeurs s'équilibrent dans la dynamique de manière très subtile. Ainsi, il n'a pas été possible de retrouver les mêmes trajectoires entre le code LAP et le code N-corps dans ce cadre d'étude.

Ceci s'expliquerait potentiellement par deux phénomènes :

- Le fait que de faibles erreurs numériques sur les valeurs de G et Λ ait des répercussions importantes sur la dynamique du fait de leurs valeurs anormalement grandes.
- Le **comportement du facteur d'échelle a** au cours du temps (figure 14)

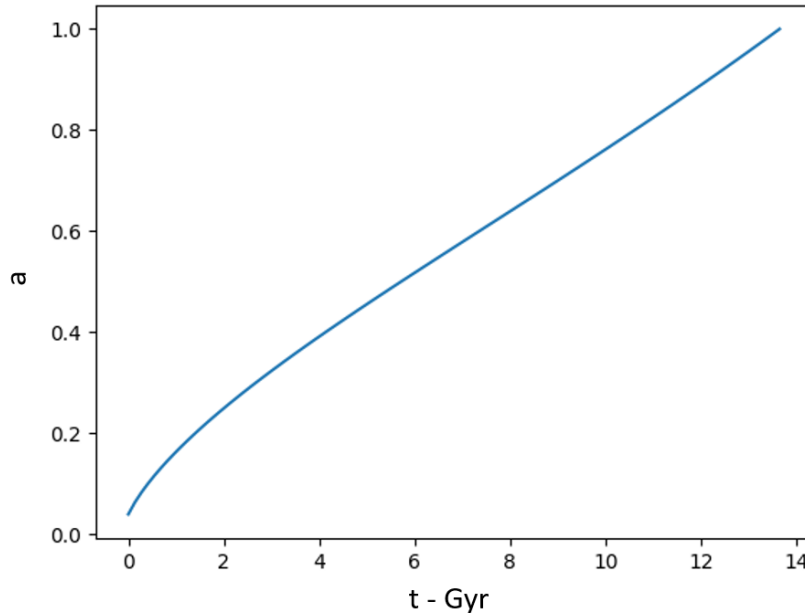


FIGURE 14 – Valeur du facteur d'échelle au cours du temps

On constate que la **non-linéarité de a en t** ne s'observe que pour des valeurs faibles de t . Ceci impliquerait donc de prendre en compte le facteur d'échelle directement dans nos équations pour évaluer cette non-linéarité, qui n'intervient que dès que a est petit.

Une alternative pertinente serait, comme exprimé par les équations décrites en annexe (voir 3.3), de **réviser le code N-corps en coordonnées comobiles** et en s'affranchissant du temps t au profit du facteur d'échelle pour opérer un comparatif plus aisément avec le code LAP. Par manque de temps, ce code n'a pas pu être finalisé, mais les équations sont décrites dans l'annexe 4.

CONCLUSION

Ce stage fut donc particulièrement exploratoire, consistant à comprendre le code LAP de Jim Peebles, décrit succinctement dans la littérature scientifique mais sans étude quantitative. Pourtant, cet outil pourrait s'avérer très utile pour étudier certains objets dont les galaxies naines satellites de la Voie Lactée.

Il serait particulièrement intéressant d'évaluer les limites de ce code, mais il est avant tout nécessaire d'en comprendre les mécanismes en continuant la comparaison avec le code N-corps.

Avant de réellement tester l'efficacité du code de Jim Peebles pour des cas concrets, il est donc encore nécessaire de poursuivre certains raisonnements :

- cerner totalement le rôle du facteur d'échelle dans les équations de la dynamique
- comprendre le lien profond entre les paramètres du code LAP et ceux du code N-corps
- rédiger un code N-corps en coordonnées comobiles et le tester, comme expliqué précédemment.

