

Optique Quantique

Denis WERTH

Département de Physique, École Normale Supérieure Paris-Saclay

Ce cours se base sur les notes laissées par Chris WESTBROOK pour son cours d'optique quantique enseigné en M1 Phytem. Nous avons essayé de suivre avec fidélité le cheminement du cours, on y trouvera la quasi totalité des thématiques abordées. J'espère que ce nouveau polycopié prêtera main-forte à nombreux d'entre vous et participera à la réussite de tous. Bonne lecture¹...

1. Je ne garantis absolument pas l'absence de fautes ou de coquilles.

Table des matières

1	Rayonnement du corps noir	4
1.1	Approche de RAYLEIGH	4
1.2	Approche de PLANCK	5
1.3	Approche d'EINSTEIN	5
2	Oscillateur harmonique quantique	7
2.1	Variables réduites	7
2.2	Opérateurs d'annihilation et de création	7
2.3	États propres	9
3	Quantification du champ électrique	9
3.1	Champ électrique classique	10
3.2	Quantification d'un mode du champ électrique	11
3.3	Quadratures du champ	12
3.4	Champs multimodes	13
4	États du champ électrique	13
4.1	États nombres et vide quantique	14
4.2	États cohérents	15
4.3	États comprimés ("squeezed states")	18
5	Interaction champ-matière	21
5.1	Dipôle électrique	21
5.2	Théorie des perturbations dépendantes du temps	22
5.3	Transitions dipolaires avec un champ quantique	25
5.4	Modèle de JAYNES-CUMMINGS	27
6	Émission spontanée	30
6.1	Transitions avec un champ quantique multimode	30
6.2	Effet PURCELL	32
6.3	Théorie de WEISSKOPF-WIGNER	35
7	Détection de photons	37
7.1	Règle d'or de FERMI : transition entre un état discret et un continuum	37
7.2	Effet photoélectrique avec un champ classique	39
7.3	Effet photoélectrique avec un champ quantique	40
7.4	Lame séparatrice	42
7.5	Interférométrie	44
7.6	Détection homodyne	46
7.7	Détection de deux photons	48
7.8	Champs électriques pulsés	51
7.9	Impulsions de photon unique	53
7.10	Bruit de détection et précision dans un interféromètre	55

1 Rayonnement du corps noir

Un corps noir est une cavité fermée de volume V contenant un gaz de photons en équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T . Dans ce système, les atomes de la paroi émettent un rayonnement électromagnétique qui dépend uniquement de la température de cette paroi. Le spectre de ce rayonnement est continu et sa répartition spectrale est donnée par la loi de PLANCK.

1.1 Approche de RAYLEIGH

Dans un article de 1900, RAYLEIGH donne une explication pour comprendre le comportement du rayonnement du corps noir à basses fréquences. L'idée principale est de traiter les modes du champ électromagnétique comme des oscillateurs harmoniques. De tels oscillateurs ont deux degrés de liberté dont l'énergie moyenne vaut $\frac{k_B T}{2}$ à l'équilibre thermodynamique².

Chaque oscillateur possède alors une énergie $k_B T$ et pour déterminer l'énergie totale du rayonnement dans la cavité à une fréquence donnée, nous devons calculer la densité de modes $\rho(\omega)d\omega$ dans un intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$. Nous pouvons donc calculer la densité d'énergie par unité de volume et par unité de fréquence

$$u(\omega) = \frac{1}{V} k_B T \rho(\omega) \quad (1)$$

Pour une particule libre (ici le photon) en supposant des conditions limites périodiques dans la cavité, nous pouvons montrer que la densité d'états en vecteur d'onde s'écrit

$$\rho(\vec{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad (2)$$

En écrivant $\rho(\vec{k})d^3k = 4\pi k^2 \rho(k)dk = \rho(\omega)d\omega$ et en sachant que $\omega = kc$ et que le photon possède deux états de polarisation³, on trouve

$$\rho(\omega) = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (3)$$

On obtient finalement

Formule de Rayleigh-Jeans

$$u(\omega) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \quad (4)$$

Cette formule est valable à basses fréquences, $u(\omega)$ est en $J.m^{-3}.Hz^{-1}$.

2. En utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie.
3. On a donc un facteur 2 dû à la dégénérescence.

1.2 Approche de PLANCK

La théorie électromagnétique est valide à des hautes fréquences et donc la somme sur tous les modes de la densité d'énergie de RAYLEIGH-JEANS diverge. Si l'on suppose qu'un mode du champ électromagnétique est un oscillateur harmonique quantique, la loi de BOLTZMANN stipule que la probabilité d'occuper un état d'énergie $\hbar\omega n$ à une température T est

$$p_n = C e^{-\frac{\hbar\omega n}{k_B T}} \quad (5)$$

où $C = 1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$ est un facteur de normalisation. Le nombre moyen d'occupation est alors⁴

$$\bar{n} = \sum n p_n = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (6)$$

L'énergie moyenne des oscillateurs est alors $\bar{n}\hbar\omega$ et cette quantité doit remplacer $k_B T$ dans la formule de RAYLEIGH-JEANS. On a dans ce cas

Loi de Planck

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (7)$$

Cette formule est valable pour toutes fréquences, $u(\omega)$ est en $J.m^{-3}.Hz^{-1}$

Le succès de cette loi, dont la formule de RAYLEIGH-JEANS n'est qu'une approximation, était une indication claire de l'existence de "quanta" de champ électromagnétique, objets que nous appelons photons aujourd'hui.

1.3 Approche d'EINSTEIN

Après l'introduction du modèle de l'atome dont les niveaux d'énergie ont été quantifiés, un modèle d'interaction entre lumière et l'atome quantifié fût introduit. L'idée d'EINSTEIN, publiée dans le fameux [article de 1917](#)⁵, a été de considérer des atomes quantifiés. Par simplicité, nous supposons que ces atomes sont des systèmes à deux états $|f\rangle$ et $|e\rangle$. Nous définissons $\hbar\omega_0$ l'écart en énergie entre ces deux états. L'atome peut changer de niveaux d'énergie selon trois processus :

- absorption, transition de $|f\rangle$ vers $|e\rangle$ avec un taux $B_{f,e}u(\omega_0)$;
- émission stimulée, transition de $|e\rangle$ vers $|f\rangle$ avec un taux $B_{e,f}u(\omega_0)$;
- émission spontanée, transition de $|e\rangle$ vers $|f\rangle$ avec un taux A .

4. On somme sur toutes les énergies.

5. Les premières pages sont faciles à comprendre.

Les deux premiers processus ont des taux proportionnels à la densité d'énergie à la fréquence de résonance de l'atome tandis que le troisième processus est indépendant de la présence d'un quelconque rayonnement irradiant l'atome. Dans ce modèle, nous ne quantifions pas le rayonnement.

