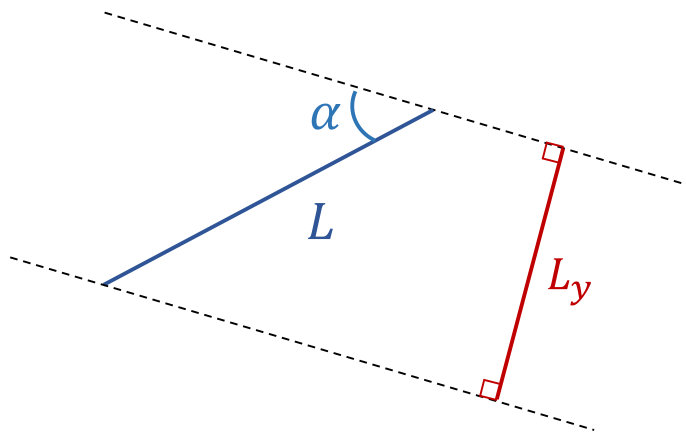
Devoir maison – Corrigé

LU1MEPY1 – Section MIPI 14.3

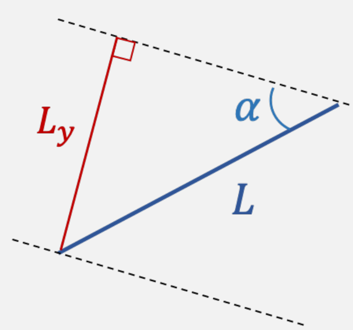
Ce devoir est à rendre avant le lundi 02/11 ***23h59*** *via Moodle. Il couvre l'essentiel des sujets traités jusqu'au TD n°4. Chaque réponse doit être* ***justifiée****, et toute trace de recherche, même infructueuse, sera valorisée.*

1 Petites questions mathématiques

1. Avec les notations de la figure ci-dessous, exprimer L_y en fonction de L et α.



Pour y voir plus clairement, on peut déplacer le segment L_y pour former un triangle rectangle :



On a alors

$$\sin\alpha = \frac{L_y}{L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L_y = L\sin\alpha}$$

2. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (composantes dans une base orthonormée $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

   Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} = 1\times 2 + 3\times 6 + 0\times 1 = 20$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times 1 - 0\times 6\\0\times 2 - 1\times 1\\1\times 6 - 3\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

2 Analyse dimensionnelle

On étudie les ondes à la surface d'un liquide.

1. Les ondes de grande longueur d'onde sont dominées par la gravité. Montrer que $v_{\text{grav}} = \sqrt{\lambda g}$, où λ est la longueur d'onde et g le champ de pesanteur, est une expression acceptable pour la vitesse de telles ondes.

$$[g] = L.T^{-2}\ , \quad [\lambda] = L$$

On voit qu'on peut construire une vitesse $[v_{\text{grav}}] = L.T^{-1}$ via

$$v_{\text{grav}} = \sqrt{\lambda g}$$

2. Les ondes de petite longueur d'onde sont dominées par la capillarité. Déterminer, à une constante près, l'expression de la vitesse v_γ de telles ondes en fonction de la masse volumique du liquide ρ, de la constante de tension superficielle γ (unité SI : N.m^{-1}) et de la longueur d'onde λ.

Cette fois, utilisons la méthode de l'équation aux dimensions. On cherche $v_\gamma = \rho^\alpha\gamma^\beta\lambda^\delta$.
Les dimensions sont $[v_\gamma] = L.T^{-1}$, $[\rho] = M.L^{-3}$, $[\gamma] = [F]/L = (M.L.T^{-2}).L^{-1} = M.T^{-2}$ et $[\lambda] = L$.
L'équation aux dimensions s'écrit :

$$L.T^{-1} = M^\alpha L^{-3\alpha}\times M^\beta T^{-2\beta}\times L^\delta = M^{\alpha+\beta}\times L^{\delta-3\alpha}\times T^{-2\beta} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\alpha+\beta = 0\\ \delta - 3\alpha = 1\\ -2\beta = -1\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha = -\beta\\ \delta = 1+3\alpha\\ \beta = 1/2\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases}\alpha = -1/2\\ \delta = -1/2\\ \beta = 1/2\end{cases}$$

Le résultat s'écrit donc :

$$v_\gamma = \rho^{-1/2}\gamma^{1/2}\lambda^{-1/2} = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda\rho}}$$

3. Ces deux vitesses sont égales pour une longueur $\lambda = l_c$ appelée *longueur capillaire*, qui marque la transition entre les deux types d'ondes. Exprimer littéralement l_c puis faire l'application numérique pour de l'eau pure au contact de l'air ($\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, $\gamma = 70 \times 10^{-3}$ N.m^{-1}, $g = 9,81$ m.s^{-2}).