4

**ANNEXE 1 : THÉORIE DU CODE N-CORPS
COSMOLOGIQUE**



On introduit ici

- La distance comobile \mathbf{x} telle que $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$ où a est le facteur d'échelle et \mathbf{r} les coordonnées physiques.
- De même la vitesse comobile \mathbf{v} telle que $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = a\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{da}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{v} + \frac{da}{dt}\mathbf{x}$

On a donc en posant $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, la relation $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \frac{da}{dt}\mathbf{x}$

En supposant toujours que $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, on a l'équation

$$\frac{da}{dt} = aH(a)$$

où

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}$$

.

D'où

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - H(a)\mathbf{r}$$

. On introduit alors l'impulsion comobile

$$\mathbf{p} = m\mathbf{a}\mathbf{v} = ma(\mathbf{u} - H(a)\mathbf{r})$$

On calcule alors

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = am\frac{d\mathbf{u}}{dt} - am\frac{d^2a}{dt^2}\mathbf{x} = a\mathbf{F}_{\text{tot}} - am\frac{d^2a}{dt^2}\mathbf{x}$$

Or on a établi que

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{grav}} + am\frac{\Lambda}{3}\mathbf{x}$$

.

On peut également utiliser l'équation de Friedmann pour un univers plat dans le modèle Λ CDM :

$$a^{-1}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{H_0^2\Omega_m}{2a^3} + \frac{\Lambda}{3}$$

ce qui revient à écrire après calculs et simplification :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = a\mathbf{F}_{\text{grav}} + \frac{mH_0^2\Omega_m}{2a}\mathbf{x}$$

On a donc le jeu d'équations :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{v}{a} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{a}(a^2 F_{grav} + \frac{mH_0^2 \Omega_m}{2} \mathbf{x}) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{da} = \frac{\mathbf{p}}{ma^3 H(a)} = \frac{f(a)\mathbf{p}}{ma} \\ \frac{d\mathbf{p}}{da} = \frac{1}{a^2 H(a)}(a^2 F_{grav} + \frac{mH_0^2 \Omega_m}{2} \mathbf{x}) = f(a)g(a, \mathbf{x}) \end{cases}$$

Il faut implémenter ces équations dans une structure de code N-corps classique afin d'obtenir des résultats en coordonnées comobiles qui ne dépendent plus de t mais du facteur d'échelle a .

On peut par exemple rédiger ce code en saut de grenouille en posant à chaque pas de temps n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{f(a_{n+\frac{1}{2}})}{ma_{n+\frac{1}{2}}} p_{n+\frac{1}{2}} \Delta a \\ p_{n+\frac{1}{2}} = p_{n-\frac{1}{2}} + f(a_n)g(a_n, \mathbf{x}_n) \Delta a \end{cases}$$

5

ANNEXE 2 : THÉORIE DU CODE AVP



A Faster NAM

J. Peebles, Princeton, 30 March 2010

slightly revised 8 November 2010

This is meant to be a summary of the method and an aid to checking whether I have overlooked anything.

The equations of motion are in section 1.1, the discrete representation for numerical solutions is in 1.2, the treatment of initial conditions in 1.3, and the relation to a forward leapfrog integration of the equation of motion in 1.4. Section 2 presents the new method of solution of the discrete representation. In 2.1 the particle orbits are relaxed to the equations of motion — at an extremum of the action — one particle at a time, iteratively; in 2.2 all orbits are relaxed together.

1. Review of the theory

1.1. Equations of motion

In a cosmologically flat universe the expansion parameter satisfies

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H_o^2 \Omega}{a^3} + (1 - \Omega) H_o^2, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H_o^2 \Omega}{2a^3} + (1 - \Omega) H_o^2, \quad (1)$$

with present value $a_o = 1$. The equations of motion in physical length units are

$$\frac{d^2 r_{i,k}}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \frac{G m_j (r_{j,k} - r_{i,k})}{|r_i - r_j|^3} + (1 - \Omega) H_o^2 r_{i,k}. \quad (2)$$

Changing variables to the comoving coordinates $x_{i,k} = r_{i,k}/a(t)$ used here brings eq. (2) to

$$\frac{d}{dt} a^2 \frac{dx_{i,k}}{dt} = \frac{1}{a} \left[\sum_j G m_j \frac{(x_{j,k} - x_{i,k})}{|x_i - x_j|^3} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 x_{i,k} \right]. \quad (3)$$