L'existence de ces processus mènent aux équations de BLOCH optiques pour les populations des deux états considérés. Nous définissons les populations $\sigma_i = N_i/N_{tot}$, où N_i est le nombre d'atomes dans l'état i et N_{tot} est le nombre total d'atomes. Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_f = -B_{f,e}u(\omega_0)\sigma_f + B_{e,f}u(\omega_0)\sigma_e + A\sigma_e \\ \dot{\sigma}_e = -\dot{\sigma}_f \end{cases} \quad (8)$$

Nous n'avons pas émis d'hypothèse sur la nature du rayonnement ni son spectre jusqu'ici. Nous émettons simplement l'hypothèse que les atomes sont en équilibre thermodynamique avec le rayonnement à la température T . Cette hypothèse conduit au fait que le processus doit être considéré stationnaire ($\dot{\sigma}_f = \dot{\sigma}_e = 0$) et que les populations doivent être distribuées selon une loi de BOLTZMANN $\frac{\sigma_e}{\sigma_f} = e^{\frac{-\hbar\omega_0}{k_B T}}$. De simples manipulations conduisent à

$$u(\omega_0) = \frac{A}{B_{f,e}e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - B_{e,f}} \quad (9)$$

La condition $u(\omega_0) \rightarrow \infty$ lorsque $T \rightarrow \infty$ impose $B_{f,e} = B_{e,f} = B$. La fonction $u(\omega_0)$ a alors la même forme que la loi de PLANCK. Nous oublions l'indice sur ω_0 car le raisonnement fait est valable pour n'importe quelle valeur de ω_0 . Nous obtenons la forme exacte de la loi de PLANCK si l'on écrit $A = B \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$.

Ce résultat a été démontré simplement en supposant un équilibre thermodynamique entre un champ radiatif et un atome avec des niveaux d'énergie discrets.

Les photons n'interagissant pas entre eux, un gaz de photons est un système avec un volume et une température fixés mais avec un nombre de particules non fixé. Il en découle qu'un gaz de photons possède un potentiel chimique nul ce qui amène BOSE en 1920 à introduire la distribution de BOSE-EINSTEIN qui se généralise aux bosons. Cette statistique peut être mise en évidence seulement avec une hypothèse d'équilibre thermodynamique et la quantification de la matière (les atomes).

Statistique de Bose-Einstein

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (10)$$

\bar{n} (#photons/mode) est le nombre moyen de photons dans un mode du rayonnement à la température T et à la pulsation ω .

2 Oscillateur harmonique quantique

Nous faisons ici un bref rappel sur l'oscillateur harmonique quantique, indispensable pour le cours qui suit. Considérons le hamiltonien d'un oscillateur harmonique de pulsation ω suivant ⁶

Hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 \quad (11)$$

2.1 Variables réduites

Afin de généraliser le problème et d'utiliser des variables adimensionnées, nous passons aux variables réduites par changement d'observables.

Variables réduites

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{q} \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \quad (12)$$

avec $[\hat{Q}, \hat{P}] = i$. Nous obtenons le hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{Q}^2 + \hat{P}^2) \quad (13)$$

Nous utilisons volontairement la notation habituelle de coordonnées généralisées car (\hat{q}, \hat{p}) ne correspondent pas toujours à la position et à l'impulsion. Nous verrons que dans le cas du champ électrique, ces variables désignent les quadratures du champ.

2.2 Opérateurs d'annihilation et de création

La résolution du problème (trouver les vecteurs propres et valeurs propres de cet hamiltonien) par une approche algébrique est simplifiée par l'introduction des opérateurs suivants

6. Nous considérons un oscillateur harmonique unidimensionnel.

Opérateurs d'annihilation et de création

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} + i\hat{P}) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q} - i\hat{P}) \quad (14)$$

avec $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Si l'on inverse le système on a

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (15)$$

Ces opérateurs jouent un rôle crucial dans toute la suite de ce cours. Nous définissons également l'opérateur nombre

Opérateur nombre

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (16)$$

L'opérateur nombre est hermitien, c'est donc une observable. Dans ce cas, le hamiltonien s'écrit plus facilement

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2) \quad (17)$$

Les opérateurs nombre, d'annihilation et de création satisfont les relations de commutation suivantes⁷

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (18)$$

Notons $|n\rangle$ les vecteurs propres de \hat{N} dont les valeurs propres sont notées n . Nous montrons par la suite que n est un entier positif et trouvons les fonctions propres du hamiltonien projetées sur la base des positions $\phi_n(Q)$.

On considère le module du vecteur $\hat{a}|n\rangle$. Par définition, cette quantité est positive. Ainsi, nous avons $\|\hat{a}|n\rangle\|^2 \geq 0$. D'autre part, nous avons $\|\hat{a}|n\rangle\|^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{N}|n\rangle = \langle n|n|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n$. Ainsi, nous avons démontré que $n \geq 0$.

Avec les relations de commutation entre \hat{N} , \hat{a} et \hat{a}^\dagger , nous montrons facilement que $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle$ et $\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$. Ce résultat est à l'origine de l'appellation opérateurs d'annihilation et de création.

Les équations précédentes montrent que $\hat{a}|n\rangle = \alpha_n|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \beta_n|n+1\rangle$. Nous choisissons α_n et β_n réels.

7. Laissé en exercice.

On a $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle = \alpha_n \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \alpha_n \beta_{n-1} |n\rangle$. D'où $\alpha_n \beta_{n-1} = n$. On en déduit que $\alpha_n = \sqrt{n}$ et $\beta_n = \sqrt{n+1}$. Ainsi,

Valeurs propres de \hat{a} et \hat{a}^\dagger

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (19)$$

À partir de l'équation aux valeurs propres de \hat{a} , nous obtenons (en itérant) $\hat{a}^n |n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots 1} |0\rangle$ et donc $\hat{a}^{n+1} |n\rangle = \sqrt{n(n-1)\dots -1} |-1\rangle$. Ceci est impossible (la quantité dans la racine est négative) donc on en déduit que n est un entier. Finalement, $n \in \mathbb{N}$.

2.3 États propres

Nous allons trouver la fonction en position de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Nous savons que $\langle Q | \hat{P} = -i \frac{d}{dQ}$ (\hat{P} agit comme une dérivée spatiale en représentation position). En écrivant $\hat{a} |0\rangle = 0$, nous avons l'équation différentielle suivante

$$(\hat{Q} + i\hat{P}) |0\rangle = 0 \quad (20)$$

Puis en représentation position

$$Q\phi_0(Q) + \frac{d\phi_0}{dQ}(Q) = 0 \quad (21)$$

Cette équation se résout en ⁸

État fondamental de l'oscillateur harmonique

$$\phi_0(Q) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{Q^2}{2}} \quad (22)$$

Pour obtenir le premier niveaux excité, nous utilisons $\hat{a} |1\rangle = |0\rangle$ puis en connaissant ϕ_0 , nous pouvons résoudre cette équation différentielle. Pour déterminer ϕ_n , il faut alors procéder par itération.

