Devoir maison

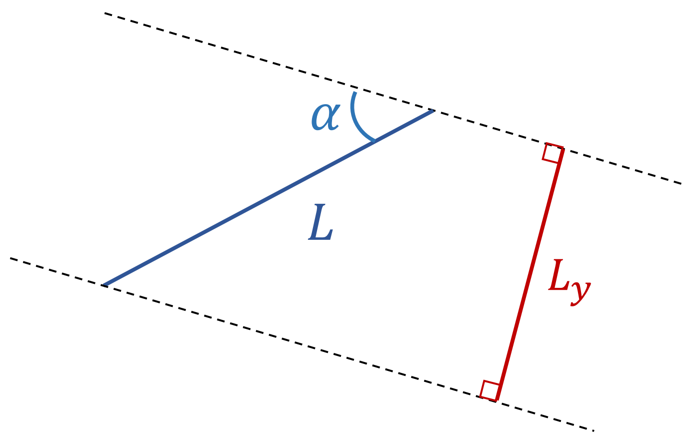
LU1MEPY1 – Section MIPI 14.3

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Ce devoir est à rendre avant le lundi 02/11 ***23h59*** *via Moodle. Il couvre l'essentiel des sujets traités jusqu'au TD n°4. Chaque réponse doit être* ***justifiée****, et toute trace de recherche, même infructueuse, sera valorisée.*

1 Petites questions mathématiques

1. Avec les notations de la figure ci-dessous, exprimer L_y en fonction de L et α.



2. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (composantes dans une base orthonormée $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

   Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

2 Analyse dimensionnelle

On étudie les ondes à la surface d'un liquide.

1. Les ondes de grande longueur d'onde sont dominées par la gravité. Montrer que $v_{\text{grav}} = \sqrt{\lambda g}$, où λ est la longueur d'onde et g le champ de pesanteur, est une expression acceptable pour la vitesse de telles ondes.

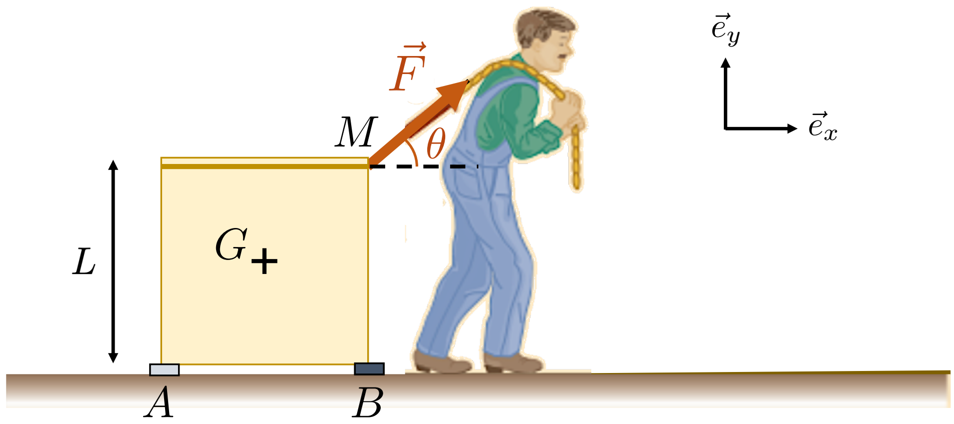
2. Les ondes de petite longueur d'onde sont dominées par la capillarité. Déterminer, à une constante près, l'expression de la vitesse v_γ de telles ondes en fonction de la masse volumique du liquide ρ, de la constante de tension superficielle γ (unité SI : N.m^{-1}) et de la longueur d'onde λ.

3. Ces deux vitesses sont égales pour une longueur $\lambda = l_c$ appelée *longueur capillaire*, qui marque la transition entre les deux types d'ondes. Exprimer littéralement l_c puis faire l'application numérique pour de l'eau pure au contact de l'air ($\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, $\gamma = 70 \times 10^{-3}$ N.m^{-1}, $g = 9,81$ m.s^{-2}).

3 Frottements et déménagement

Une caisse en bois carrée de côté L, contenant une machine à laver, a une masse totale de $m = 100$ kg. Elle doit être déplacée par le déménageur en tirant sur une corde faisant un angle $\theta = 30°$ avec l'horizontale.

Pour simplifier les calculs, on considère que la corde est accrochée quasiment au sommet de la caisse ($BM \simeq L$).



On considère un problème à deux dimensions $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. La caisse a deux points de contact avec le plancher, A et B. Le patin censé assurer le glissement ayant sauté en B, on considèrera que le contact se fait sans frottement en A, et avec frottement en B (coefficient de frottement statique entre la caisse et le plancher $\mu_s = 0,5$).

On cherche à déterminer la force F à exercer pour déplacer la caisse.

1. Réaliser le bilan des forces qui s'appliquent à la caisse, et les représenter sur un schéma. Projeter ces forces suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.
2. La caisse étant immobile, écrire la relation d'équilibre translationnel et la projeter suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.
3. Calculer les moments des forces en B. Pourquoi ce point est-il judicieusement choisi ?

   (*Rappel :* le centre de gravité G est situé au milieu du carré.)
4. Écrire l'équilibre rotationnel et montrer que la norme de la réaction en A vaut
$$N_A = \frac{mg}{2} - F\cos\theta$$
5. En utilisant les équations de l'équilibre translationnel, déterminer les composantes de la force de réaction en B en fonction de m, g, F et θ.
6. Écrire la condition de non-glissement en B. Montrer que la force à exercer pour déplacer la caisse (à savoir la force à partir de laquelle la condition de non-glissement ne peut plus être vérifiée) s'exprime :
$$F_{\min} = \frac{\mu_s \frac{mg}{2}}{(1-\mu_s)\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$
   Réaliser l'application numérique.
7. La force à exercer est-elle plus ou moins grande que si $\theta = 0$? Proposer une justification qualitative.
8. **Question facultative :* déterminer l'angle θ^* optimal pour lequel la force $\vec{F}$ à exercer est minimale. Faire l'application numérique.