This is derived from the action

$$S = \int_0^{t_o} dt \left[\sum_i \frac{m_i a^2 \dot{x}_i^2}{2} + \frac{1}{a} \left(\sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|} + \frac{1}{4} \sum_i m_i \Omega H_o^2 x_i^2 \right) \right] \quad (4)$$

when the present positions are fixed, $\delta x_i(t_o) = 0$, and initial conditions satisfy

$$a^2 \dot{x}_i \rightarrow 0 \text{ at } a(t) \rightarrow 0. \quad (5)$$

1.2. Discrete representation

In a discrete representation the coordinates are $x_{i,k,n}$, where i labels the particles, $k = 1, 2, 3$ the Cartesian coordinates, and $1 \leq n \leq n_x + 1$ the time steps. The present positions x_{i,k,n_x+1} are fixed and given. The relevant derivatives of the action are

$$S_{i,k,n} = \frac{\partial S}{\partial x_{i,k,n}}, \quad S_{i,k,n;j,k',n'} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_{i,k,n} \partial x_{j,k',n'}}, \quad 1 \leq n, n' \leq n_x. \quad (6)$$

If S is close to quadratic in the $x_{i,k,n}$ then position shifts $\delta x_{i,k,n}$ to a solution at an extremum of S satisfy

$$S_{i,k,n} + \sum_{j,k',n'} S_{i,k,n;j,k',n'} \delta x_{j,k',n'} = 0. \quad (7)$$

If the $x_{i,k,n}$ are not close to a solution S is not close to quadratic in the $x_{i,k,n}$, but experience shows that coordinate shifts in the direction of $\delta x_{i,k,n}$ walk toward a solution.

Approximate the action (4) as

$$\begin{aligned} S = & \sum_{i,k,n=1,n_x} \frac{m_i}{2} \frac{(x_{i,k,n+1} - x_{i,k,n})^2}{(a_{n+1} - a_n)} \dot{a}_{n+1/2} a_{n+1/2}^2 \\ & + \sum_{i,j,n=1,n_x} \frac{t_{n+1/2} - t_{n-1/2}}{a_n} \left[\sum_{j < i} \frac{G m_i m_j}{|x_{i,n} - x_{j,n}|} + \frac{1}{4} \sum_i m_i \Omega H_o^2 x_{i,n}^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

The times $t_{n \pm 1/2}$ interpolate between the time steps at n and $n \pm 1$ in leapfrog fashion. The approximation to the kinetic energy in eq. (8) is motivated by linear perturbation theory, where dx/da is nearly independent of time, so $(x_{n+1} - x_n)/(a_{n+1} - a_n)$ is a good approximation to dx/da at $a_{n+1/2}$. The earliest time at which positions are computed is at $a_1 > 0$. The leapfrog back in time from a_1 is to $a_{1/2} = 0 = t_{1/2}$. Recall that present positions at $a_{n_x+1} = 1$ are given at x_{i,k,n_x+1} .

The derivative of the action with respect to the coordinates $x_{i,k,n}$ for $1 \leq n \leq n_x$, gives

$$\begin{aligned} S_{i,k,n} = & -\frac{a_{n+1/2}^2 \dot{a}_{n+1/2}}{a_{n+1} - a_n} (x_{i,k,n+1} - x_{i,k,n}) \\ & + \frac{t_{n+1/2} - t_{n-1/2}}{a_n} \left[\sum_{j \neq i} G m_j \frac{x_{j,k,n} - x_{i,k,n}}{|x_{i,n} - x_{j,n}|^3} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 x_{i,k,n} \right] \\ & + \frac{a_{n-1/2}^2 \dot{a}_{n-1/2}}{a_n - a_{n-1}} (x_{i,k,n} - x_{i,k,n-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

When $S_{i,k,n} = 0$ this is a discrete approximation to the equation of motion (3). I have taken the liberty of dropping the common factor m_i , which means $S_{i,k,n;j,k',n'} \neq S_{j,k',n';i,k,n}$, but I don't see any problem with that and it reduces the clutter. (The asymmetry is in the gravity term. There still is the symmetry $S_{i,k,n;i,k',n'} = S_{i,k',n';i,k,n}$.)