3 Quantification du champ électrique

Nous souhaitons ici trouver un moyen d'exprimer les champs électrique et magnétique comme des observables correspondant à des opérateurs hermitiens ⁹ (\hat{E} , \hat{B}) agissant sur

8. La constante se trouve en normalisant la fonction d'onde $\int \phi_0^2(Q) dQ = 1$.

9. La condition d'hermiticité doit être vérifiée car les champs électrique et magnétique peuvent être mesurés.

un espace de HILBERT où les vecteurs d'état $|\psi\rangle$ décrivent l'état du champ. Nous rappelons que lors d'une expérience, nous n'observons pas d'opérateurs ni de vecteurs d'état mais seulement des probabilités ou des valeurs moyennes comme $\langle\psi|\hat{E}|\psi\rangle$. L'introduction de cette description est principalement justifiée par son succès à prédire les résultats expérimentaux.

Pour quantifier le rayonnement sachant que le champ électromagnétique est solution d'une équation d'onde, la première idée est qu'un mode de ce champ doit posséder le comportement d'un oscillateur harmonique. Cette intuition vient aussi du fait que les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique sont espacés d'une quantité fixe $\hbar\omega$ que l'on identifie à un échange quantifié d'énergie¹⁰.

3.1 Champ électrique classique

Considérons d'abord le cas classique. Plaçons nous dans une boîte de volume $V = L^3$ avec des conditions limites périodiques (le vecteur d'onde est alors quantifié $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ selon les trois directions de l'espace) et considérons un unique mode d'un champ électromagnétique sous forme d'onde plane à la fréquence ω se propageant selon \mathbf{k} .

Champs électrique et magnétique classique

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}E_0e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} + c.c. \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}}{k}E_0e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} + c.c. \end{cases} \quad (23)$$

avec $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$

Le symbole *c.c.* veut dire complexe conjugué. Nous avons choisi cette écriture car c'est cette dernière qui va correspondre au cas quantique. Le vecteur de polarisation \mathbf{e} est orthogonal à la direction de propagation et s'inscrit dans un plan perpendiculaire à \mathbf{k} . Pour une onde se propageant dans la direction de z , nous pouvons écrire \mathbf{e} en termes de vecteurs unitaires

$$\mathbf{e} = \epsilon_x\mathbf{e}_x + \epsilon_y\mathbf{e}_y \quad (24)$$

Pour des valeurs réelles de ϵ_x et ϵ_y , nous avons une polarisation linéaire. Pour

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \quad (25)$$

nous obtenons une polarisation circulaire. Par soucis de simplicité, nous supposons que le champ électromagnétique se propage selon z et nous notons

¹⁰. Ces quanta de champ électrique sont par la suite appelés photons, surtout suite au traitement d'EINSTEIN de l'interaction matière-rayonnement.

$$\begin{cases} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{e}_x (ce^{i(kz-\omega t)} - c^* e^{-i(kz-\omega t)}) \\ \mathbf{B} = ik \mathbf{e}_y (ce^{i(kz-\omega t)} - c^* e^{-i(kz-\omega t)}) \end{cases} \quad (26)$$

L'idée est de remplacer l'énergie de ce champ par un oscillateur harmonique quantique et d'identifier les différents termes. L'énergie classique de ce champ électromagnétique en négligeant les termes oscillant à 2ω s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \int dV (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) = 2V \epsilon_0 \omega^2 c c^* \quad (27)$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} 2\omega \sqrt{V \epsilon_0} c = \omega \sqrt{m} q + i \frac{p}{\sqrt{m}} \\ 2\omega \sqrt{V \epsilon_0} c^* = \omega \sqrt{m} q - i \frac{p}{\sqrt{m}} \end{cases} \quad (28)$$

On trouve¹¹ le hamiltonien d'un oscillateur harmonique pour l'instant classique

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{m} + m\omega^2 q^2 \right) \quad (29)$$

Il faut avoir en tête que q et p sont la position et l'impulsion d'un oscillateur fictif. Si l'on fait le même calcul pour deux modes d'énergie H_1 et H_2 , nous allons trouver que l'énergie totale du champ est la somme des énergies des deux modes $H = H_1 + H_2$.

3.2 Quantification d'un mode du champ électrique

Afin de quantifier le champ, nous remplaçons q par \hat{q} et p par \hat{p} avec $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Passons aux variables sans dimension¹² \hat{Q} et \hat{P} et introduisons les opérateurs d'annihilation et de création \hat{a} et \hat{a}^\dagger .

Nous obtenons finalement

Champs électrique et magnétique quantique

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{E}} = i\mathbf{e}_x E_0 (\hat{a} e^{i(kz-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(kz-\omega t)}) \\ \hat{\mathbf{B}} = \frac{i}{c} \mathbf{e}_y E_0 (\hat{a} e^{i(kz-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(kz-\omega t)}) \end{cases} \quad (30)$$

avec $E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$. Nous obtenons alors pour un mode

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (31)$$

11. Le calcul est laissé en exercice.

12. Voir le rappel sur l'oscillateur harmonique quantique.

Comme vu précédemment, les opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger augmentent ou diminuent le nombre d'excitations dans l'oscillateur (ou le champ). Nous avons alors une nouvelle image à se faire du champ électromagnétique. Il est présent partout et est peuplé par endroit par des quanta $\hbar\omega$.

L'état d'un unique mode peut être exprimé comme superposition des états propres du hamiltonien (états de FOCK $|n\rangle$). Connaissant un état arbitraire $|\psi\rangle$, nous pouvons alors déterminer des grandeurs comme $\langle \hat{E} \rangle$ (valeur moyenne du champ électrique) ou $\langle \hat{H} \rangle$ (énergie moyenne du champ électromagnétique).

La contribution $\hbar\omega/2$ de l'hamiltonien s'appelle le point d'énergie zéro du champ électromagnétique et fait que l'écart-type (ou variance) du champ non excité ($n = 0$) n'est pas nul (le vide fluctue). De plus, la précédente écriture du champ permet d'écrire des opérateurs hermitiens que l'on peut séparer en une contribution qui contient les fréquences positives $\hat{E}^{(+)}$ s'exprimant avec l'opérateur d'annihilation \hat{a} et une contribution qui contient les fréquences négative $\hat{E}^{(-)}$ s'exprimant avec l'opérateur de création \hat{a}^\dagger .

Champ électrique selon les fréquences positives et négatives

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \quad (32)$$

avec $\hat{\mathbf{E}}^{(+)} = \hat{\mathbf{E}}^{(-)\dagger}$.