On résout :

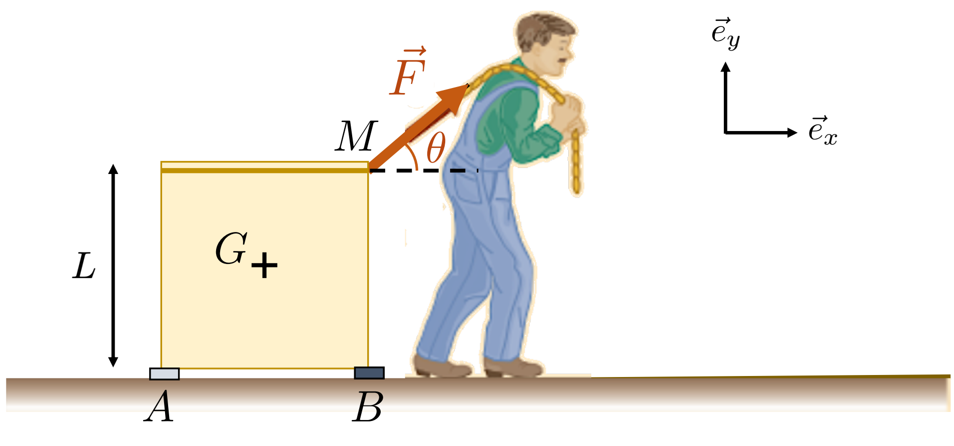
$$v_{\text{grav}} = v_\gamma \iff \sqrt{l_c g} = \sqrt{\frac{\gamma}{l_c \rho}} \iff l_c g = \frac{\gamma}{l_c \rho} \iff l_c^2 = \frac{\gamma}{\rho g} \iff \boxed{l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}}$$

Application numérique : $l_c \simeq 2,7$ mm

3 Frottements et déménagement

Une caisse en bois carrée de côté L, contenant une machine à laver, a une masse totale de $m = 100$ kg. Elle doit être déplacée par le déménageur en tirant sur une corde faisant un angle $\theta = 30°$ avec l'horizontale.

Pour simplifier les calculs, on considère que la corde est accrochée quasiment au sommet de la caisse ($BM \simeq L$).

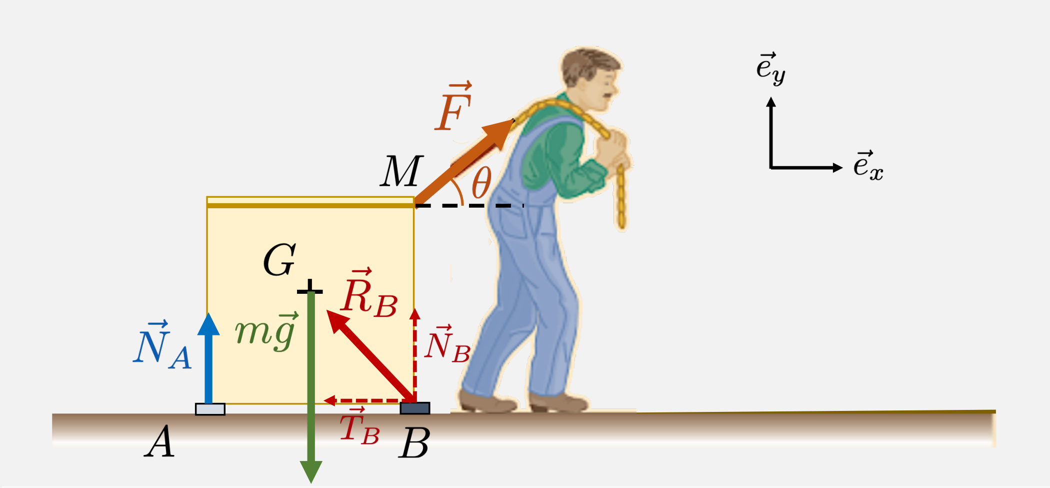


On considère un problème à deux dimensions $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. La caisse a deux points de contact avec le plancher, A et B. Le patin censé assurer le glissement ayant sauté en B, on considèrera que le contact se fait sans frottement en A, et avec frottement en B (coefficient de frottement statique entre la caisse et le plancher $\mu_s = 0,5$).