To simplify eq. (9) and its derivatives wrt $x_{i,k,n}$ let

$$F_n^+ = \frac{a_{n+1/2}^2 \dot{a}_{n+1/2}}{a_{n+1} - a_n}, \quad F_n^- = \frac{a_{n-1/2}^2 \dot{a}_{n-1/2}}{a_n - a_{n-1}} = F_{n-1}^+, \quad \frac{dt_n}{a_n} = \frac{t_{n+1/2} - t_{n-1/2}}{a_n}. \quad (10)$$

Note that

$$F_1^- = 0 = F_0^+ \quad (11)$$

follows from $a^2\dot{a} \rightarrow 0$ at $a \rightarrow 0$. Also, write the acceleration (apart from the factor a^2) of particle i due to the other particles $j \neq i$ as

$$g_{i,k,n} = \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{x_{j,k,n} - x_{i,k,n}}{|x_{i,n} - x_{j,n}|^3}. \quad (12)$$

All this notation brings eq. (9) to

$$S_{i,k,n} = -F_n^+(x_{i,k,n+1} - x_{i,k,n}) + F_n^-(x_{i,k,n} - x_{i,k,n-1}) + \frac{dt_n}{a_n} \left[g_{i,k,n} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 x_{i,k,n} \right]. \quad (13)$$

We need the derivatives of the action wrt the positions of the particles. Let the derivative of the acceleration of particle i wrt the position of particle $j \neq i$ be

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{i,k,n;j,k'} &= \frac{\partial g_{i,k,n}}{\partial x_{j,k',n}} \\ &= Gm_j \left(\frac{\delta_{k,k'}}{|x_{i,n} - x_{j,n}|^3} - 3 \frac{(x_{j,k,n} - x_{i,k,n})(x_{j,k',n} - x_{i,k',n})}{|x_{i,n} - x_{j,n}|^5} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

The derivative of the acceleration of particle i wrt its own position is

$$\mathcal{G}_{i,k,n;i,k'} = \frac{\partial g_{i,k,n}}{\partial x_{i,k',n}} = - \sum_{j \neq i} \mathcal{G}_{i,k,n;j,k'} \quad (15)$$

So the nonzero derivatives of eq. (13) wrt the coordinates are

$$\begin{aligned} S_{i,k,n;i,k,n+1} &= -F_n^+, & S_{i,k,n;i,k,n-1} &= -F_n^-, \\ S_{i,k,n;j,k',n} &= \frac{dt_n}{a_n} \mathcal{G}_{i,k,n;j,k'}, & j &\neq i, \\ S_{i,k,n;i,k',n} &= (F_n^+ + F_n^-) \delta_{k,k'} + \frac{dt_n}{a_n} \left[\mathcal{G}_{i,k,n;i,k'} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 \delta_{k,k'} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

The game now is to use these second derivatives of the action to drive the first derivatives to zero at a stationary point, $S_{i,k,n} = 0$.

1.4. Leapfrog integration forward in time

It is worth recording that when the action is at a stationary point, $S_{i,k,n} = 0$, a solution of equation (13) is equivalent to a standard leapfrog numerical integration of the equation of motion (3) forward in time. In this leapfrog, the positions and velocities are computed at interleaved time steps as (in the notation in eq [10]),

$$a_{n+1/2}^2 \dot{x}_{i,k,n+1/2} = a_{n-1/2}^2 \dot{x}_{i,k,n-1/2} + \frac{dt_n}{a_n} \left[\sum_{j \neq i} g_{i,k,n;j} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 x_{i,k,n} \right], \quad (17)$$

and

$$x_{i,k,n+1} = x_{i,k,n} + \dot{x}_{i,k,n+1/2}(t_{n+1} - t_n) = x_{i,k,n} + \dot{x}_{i,k,n+1/2}(a_{n+1} - a_n)/\dot{a}_{n+1/2}, \quad (18)$$

which in the notation in eq (10) is

$$x_{i,k,n+1} = x_{i,k,n} + a_{n+1/2}^2 \dot{x}_{i,k,n+1/2} / F_n^+. \quad (19)$$

Equations (17) and (19) are equivalent to eq. (13) at $S_{i,k,n} = 0$.