3.3 Quadratures du champ

Nous rappelons que les opérateurs \hat{Q} et \hat{P} ne sont pas la position et l'impulsion du champ électromagnétique mais la position et l'impulsion d'un oscillateur fictif correspondant au champ.

Les opérateurs \hat{Q} et \hat{P} ont cependant une interprétation claire en termes de champ électromagnétique. En effet, nous pouvons écrire

Quadratures du champ

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_x i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} (\hat{Q} \sin(kz - \omega t) + \hat{P} \cos(kz - \omega t)) \quad (33)$$

Ainsi, \hat{Q} et \hat{P} correspondent aux deux quadratures du champ qui possède une amplitude $\sqrt{Q^2 + P^2}$ et une phase $\cos \phi = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + P^2}}$.

Dans un plan de FRESNEL¹³ (Q, P), la norme du vecteur est l'amplitude du champ et

13. On a $Q = \langle \hat{Q} \rangle$ et $P = \langle \hat{P} \rangle$.

l'angle qu'il fait avec l'axe des abscisses est sa phase. Nous verrons par la suite comment déterminer expérimentalement les quadratures du champ. Gardez en tête que connaître Q et P permet d'avoir à la fois l'amplitude du champ ainsi que la phase du champ. Bien évidemment, le champ électrique maintenant est quantique donc les quadratures vérifient la relation d'incertitude (qui se traduit par une incertitude sur l'amplitude et la phase)

$$\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} \geq \frac{1}{2} \quad (34)$$

3.4 Champs multimodes

Pour les mêmes raisons que dans le cas classique, les différents modes du champ électromagnétique contribuent de manière indépendantes au hamiltonien sous forme d'oscillateurs harmoniques. La procédure de quantification développée précédemment peut facilement se généraliser au cas multimode.

Champ électrique multimode

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{k,s} i\mathbf{e}_s \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a}_{k,s} e^{i(kz-\omega t)} - \hat{a}_{k,s}^\dagger e^{-i(kz-\omega t)}) \quad (35)$$

avec $\omega_k = kc$ et où la somme porte sur les différents modes k et les deux polarisations \mathbf{e}_s . Nous avons alors une énergie totale de tous les modes

$$\hat{H} = \sum_{k,s} \hbar\omega_k (\hat{a}_{k,s}^\dagger \hat{a}_{k,s} + \frac{1}{2}) \quad (36)$$

L'indépendance des oscillateurs est assurée par le fait que les opérateurs correspondant à des modes différents commutent

$$[\hat{a}_{k,s}, \hat{a}_{k',s'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \delta_{s,s'} \quad (37)$$

Un état multimode peut être exprimé en termes d'états de chaque mode $|\psi\rangle = |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle$ et plus généralement comme combinaison linéaire de ces derniers

$$|\psi\rangle = \sum_{k_1, k_2, \dots} c_{k_1, k_2, \dots} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle \quad (38)$$

4 États du champ électrique

Nous devons à présent spécifier l'état approprié pour un champ électromagnétique. La quantification d'un système de bosons a été faite par FOCK. L'espace de HILBERT correspondant est appelé espace de FOCK dont les vecteurs de base sont les états de FOCK $\{|n\rangle\}$ (aussi appelés états nombres). Comme tous les champs sont écrits comme superposition de modes indépendants, nous pouvons construire des états pour chaque

mode et à partir de cela obtenir des états pour par exemple un champ multimode ou un champ purement quantique.

Afin de simplifier l'écriture, nous oublions la polarisation du champ électrique et nous supposons le champ à la position $z = 0$. Ainsi, nous considérons dans la suite un champ de la forme

$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \quad (39)$$

Gardez en tête que parfois nous avons besoin d'inclure une phase due à la propagation de ce champ.

4.1 États nombres et vide quantique

Comme l'énergie d'un mode du champ est un hamiltonien d'un oscillateur harmonique quantique, les différents modes sont décrits par les états propres de cet hamiltonien : les états nombres $|n\rangle$. L'entier positif n désigne le nombre de "quanta" (ou de photons) dans le mode considéré. Par exemple, un état $|1\rangle$ est un mode ne contenant qu'un photon.

Bien que le vide $|n = 0\rangle$ est l'état fondamental du champ, nous voyons ici qu'il n'est pas "vide". Son énergie est $\hbar\omega/2$. Nous pouvons utiliser l'opérateur champ électrique pour déterminer la valeur moyenne du champ (son amplitude mesurée)

$$\langle 0 | \hat{E} | 0 \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}(\langle 0 | \hat{a} | 0 \rangle e^{-i\omega t} - \langle 0 | \hat{a}^\dagger | 0 \rangle e^{i\omega t}) = 0 \quad (40)$$

Par contre, $\langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle \neq 0$. En effet ¹⁴,

$$\langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(\hat{a}^2 e^{-2i\omega t} + \hat{a}^{2\dagger} e^{2i\omega t} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \quad (41)$$

et donc

$$(\Delta\hat{E})^2 = \langle 0 | \hat{E}^2 | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{E} | 0 \rangle^2 = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \quad (42)$$

Cela veut dire que le vide quantique est une quantité qui fluctue avec une moyenne nulle. Pour les autres états nombres, nous avons un comportement similaire

$$\langle n | \hat{E} | n \rangle = 0 \quad (\Delta\hat{E})^2 = \frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}(n + 1/2) \quad (43)$$

Les états $|n\rangle$ représentent des états du champ à n photons. Le champ moyen pour ces états est nul. Ceci est en accord avec le principe d'incertitude car l'opérateur nombre \hat{N} ne commute pas avec le champ \hat{E} . Si le champ était parfaitement connu, alors le nombre de photons dans un mode du champ serait incertain. Il y a ici un lien avec la notion de phase d'un champ électrique. En physique classique, l'amplitude et la phase d'un champ peuvent être bien définies simultanément. Ce n'est pas le cas en physique quantique. Tout

14. \hat{a} et \hat{a}^\dagger ne commutent pas.

comme l'énergie est conjuguée au temps et la position à l'impulsion (par des relations de type FOURIER), le nombre de photons est conjugué à la phase du champ.

Nous pouvons montrer que la variance (fluctuation) du nombre de photons dans un unique mode d'un champ thermique est

$$(\Delta n)^2 = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle \quad (44)$$

où $\langle n \rangle$ est le nombre moyen de photons¹⁵. Ainsi, les fluctuations d'un gaz de photons est amplifié par rapport au cas classique : on parle d'amplification bosonique.