On cherche à déterminer la force F à exercer pour déplacer la caisse.

1. Réaliser le bilan des forces qui s'appliquent à la caisse, et les représenter sur un schéma. Projeter ces forces suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

- Système : {caisse}
- Bilan des forces :
  - poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$ qui s'applique au centre de masse G.
  - force de traction $\vec{F} = F(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$ qui s'applique au point d'attache M de la corde.
  - réaction du support $\vec{R}_A = N_A\vec{e}_y$ en A. *Réaction normale uniquement car sans frottements.*
  - réaction du support $\vec{R}_B = -T_B\vec{e}_x + N_B\vec{e}_y$ ($T_B > 0, N_B > 0$) qui s'applique au point B. *Rappel : $\vec{T}_B$ est opposée au mouvement potentiel, donc suivant $-\vec{e}_x$. La composante normale va toujours vers l'extérieur du support, donc $+\vec{e}_y$.*



2. La caisse étant immobile, écrire la relation d'équilibre translationnel et la projeter suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.

La condition d'équilibre translationnel s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$$

En projection suivant $\vec{e}_x$,

$$-T_B + F\cos\theta = 0 \iff \boxed{T_B = F\cos\theta} \tag{1}$$

En projection suivant $\vec{e}_y$,

$$-mg + F\sin\theta + N_A + N_B = 0 \tag{2}$$

3. Calculer les moments des forces en B. Pourquoi ce point est-il judicieusement choisi ?

(*Rappel :* le centre de gravité G est situé au milieu du carré.)

On a :

$$\vec{\mathscr{M}}_B(m\vec{g}) = \overrightarrow{BG} \wedge m\vec{g} = \left(-\frac{L}{2}\vec{e}_x + \frac{L}{2}\vec{e}_y\right) \wedge (-mg\vec{e}_y) = mg\frac{L}{2}\vec{e}_z$$

$$\vec{\mathscr{M}}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F} = \left(L\vec{e}_y\right) \wedge F(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = -FL\cos\theta\vec{e}_z$$

$$\vec{\mathscr{M}}_B(\vec{N}_A) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{N}_A = (-L\vec{e}_x) \wedge (N_A\vec{e}_y) = -LN_A\vec{e}_z$$

$$\vec{\mathscr{M}}_B(\vec{R}_B) = \overrightarrow{BB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

On peut vérifier la cohérence des résultats obtenus. Le poids fait tourner la caisse dans le sens direct autour de B, d'où le signe + pour la composante du moment suivant $\vec{e}_z$. À l'inverse, la réaction en A et la force $\vec{F}$ font tourner dans le sens indirect, d'où les signes $-$. Enfin la réaction en B *passe par B*, d'où son moment nul. On aurait d'ailleurs pu calculer tous les moments avec le bras de levier et les considérations de signe.
C'est la raison pour laquelle le point B est bien choisi : on élimine ainsi le moment de $\vec{R}_B$.

4. Écrire l'équilibre rotationnel et montrer que la norme de la réaction en A vaut

$$N_A = \frac{mg}{2} - F\cos\theta$$

L'équilibre rotationnel s'écrit :

$$\vec{\mathscr{M}}_B(m\vec{g}) + \vec{\mathscr{M}}_B(\vec{F}) + \vec{\mathscr{M}}_B(\vec{N}_A) + \vec{\mathscr{M}}_B(\vec{R}_B) = \vec{0}$$

Soit, en projection sur $\vec{e}_z$,

$$L\frac{mg}{2} - LF\cos\theta - LN_A = 0$$

En simplifiant par L, on obtient bien :

$$\boxed{N_A = \frac{mg}{2} - F\cos\theta}$$

5. En utilisant les équations de l'équilibre translationnel, déterminer les composantes de la force de réaction en B en fonction de m, g, F et θ.