The difference from a conventional leapfrog integration is the boundary conditions, which here are the present positions and a condition on the initial velocities, as follows.

1.3. Initial conditions

The representation of the mass distribution in the early universe by galaxy-size particles certainly is crude, but I think/hope it is a reasonably useful approximation that motivates the following consideration.

In linear perturbation theory for a continuous pressureless fluid the unwanted decaying mode has peculiar velocity that is decreasing as $v = a\dot{x} \propto 1/a(t)$. Eq. (5) formally eliminates this decaying mode. In the wanted growing mode the coordinate position of a particle is changing with time as

$$x(t) - x(0) \propto t^{2/3} \propto a(t). \quad (20)$$

This implies that in the wanted growing mode the left hand side of eq. (3) is constant, meaning $a^2 dx_{i,k}/dt \simeq \text{constant} \times t$, where t is the time measured from $a = 0$. This motivates approximating equation (3) at the time $t_{3/2}$ intermediate between the first two time steps in the leapfrog, a_1 and a_2 , as

$$a_{3/2}^2 \frac{dx_{i,k,3/2}}{dt} \simeq a_{3/2}^2 \dot{a}_{3/2} \frac{x_{i,k,2} - x_{i,k,1}}{a_2 - a_1} = \frac{t_{3/2}}{a_1} \left[\sum_j Gm_j \frac{(x_{j,k,1} - x_{i,k,1})}{|x_i - x_j|^3} + \frac{1}{2} \Omega H_o^2 x_{i,k,1} \right], \quad (21)$$

Recall that the half time step earlier than a_1 is at $a_{1/2} = 0 = t_{1/2} = 0$, where $a^2 \dot{x}$ is supposed to vanish. Equation (21) agrees with equations (11) and (13) at $S_{i,k,1} = 0$.

It will be noted that a_1 may be much larger than $a_2 - a_1$, meaning the numerical solution commences at modest redshift with small time steps. But $t_{3/2}$ is still the time from $a_{1/2} = 0$ to the time midway between a_1 and a_2 .

The prescription in eq. (21) allows large peculiar velocities at high redshift. This is not inconsistent with eq. (5); it corresponds to a large primeval departure from homogeneity. It does mean that one must select solutions that are judged to have realistic initial peculiar velocities (at $a_{3/2}$).

To summarize, the usual initial conditions — position and velocity — in a leapfrog integration of the equation of motion forward in time are replaced by the present position, x_{i,k,n_x+1} , and the relation in equation (21) between the two earliest positions, $x_{i,k,1}$ and $x_{i,k,2}$, at times t_1 and t_2 . If equation (20) is a good approximation this is equivalent to specifying the initial velocity, for then eq. (21) determines $\dot{x}_{3/2}$. That is, the boundary conditions for a solution $S_{i,k,n} = 0$ are the present position and the time-variation of the initial velocity.

2. Method of solution

2.1. Single orbit adjustment

Since we're adjusting only the orbit of particle i drop the label i and write the first derivative of S as

$$\frac{\partial S}{\partial x_{k,n}} = S_{k,n} = -F_n^+(x_{k,n+1} - x_{k,n}) + F_n^-(x_{k,n} - x_{k,n-1}) + \frac{dt_n}{a_n} \left(\sum_{j \neq i} g_{k,n;j} + \frac{\Omega H_o^2}{2} x_{k,n} \right), \quad (22)$$

and write the equation to be solved as

$$S_{k,n} + \sum_{k',n'} S_{k,n;k',n'} \delta x_{k',n'} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x_{k,n} \partial x_{k',n'}} = S_{k,n;k',n'} = S_{k',n';k,n}. \quad (23)$$