4.2 États cohérents

En physique classique, nous avons des champs très bien définis aussi bien en amplitude qu'en phase. Ainsi, il est naturel d'identifier le champ classique par la valeur moyenne du champ quantique dans un état donné. Cependant, nous avons vu que la valeur moyenne du champ dans un état nombre est nulle. Les états nombres ne peuvent donc pas représenter des champs avec une amplitude et une phase bien définies (le laser est un bon exemple d'un tel champ). Comme le champ électrique s'exprime en termes de \hat{a} et \hat{a}^\dagger , il est naturel de chercher les états propres et les valeurs propres de ces opérateurs. Ces états sont appelés états cohérents. Comme \hat{a} n'est pas hermitien, sa valeur propre est complexe.

États cohérents

Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont les états propres de \hat{a} dont la valeur propre α est complexe.

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad \langle \alpha | \hat{a}^\dagger = \langle \alpha | \alpha^* \quad (45)$$

Ils s'expriment comme combinaisons linéaires des états nombres

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (46)$$

Les états cohérents ne sont pas orthogonaux. La valeur moyenne du champ électrique dans un état cohérent $|\alpha\rangle$ où l'on note $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$ est

$$\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\alpha e^{-i\omega t} - \alpha^* e^{i\omega t}) = 2 \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} |\alpha| \sin(\omega t - \phi) \quad (47)$$

Avec un état cohérent, nous obtenons un comportement classique du champ électrique.

15. On rappelle que l'opérateur nombre \hat{N} est hermitien et que sa valeur moyenne $\langle \psi | \hat{N} | \psi \rangle$ donne le nombre moyen de photons dans l'état $|\psi\rangle$.

L'intensité du champ électrique (ou nombre moyen de photons dans le champ électrique), proportionnelle¹⁶ à $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, est alors

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 \quad (48)$$

L'expression explicite d'un état cohérent nous permet d'obtenir la distribution du nombre de photons (la probabilité de détecter n photons pour une mesure du nombre de photons dans le champ électrique).

Distribution du nombre de photons d'un état cohérent

$$\mathbb{P}_{n,|\alpha\rangle} = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (49)$$

On obtient une loi de POISSON.

Pour $|\alpha| \gg 1$, cette distribution approche une loi gaussienne, sinon elle est asymétrique par rapport à sa moyenne. Tout comme le bruit de grenaille (le bruit de la pluie qui tape contre la fenêtre), les photons dans un état cohérent sont en quelque sorte indépendants.

Nous résumons les éléments importants dans l'encadré qui suit (certains résultats sont laissés en exercices).

16. L'intensité du champ est $I = \langle \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle$

Résultats statistiques des états cohérents

Le nombre moyen de photons dans le champ se détermine en évaluant la moyenne de \hat{N} .

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (50)$$

Nous avons aussi

$$\langle \hat{N}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \langle \hat{N} \rangle^2 + \langle \hat{N} \rangle \quad (51)$$

Ce qui permet de calculer les fluctuations du nombre de photons

$$(\Delta \hat{N})^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = \langle \hat{N} \rangle \quad (52)$$

Ce résultat est caractéristique d'une loi de POISSON. Notons que l'incertitude relative sur le nombre de photons est

$$\frac{\Delta \hat{N}}{\langle \hat{N} \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}} = \frac{1}{|\alpha|} \quad (53)$$

Nous pouvons aussi calculer les deux quadratures du champ électrique \hat{Q} et \hat{P} . Les résultats sont laissés en exercice.

Quadratures des états cohérents

$$Q = \langle \alpha | \hat{Q} | \alpha \rangle = \frac{Re(\alpha)}{\sqrt{2}} \quad P = \langle \alpha | \hat{P} | \alpha \rangle = \frac{Im(\alpha)}{\sqrt{2}} \quad (54)$$

$$\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = \frac{1}{2} \quad (55)$$

L'expression en termes de quadratures permet de représenter l'état du champ dans un plan (Q, P) . Un état cohérent $|\alpha|e^{i\phi}$ peut être représenté par un vecteur de longueur $|\alpha|$ et faisant un angle ϕ avec l'axe des Q . Le fait que \hat{Q} et \hat{P} vérifient la relation d'incertitude est exprimé par un cercle de rayon $1/2$ dessiné par le bout du vecteur (on a une incertitude sur l'extrémité du vecteur qui crée une incertitude sur l'amplitude du champ et sa phase). Le vide est aussi décrit par un cercle centré à l'origine. Pour cette raison, certains qualifient un état cohérent de "vide déplacé".

4.3 États comprimés ("squeezed states")

La représentation d'un état dans un espace des phases (Q, P) peut être généralisée à n'importe quelle état quantique.

Hamiltonien non-linéaire

L'idée générale est de produire par interaction non-linéaire un état dont la relation d'incertitude ne se traduit plus par un cercle dans l'espace des phases mais par une ellipse (par exemple on enlève un peu d'incertitude selon Q pour la mettre sur P). De tels états s'appellent états comprimés de la lumière ("squeezed states"). Ils sont produit par une interaction non-linéaire (par exemple un cristal) dont le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = i\hbar g(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}_p - \hat{a}^2\hat{a}_p^{\dagger}) \quad (56)$$

où \hat{a}_p correspond au champ du laser pompe à 2ω qui entre dans le cristal et \hat{a} correspond au champ produit à ω (c'est celui qui nous intéresse). On suppose (et c'est en pratique le cas) que le laser pompe est un état cohérent $|\alpha\rangle$ donc on peut remplacer \hat{a}_p et \hat{a}_p^{\dagger} par leurs valeurs moyennes α_p et α_p^* (on moyenne cet hamiltonien $\hat{H} \rightarrow \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle$). Ainsi, nous avons

$$\hat{H} = i\hbar g(\hat{a}^{\dagger 2}\alpha_p - \hat{a}^2\alpha_p^*) \quad (57)$$

Partant d'un état $|\psi(0)\rangle$ à l'instant initial, l'état évolue en $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi(0)\rangle$.

Calcul des quadratures de l'état comprimé

Nous cherchons par la suite à exprimer Q et P .

Notons $\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2 - \xi\hat{a}^{\dagger 2})}$. On a $\hat{S}(-\xi) = \hat{S}^{\dagger}(\xi)$ d'où $\hat{S}\hat{S}^{\dagger} = 1$ (\hat{S} est unitaire).

Si l'on note $\xi = re^{i\theta}$, le lemme de BAKER-HAUSDORF stipule¹⁷ que

$$\begin{cases} \hat{S}^{\dagger}\hat{a}\hat{S} = \hat{a}ch(r) - \hat{a}^{\dagger}e^{i\theta}sh(r) \\ \hat{S}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}\hat{S} = \hat{a}^{\dagger}ch(r) - \hat{a}e^{-i\theta}sh(r) \end{cases} \quad (58)$$

On choisit comme état initial le vide $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Ce choix est justifié par le fait que le vide est représenté par un cercle centré sur l'origine dans l'espace des phases et l'idée est de déformer ce cercle (même si ce choix n'a pas été apprécié en cours d'un point de vue expérimental car on détecte le "vide" et que la propagation d'un tel état dans un montage optique n'est pas idéologiquement concevable...). On a alors $|\psi(t)\rangle = |\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle$.