On a déjà montré [équation (1)] que la composante tangentielle de la réaction en B s'écrit

$$T_B = F\cos\theta$$

Pour la composante normale, on utilise l'équation restante (2) :

$$\begin{aligned} N_B &= mg - F\sin\theta - N_A \\ &= mg - F\sin\theta - \left(\frac{mg}{2} - F\cos\theta\right) \\ &= \frac{mg}{2} - F(\sin\theta - \cos\theta) \end{aligned}$$

6. Écrire la condition de non-glissement en B. Montrer que la force à exercer pour déplacer la caisse (à savoir la force à partir de laquelle la condition de non-glissement ne peut plus être vérifiée) s'exprime :

$$F_{\min} = \frac{\mu_s \frac{mg}{2}}{(1-\mu_s)\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

Réaliser l'application numérique.

Il n'y a pas glissement au point B tant que la norme de la réaction tangentielle ne dépasse pas celle de la réaction normale multipliée par le coefficient de frottement statique :

$$|T_B| \leq \mu_s |N_B|$$

(*Remarque : les valeurs absolues sont ici superflues puisqu'on a supposé ces quantités positives. Si on avait $N_B < 0$, cela voudrait dire que le contact en B est rompu et il faudrait reprendre les calculs.*) En utilisant les résultats précédents, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} & F\cos\theta \leq \mu_s \left(\frac{mg}{2} - F(\sin\theta - \cos\theta)\right) \\ \iff \quad & F\left[\cos\theta - \mu_s\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right] \leq \mu_s \frac{mg}{2} \\ \iff \quad & F \leq \frac{\mu_s \frac{mg}{2}}{(1-\mu_s)\cos\theta + \mu_s\sin\theta} \end{aligned}$$

La force minimale à appliquer pour rompre la condition de non-glissement (et donc déplacer la caisse) est ainsi :

$$\boxed{F_{\min} = \frac{\mu_s \frac{mg}{2}}{(1-\mu_s)\cos\theta + \mu_s \sin\theta}}$$

Application numérique : pour $\theta = 30°$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ et $\sin\theta = 1/2$. On obtient :

$$\boxed{F_{\min} \simeq 359 \text{ N}}$$

7. La force à exercer est-elle plus ou moins grande que si $\theta = 0$? Proposer une justification qualitative.

On peut faire le même calcul pour $\theta = 0$. On a alors :

$$F_{\min}(\theta = 0) = \frac{\mu_s}{1-\mu_s}\frac{mg}{2} \simeq 491 \text{ N}$$

Il est donc plus économique pour le déménageur de ne pas tirer à l'horizontale. En effet, une composante verticale permet de diminuer N_B, rendant la condition de non-glissement plus facile à rompre.
Remarque : un angle θ non nul diminue cependant aussi T_B. Toutefois, l'effet dominant est la diminution de N_B, comme cela sera explicité à la question suivante.

8. **Question facultative :* déterminer l'angle θ^* optimal pour lequel la force $\vec{F}$ à exercer est minimale. Faire l'application numérique.

On peut anticiper qu'il va exister un compromis entre tirer purement à l'horizontale (ce qui augmente T_B mais laisse N_B maximale) et soulever la caisse (ce qui est optimal pour N_B mais rend T_B nulle...). On cherche le minimum de la fonction $F_{\min}(\theta)$, atteint en :

$$\left.\frac{\mathrm{d}F_{\min}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\theta^*} = 0$$

$$\iff \quad -\left(-(1-\mu_s)\sin\theta^* + \mu_s\cos\theta^*\right)\underbrace{\frac{\mu_s\frac{mg}{2}}{\left[(1-\mu_s)\cos\theta^* + \mu_s\sin\theta^*\right]^2}}_{\neq 0} = 0$$

D'où l'expression de l'angle optimal :

$$-(1-\mu_s)\sin\theta^* + \mu_s\cos\theta^* = 0 \quad \iff \quad \boxed{\tan\theta^* = \frac{\mu_s}{1-\mu_s}}$$

Pour $\mu_s = 0{,}5$, cela correspond à $\tan\theta^* = 1$ d'où

$$\boxed{\theta^* = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad} = 45^\circ}$$

Et la force à exercer est alors ($\cos\theta^* = \sin\theta^* = 1/\sqrt{2}$) :

$$F_{\min}(\theta^*) = \mu_s\frac{mg}{\sqrt{2}} \simeq 347\ \mathrm{N}$$