The nonzero second derivatives are

$$S_{k,n;k,n+1} = -F_n^+, \quad (24)$$

$$S_{k,n;k',n} = (F_n^+ + F_n^-) \delta_{k,k'} + \frac{dt_n}{a_n} \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{G}_{k,n;jk'} + \frac{\Omega H_o^2}{2} \delta_{k,k'} \right). \quad (25)$$

Since

$$S_{k,n;k',n'} = 0 \text{ unless } n' = n \text{ or else } n' = n \pm 1 \text{ and } k' = k, \quad (26)$$

eq. (23) is

$$S_{k,n} + S_{k,n;k,n+1} \delta x_{k,n+1} + \sum_{k'} S_{k,n;k',n} \delta x_{k',n} + S_{k,n;k,n-1} \delta x_{k,n-1} = 0. \quad (27)$$

Set $n \rightarrow n-1$ in this equation and rearrange it to

$$\delta x_{k,n} = - \frac{S_{k,n-1} + \sum_{k'} S_{k,n-1;k',n-1} \delta x_{k',n-1} + S_{k,n-1;k,n-2} \delta x_{k,n-2}}{S_{k,n-1;k,n}}. \quad (28)$$

This gives $\delta x_{k,n}$ in terms of $\delta x_{k,n-1}$ and $\delta x_{k,n-2}$. On iterating we get the form

$$\delta x_{k,n} = A_{k,n} + \sum_{k''} B_{k,n;k''} \delta x_{k'',1}. \quad (29)$$

At $n = 1$ this is just

$$A_{k,1} = 0, \quad B_{k,1;k''} = \delta_{k,k''}. \quad (30)$$

At the second time step from the start, $n = 2$, eq. (28) is

$$\delta x_{k,2} = - \left[S_{k,1} + \sum_{k'} S_{k,1;k',1} \delta x_{k',1} \right] / S_{k,1;k,2}, \quad (31)$$

because there is no $\delta x_{k,0}$. Comparing this with eq. (29) we see that

$$A_{k,2} = -S_{k,1}/S_{k,1;k,2}, \quad B_{k,2;k'} = -S_{k,1;k',1}/S_{k,1;k,2}. \quad (32)$$

At $n \geq 3$ the result of substituting the form (29) into eq. (28) is

$$\begin{aligned} \delta x_{k,n} = & - \left[S_{k,n-1} + \sum_{k'} S_{k,n-1;k',n-1} (A_{k',n-1} + \sum_{k''} B_{k',n-1;k'',n-1} \delta x_{k'',1}) \right. \\ & \left. + S_{k,n-1;k,n-2} (A_{k,n-2} + \sum_{k''} B_{k,n-2;k'',n-2} \delta x_{k'',1}) \right] / S_{k,n-1;k,n}. \end{aligned} \quad (33)$$

So at $3 \leq n \leq n_x$

$$\begin{aligned} A_{k,n} = & - \frac{S_{k,n-1} + \sum_{k'} S_{k,n-1;k',n-1} A_{k',n-1} + S_{k,n-1;k,n-2} A_{k,n-2}}{S_{k,n-1;k,n}}, \\ B_{k,n;k''} = & - \frac{\sum_{k'} S_{k,n-1;k',n-1} B_{k',n-1;k'',n-1} + S_{k,n-1;k,n-2} B_{k,n-2;k''}}{S_{k,n-1;k,n}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Eqs (32) and (34) give the $A_{k,n}$ and $B_{k,n;k''}$, $2 \leq n \leq n_x$, in terms of the input derivatives of the action. Then eq. (29) is $3n_x - 3$ equations for the $\delta x_{k,n}$, at $2 \leq n \leq n_x$, in terms of the $\delta x_{k,1}$. We get three more, which fix the $\delta x_{k,1}$, by setting $n = n_x$ in equation (27) and recalling that $\delta x_{k,n_x+1} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = & S_{k,n_x} + \sum_{k'} S_{k,n_x;k',n_x} \delta x_{k',n_x} + S_{k,n_x;k,n_x-1} \delta x_{k,n_x-1} \\ = & S_{k,n_x} + \sum_{k'} S_{k,n_x;k',n_x} \left[A_{k',n_x} + \sum_{k''} B_{k',n_x;k'',n_x} \delta x_{k'',1} \right] \\ & + S_{k,n_x;k,n_x-1} \left[A_{k,n_x-1} + \sum_{k''} B_{k,n_x-1;k'',n_x-1} \delta x_{k'',1} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