On peut calculer les valeurs moyennes de \hat{a} et \hat{a}^2 dans le but calculer $(\Delta\hat{Q})^2$ et $(\Delta\hat{P})^2$ et ainsi représenter l'état $|\xi\rangle$ dans l'espace des phases. On a

$$\langle\xi|\hat{a}|\xi\rangle = \langle 0|\hat{S}^{\dagger}\hat{a}\hat{S}|0\rangle = \langle 0|(\hat{a}ch(r) - \hat{a}^{\dagger}e^{i\theta}sh(r))|0\rangle = 0 \quad (59)$$

17. On pourra s'amuser à montrer ce résultat.

De même pour $\langle \xi | \hat{a}^\dagger | \xi \rangle$. On a aussi ¹⁸

$$\langle \xi | \hat{a}^2 | \xi \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = -e^{-i\theta} sh(r) ch(r) \quad (60)$$

Ainsi, on a

$$Q = \langle \xi | \hat{Q} | \xi \rangle = 0 \quad P = \langle \xi | \hat{P} | \xi \rangle = 0 \quad (61)$$

et

$$\begin{cases} (\Delta \hat{Q})^2 = \frac{1}{2} (ch^2(r) + sh^2(r) - 2sh(r)ch(r) \cos(\theta)) \\ (\Delta \hat{P})^2 = \frac{1}{2} (ch^2(r) + sh^2(r) + 2sh(r)ch(r) \cos(\theta)) \end{cases} \quad (62)$$

que l'on réécrit

$$\begin{cases} (\Delta \hat{Q})^2 = \frac{1}{4} ((e^{2r} + e^{-2r}) - (e^{2r} - e^{-2r}) \cos(\theta)) \\ (\Delta \hat{P})^2 = \frac{1}{4} ((e^{2r} + e^{-2r}) + (e^{2r} - e^{-2r}) \cos(\theta)) \end{cases} \quad (63)$$

Ainsi, nous pouvons représenter l'état comprimé $|\xi\rangle$ dans le plan (Q, P) .

Avec $\theta = 0$, on obtient

$$\begin{cases} \Delta \hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-r} \\ \Delta \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^r \end{cases} \quad (64)$$

L'état est allongé verticalement. Pour $\theta = \pi$, l'état est allongé horizontalement. Remarquons que nous avons toujours $\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = 1/2$, nous avons simplement déséquilibré l'incertitude entre Q et P . Pour le côté expérimental, allez voir les notes de JFR. Retenez qu'on détecte cet état (on mesure Q et P ce qui nous permet d'obtenir l'amplitude et la phase du champ) par détection homodyne, méthode présentée par la suite.

Probabilité de détecter n photons dans le vide comprimé

À partir des résultats précédents, nous pouvons calculer la probabilité de détecter n photons dans le vide comprimé lors d'une mesure du nombre de photons. Nous avons

$$\mathbb{P}_{n,|\xi\rangle} = |\langle n | \xi \rangle|^2 = |\langle n | \hat{S}(\xi) | 0 \rangle|^2 \quad (65)$$

En écrivant $\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})}$ comme une série en développant l'exponentielle : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})^k$, on s'aperçoit que si n est impair, cette probabilité est nulle. De façon plus générale, nous pouvons montrer ¹⁹ que pour $n \in \mathbb{N}$

18. Le calcul est à faire.

19. Si quelqu'un est chaud pour faire le calcul afin de vérifier si le résultat est correct, qu'il se lance...

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{2n+1,|\xi\rangle} = 0 \\ \mathbb{P}_{2n,|\xi\rangle} = \binom{2n}{n} \frac{1}{ch(r)} \left(\frac{1}{2} th(r) \right)^{2n} \end{cases} \quad \text{pour } \theta = 0 \quad (66)$$

De manière intuitive, les photons viennent par paire. Lorsqu'on regarde la forme du hamiltonien, nous pouvons concevoir que un photon à 2ω du laser pompe se convertit en deux photons à ω dans le champ sortant (et inversement pour la partie hermitique conjuguée). Le changement de fréquence est caractéristique d'un processus d'optique non-linéaire, que l'on peut voir dans la forme du hamiltonien (présence de \hat{a}^2).

Calcul de l'énergie moyenne d'un état comprimé

Il est tout de même intéressant de calculer l'énergie du champ électromagnétique dans un état de vide comprimé. Rappelons tout d'abord que pour le vide $|0\rangle$, nous avons $\langle \hat{H} \rangle = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \hbar\omega \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2 | 0 \rangle = \hbar\omega/2$.

Pour un état de vide comprimé, le même calcul donne²⁰

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle \\ &= \hbar\omega \langle 0 | \hat{S}^\dagger (\hat{N} + 1/2) \hat{S} | 0 \rangle \\ &= \hbar\omega \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle + \hbar\omega \\ &= \hbar\omega/2 + s\hbar^2(r)\hbar\omega \end{aligned} \quad (67)$$

On peut voir par ailleurs que pour $r = 0$ (donc $\xi = 0$) nous obtenons l'énergie du vide. Donc partant de l'état vide quantique, cet état n'évolue pas. Ce qui est confirmé car dans ce cas le hamiltonien d'interaction est nul.

Si l'on ne souhaite connaître que l'essentiel, l'encadré ci-dessous rassemble les points importants des états comprimés.

20. On utilise le fait que $\hat{S}\hat{S}^\dagger = 1$.

États comprimés

Les états comprimés sont générés par une interaction non-linéaire décrite par un hamiltonien du type

$$\hat{H} = i\hbar g(\hat{a}^{\dagger 2}\alpha_p - \hat{a}^2\alpha_p^*) \quad (68)$$

Partant de l'état vide $|0\rangle$, nous pouvons montrer que cet état évolue en un état comprimé

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi) |0\rangle = e^{\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})} |0\rangle = |0\rangle + \xi |2\rangle + \frac{\xi^2}{2} |4\rangle \dots \quad (69)$$

L'état $|\xi\rangle$ décrit une ellipse dans l'espace des phases (Q, P) au lieu d'un cercle (cas de $|0\rangle$ ou d'un état cohérent). Une des deux quadratures du champ cède de la variance (de l'incertitude) à l'autre quadrature, contrairement au vide ou à un état cohérent où l'incertitude est également répartie. Utilisés de façon astucieuse, de tels états peuvent permettre de réduire le bruit dans une mesure interférométrique.

5 Interaction champ-matière

Afin de rendre cette théorie applicable en laboratoire, nous devons décrire comment le champ électrique quantique décrit précédemment peut être détecté. Ce champ est détecté via son interaction avec des atomes et c'est pourquoi nous voyons maintenant comment ce champ interagit avec la matière.

5.1 Dipôle électrique

On considère un atome possédant un électron lié au noyau par un potentiel coulombien. Le noyau est fixé en $\mathbf{r} = 0$. Lorsque l'on éclaire l'atome par une onde plane d'un champ électrique monochromatique, on admet (on peut toutefois le montrer par un choix de Jauge particulier²¹) que l'on remplace l'impulsion de l'électron $\hat{\mathbf{p}}$ par $\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}$ où q est la charge et \mathbf{A} le potentiel vecteur.

En négligeant le terme quadratique devant le terme linéaire lorsque l'on développe le hamiltonien d'interaction et en supposant que le champ électrique est uniforme sur la taille de l'atome (ceci est correct si la longueur d'onde du champ est très grande devant la taille caractéristique de l'atome), on obtient le hamiltonien dit d'interaction dipolaire.

21. Voir cours de symétries et intégrales de chemin.

$$\hat{H} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \quad (70)$$

où $\hat{\mathbf{D}} = q\hat{\mathbf{r}}$ est l'opérateur dipôle de l'électron dans l'atome et $\hat{\mathbf{E}}$ est l'opérateur champ électrique (que l'on peut aussi considérer classique).

Ce terme dipolaire est le premier terme d'un développement dit multipolaire²² qui s'obtient en faisant un développement du potentiel vecteur autour de l'origine au lieu de juste prendre sa valeur à l'origine.

5.2 Théorie des perturbations dépendantes du temps

Nous donnons dans cette partie une méthode générale pour résoudre le problème d'un hamiltonien avec un terme de perturbation. Cette méthode perturbative va nous permettre de déterminer les états propres et valeurs propres (énergies) d'un tel système. Concrètement, le hamiltonien à résoudre est la somme du hamiltonien de l'atome auquel on ajoute une perturbation, ici un terme dipolaire correspondant au champ électrique. Commençons par présenter la résolution générale²³ et ensuite nous traiterons le cas particulier d'un atome à deux niveaux avec une perturbation sinusoïdale.

Méthode générale pour déterminer une probabilité de transition

On considère un système décrit par un hamiltonien dont la perturbation dépend du temps

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad (71)$$

On appelle $\{|n\rangle\}$ les états propres de \hat{H}_0 et E_n les énergies propres correspondantes. L'opérateur $\hat{V}(t)$ peut dépendre explicitement du temps et ne commute pas avec \hat{H}_0 afin d'introduire des transitions entre différents états propres de \hat{H}_0 . L'objectif est de déterminer la probabilité de trouver le système dans un des états propres de \hat{H}_0 après une évolution pendant un temps t donné.

On commence par développer le vecteur d'état que l'on cherche à déterminer sur la base des états propres²⁴ de \hat{H}_0

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (72)$$

En appliquant l'équation de SCHRÖDINGER on obtient

22. Cet hamiltonien n'est qu'une approximation, comme toujours...

23. Comme dans le cours de BEUGNON.

24. Les états $|n\rangle$ ici ne sont pas des états nombres, c'est juste une notation.

$$i\hbar \sum_n \left(\dot{c}_n(t) - \frac{iE_n}{\hbar} c_n(t) \right) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t) \right) |n\rangle \quad (73)$$

En simplifiant et après projection sur $\langle k|$, on obtient un système d'équations différentielles

$$i\hbar \dot{c}_k(t) = \sum_n c_n(t) e^{-i\omega_{nk}t} \langle k| \hat{V}(t) |n\rangle \quad (74)$$

où l'on introduit les pulsations de BOHR $\omega_{nk} = (E_n - E_k)/\hbar$. L'évolution du système est déterminée de façon exacte par ces équations et une condition initiale pour l'état du système ($c_n(0)$ pour tout n).

On suppose que le terme dépendant du temps $\hat{V}(t)$ est petit devant \hat{H}_0 . On va remplacer²⁵ $\hat{V}(t)$ par $\lambda \hat{V}(t)$ où λ joue le rôle d'un paramètre sans dimension pour effectuer les développements. On suppose que $c_k(t)$ peut être développé en puissance de λ

$$c_k(t) = c_k^{(0)}(t) + \lambda c_k^{(1)}(t) + \lambda^2 c_k^{(2)}(t) \dots \quad (75)$$

Si on injecte ce développement dans 74 et qu'on identifie les termes de même puissance en λ , on aboutit à

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \dot{c}_k^{(0)}(t) = 0 \\ i\hbar \dot{c}_k^{(1)}(t) = \sum_n c_n^{(0)}(t) e^{-i\omega_{nk}t} \langle k| \hat{V}(t) |n\rangle \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ i\hbar \dot{c}_k^{(p)}(t) = \sum_n c_n^{(p-1)}(t) e^{-i\omega_{nk}t} \langle k| \hat{V}(t) |n\rangle \end{array} \right. \quad (76)$$

En partant de cette structure, on peut résoudre le problème de façon itérative.

Par exemple, on retrouve qu'à l'ordre 0 le système reste dans son état initial comme s'il n'y avait pas de perturbation. De plus, on montre facilement que pour un système initialement à $t = 0$ dans un état $|i\rangle$ et si on se restreint au premier ordre, la probabilité de trouver le système dans un état $|f\rangle$ différent de $|i\rangle$ est

25. On ne développe que ce que l'on cherche, ici $c_k(t)$. Il n'est pas question de développer le hamiltonien qui est connu.

Transition entre un état initial $|i\rangle$ et un état final $|f\rangle$ au premier ordre

$$\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t) = |\langle f | \psi(t) \rangle|^2 = |c_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{fi}t'} \langle f | \hat{V}(t') | i \rangle \right|^2 \quad (77)$$

pour un hamiltonien $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ et au premier ordre.

Au premier ordre, la probabilité de transition est nulle si l'élément de matrice couplant les deux états est nul. Pour que cette approximation soit valable il est nécessaire que $\mathbb{P}_{i \rightarrow f} \ll 1$. De façon plus intuitive, on conçoit qu'il faut que la perturbation soit faible et appliquée pendant un temps suffisamment court pour que la probabilité de transition reste faible.