So write this as

$$\begin{aligned} 0 = & T_k + \sum_{k'} T_{k,k''} \delta x_{k'',1}, \\ T_k = & S_{k,n_x} + \sum_{k'} S_{k,n_x;k',n_x} A_{k',n_x} + S_{k,n_x;k,n_x-1} A_{k,n_x-1}, \\ T_{k,k''} = & \sum_{k'} S_{k,n_x;k',n_x} B_{k',n_x;k'',n_x} + S_{k,n_x;k,n_x-1} B_{k,n_x-1;k''}, \end{aligned} \quad (36)$$

solve this 3×3 set of equations for the $\delta x_{k,1}$, and then get the rest of the $\delta x_{k,n}$ from eq. (29).

2.2 Joint orbit relaxation

Here the goal is to shifts of the coordinates $x_{i,k,n}$ of the orbits of all the particles that move toward to a stationary point of the action, $S_{i,k,n} = 0$.

The first derivatives of the action with respect to the coordinates $x_{i,k,n}$ are given by equation (13):

$$S_{i,k,n} = -F_n^+(x_{i,k,n+1} - x_{i,k,n}) + F_n^-(x_{i,k,n} - x_{i,k,n-1}) + \frac{dt_n}{a_n} \left(\sum_{j \neq i} g_{i,k,n;j} + \frac{\Omega H_o^2}{2} x_{i,k,n} \right). \quad (37)$$

The nonzero second derivatives are

$$\begin{aligned} S_{i,k,n;i,k,n+1} &= -F_n^+, \\ S_{i,k,n,i,k',n} &= (F_n^+ + F_n^-) \delta_{k,k'} + \frac{dt_n}{a_n} \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{G}_{i,k,n;j,k'} + \frac{\Omega H_o^2}{2} \delta_{k,k'} \right), \\ S_{i,k,n,j,k',n} &= -\frac{dt_n}{a_n} \mathcal{G}_{i,k,n;j,k'}, \text{ for } j \neq i. \end{aligned} \quad (38)$$

If S is quadratic in the coordinates the shifts $\delta x_{i,k,n}$ to an extremum of S are

$$S_{i,k,n} + \sum_{j,k',n'} S_{i,k,n,j,k',n'} \delta x_{j,k',n'} = 0. \quad (39)$$

The nonzero terms in this equation are

$$S_{i,k,n} + S_{i,k,n;i,k,n+1} \delta x_{i,k,n+1} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n;j,k',n} \delta x_{j,k',n} + S_{i,k,n;i,k,n-1} \delta x_{i,k,n-1} = 0. \quad (40)$$

Set $n+1 \rightarrow n$ and rearrange to get

$$\delta x_{i,k,n} = -\frac{S_{i,k,n-1} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n-1;j,k',n-1} \delta x_{j,k',n-1} + S_{i,k,n-1;i,k,n-2} \delta x_{i,k,n-2}}{S_{i,k,n-1;i,k,n}}. \quad (41)$$

This iterates to

$$\delta x_{i,k,n} = A_{i,k,n} + \sum_{j',k''} B_{i,k,n;j',k'',n} \delta x_{j',k'',n}. \quad (42)$$

At $n=1$,

$$A_{i,k,1} = 0, \quad B_{i,k,1;j',k'',1} = \delta_{i,j'} \delta_{k,k''}. \quad (43)$$

At $n=2$, equation (41) is

$$\delta x_{i,k,2} = -\left[S_{i,k,1} + \sum_{j',k''} S_{i,k,1;j',k'',1} \delta x_{j',k'',1} \right] / S_{i,k,1;i,k,2}, \quad (44)$$

so

$$A_{i,k,2} = -S_{i,k,1} / S_{i,k,1;i,k,2}, \quad B_{i,k,2;j,k'',2} = -S_{i,k,1;j,k'',1} / S_{i,k,1;i,k,2}. \quad (45)$$

At $n \geq 3$ the form (42) in eq. (41) gives

$$\begin{aligned} \delta x_{i,k,n} = & - \left[S_{i,k,n-1} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n-1;j,k',n-1} \left(A_{j,k',n-1} + \sum_{j',k''} B_{j,k',n-1;j',k'',n-1} \delta x_{j',k'',1} \right) \right. \\ & \left. + S_{i,k,n-1;i,k,n-2} \left(A_{i,k,n-2} + \sum_{j',k''} B_{i,k,n-2;j',k'',n-2} \delta x_{j',k'',1} \right) \right] / S_{i,k,n-1;i,k,n}. \end{aligned} \quad (46)$$

So, at $3 \leq n \leq n_x$,

$$\begin{aligned} A_{i,k,n} &= - \frac{S_{i,k,n-1} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n-1;j,k',n-1} A_{j,k',n-1} + S_{i,k,n-1;i,k,n-2} A_{i,k,n-2}}{S_{i,k,n-1;i,k,n}}, \\ B_{i,k,n;j',k''} &= - \frac{\sum_{j,k'} S_{i,k,n-1;j,k',n-1} B_{j,k',n-1;j',k'',n-1} + S_{i,k,n-1;i,k,n-2} B_{i,k,n-2;j',k'',n-2}}{S_{i,k,n-1;i,k,n}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Setting $n = n_x$ in equation (40) with $\delta x_{i,k,n_x+1} = 0$ gives

$$\begin{aligned} 0 &= S_{i,k,n_x} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n_x;j,k',n_x} \delta x_{j,k',n_x} + S_{i,k,n_x;i,k,n_x-1} \delta x_{i,k,n_x-1} \\ &= S_{i,k,n_x} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n_x;j,k',n_x} \left[A_{j,k',n_x} + \sum_{j',k''} B_{j,k',n_x;j',k'',n_x} \delta x_{j',k'',1} \right] \\ &\quad + S_{i,k,n_x;i,k,n_x-1} \left[A_{i,k,n_x-1} + \sum_{j',k''} B_{i,k,n_x-1;j',k'',n_x-1} \delta x_{j',k'',1} \right], \end{aligned} \quad (48)$$

or

$$\begin{aligned} 0 &= T_{i,k} + \sum_{j',k''} T_{i,k;j',k''} \delta x_{j',k'',1}, \\ T_{i,k} &= S_{i,k,n_x} + \sum_{j,k'} S_{i,k,n_x;j,k',n_x} A_{j,k',n_x} + S_{i,k,n_x;i,k,n_x-1} A_{i,k,n_x-1}, \\ T_{i,k;j',k''} &= \sum_{j,k'} S_{i,k,n_x;j,k',n_x} B_{j,k',n_x;j',k'',n_x} + S_{i,k,n_x;i,k,n_x-1} B_{i,k,n_x-1;j',k'',n_x}. \end{aligned} \quad (49)$$

Inversion of the matrix $T_{i,k;j',k''}$ fixes the $\delta x_{i,k,1}$, and equations (42) and (47) give the rest of the $\delta x_{i,k,n}$.

RÉFÉRENCES

- [1] P.J.E PEEBLES. Tracing Galaxy Orbits back in time, Princeton University, 1989.
- [2] F. HAMMER. Gaia EDR3 proper motions of Milky Way dwarfs. II : Velocities, Total Energy and Angular Momentum, 2021.
- [3] P.J.E PEEBLES. Dynamics of the Local Group : the Dwarf Galaxies, Princeton University, 2017.
- [4] S.D. PHELPS. Cosmological Action in redshift space, Technion-Israel Institute of Technology, 2001.
- [5] ADI NUSSER. Boundary-value problems in cosmological dynamics, Technion-Israel Institute of Technology, 2017.
- [6] TROND HJORTELAND. The Action Variational Principle in Cosmology, University of Oslo, 1999.
- [7] G.S BISNOVATYI-KOGAN. Two-body problem in presence of cosmological constant, Space Research Institute of Moscow, 2019.