Cas d'une perturbation dipolaire par un champ classique

Jusqu'ici, la perturbation $\hat{V}(t)$ était quelconque. Nous traitons maintenant le cas d'un système à deux niveaux $|f\rangle$ et $|e\rangle$ de fréquence de résonance ω_0 avec une perturbation dipolaire par un champ électrique classique. Nous résolvons alors le hamiltonien

Hamiltonien d'un atome en présence d'un champ électrique classique

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad \text{où} \quad \hat{V}(t) = -\mathbf{D}\mathbf{E}_0 \sin(\omega t) \quad (78)$$

Nous supposons qu'à l'instant initial, le niveau $|e\rangle$ est vide donc $c_e(0) = 0$. Le résultat précédent nous donne

$$\mathbb{P}_{f \rightarrow e}(t) = \frac{|\langle e | \mathbf{D}\mathbf{E}_0 | f \rangle|^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{ef}t'} \sin(\omega t') \right|^2 \quad (79)$$

En ignorant la polarisation du champ électrique par soucis de simplicité et en calculant l'intégrale²⁶, on trouve

Transition dipolaire entre l'état fondamental $|f\rangle$ et l'état excité $|f\rangle$

$$\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t) = \left(\frac{dE_0}{\hbar(\omega - \omega_0)} \right)^2 \sin^2 \left((\omega - \omega_0) \frac{t}{2} \right) \quad (80)$$

où $d = \langle e | D | f \rangle$, ω_0 correspond à la pulsation résonnante de l'atome supposé à deux niveaux et ω est la pulsation du champ électrique supposé classique.

26. On passe par les exponentielles et on néglige les termes croisés car ils oscillent rapidement (approximation séculaire).

Cette expression est valide même pile à résonance avec l'atome $\omega = \omega_0$, à condition d'avoir $t \frac{dE_0}{\hbar} \ll 1$. Dans ce cas, nous avons une probabilité quadratique.

Transition dipolaire à résonance avec l'atome $\omega = \omega_0$

$$\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t) \approx \left(\frac{dE_0}{\hbar} \right)^2 \frac{t^2}{4} \quad (81)$$

Cette méthode fonctionne bien évidemment avec un atome à plusieurs niveaux mais le calcul est plus laborieux.

5.3 Transitions dipolaires avec un champ quantique

Après avoir fait un rappel sur les transitions dipolaires avec un champ électrique classique, nous souhaitons faire de même pour un champ quantique. Nous associons à un unique mode du champ électrique à la pulsation ω l'opérateur

$$\hat{E}(t) = \frac{E_0}{2i} (\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \hat{a} e^{-i\omega t}) \quad (82)$$

où $E_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$. Nous avons oublié toute polarisation par soucis de simplicité. Nous obtenons donc un hamiltonien qui agit dans l'espace²⁷ de HILBERT constitué des états $\{|\gamma, n\rangle\}$ où $\gamma = e$ ou f (les deux états de l'atome) et $n = 0, 1, 2, \dots$ (les états du champ électrique).

Le hamiltonien devient alors

Hamiltonien d'un atome en présence d'un champ électrique quantique

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad \text{où} \quad \hat{V}(t) = -\hat{D}\hat{E}(t) = -\frac{E_0}{2i}\hat{D}(\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \hat{a} e^{-i\omega t}) \quad (83)$$

avec $\hat{D} = q\hat{x}$ l'opérateur dipolaire. Nous avons oublié la polarisation par soucis de simplicité.

Nous pouvons utiliser la même procédure que précédemment pour trouver une solution perturbative. Si l'on suppose que $c_e(0) = 0$, on obtient la probabilité de transition vers

²⁷. Nous travaillons à présent dans un espace produit tensoriel entre l'atome et le champ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{atome} \otimes \mathcal{H}_{champ}$.

un état $|e, m\rangle$ (état excité de l'atome dans le mode à m photons du champ) partant d'un état $|f, n\rangle$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|f,n\rangle \rightarrow |e,m\rangle}(t) &= |c_{e,m}^{(1)}|^2 \\ &= \left(\frac{E_0}{2\hbar} \right)^2 \left| \int_0^t dt' \left(\langle e, m | \hat{D} \hat{a}^\dagger | f, n \rangle e^{i(\omega+\omega_0)t'} - \langle e, m | \hat{D} \hat{a} | f, n \rangle e^{-i(\omega-\omega_0)t'} \right) \right|^2 \end{aligned} \quad (84)$$

Comme l'opérateur dipole électrique \hat{D} n'agit que sur la partie "atome" de l'état $|\gamma, n\rangle$, nous voyons que cette probabilité est nulle si $m \neq n - 1$ et $m \neq n + 1$ car sinon par exemple $\langle e, m | \hat{D} \hat{a}^\dagger | f, n \rangle \propto \langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle \propto \langle m | n + 1 \rangle = 0$ et donc l'intégrale est nulle.

Nous voyons que pour les éléments de matrice dans l'intégrale, l'un évoque une transition de $|f\rangle$ vers $|e\rangle$ en créant un photon (\hat{a}^\dagger) alors que l'autre évoque une transition de $|e\rangle$ vers $|f\rangle$ en annihilant un photon (\hat{a}). Proche de la résonance, ces processus sont supprimés par l'oscillation rapide des exponentielles²⁸.

Finalement, nous obtenons

Transitions dipolaires avec un champ quantique

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{|f,n\rangle \rightarrow |e,n-1\rangle}(t) = \left(\frac{dE_0}{\hbar(\omega - \omega_0)} \right)^2 \sin^2 \left((\omega - \omega_0) \frac{t}{2} \right) n \\ \mathbb{P}_{|e,n\rangle \rightarrow |f,n+1\rangle}(t) = \left(\frac{dE_0}{\hbar(\omega - \omega_0)} \right)^2 \sin^2 \left((\omega - \omega_0) \frac{t}{2} \right) (n + 1) \end{cases} \quad (85)$$

où $d = \langle e | D | f \rangle$ supposé réel^a, ω_0 correspond à la pulsation résonnante de l'atome supposé à deux niveaux et ω est la pulsation du champ électrique quantique.

a. Dans ce cas $d = \langle e | D | f \rangle = \langle f | D | e \rangle^* = \langle f | D | e \rangle$ car l'opérateur position est hermitien.

Nous remarquons ici une différence fondamentale avec le cas semi-classique, nous avons en effet $\langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}$ à cause des relations de commutation des opérateurs de champ. Cela signifie que même si le champ électrique est dans l'état vide $|0\rangle$, il y a une certaine probabilité qu'un atome excité se désexcite²⁹ ! De plus, nous voyons que chaque probabilité est proportionnelle à n (ou $n+1$) l'énergie totale du champ (modulo un facteur de proportionnalité).

Ainsi, nous avons retrouvé les phénomènes d'émission stimulée et spontanée, postulés par EINSTEIN sur des fondements complètement différents. Cela a été un des premiers succès de la quantification du champ électromagnétique.

28. On rappelle que la conservation de l'énergie peut être violée mais durant un temps très court (voir cours de physique subatomique).

29. C'est vraiment badass... car on le voit par le calcul.

5.4 Modèle de JAYNES-CUMMINGS

Même si un mode du champ possède plusieurs photons, traiter le champ comme un unique mode peut paraître une approximation grossière. Cependant avant de poursuivre avec un traitement du champ multimode, nous allons considérer une situation où un traitement du champ dans un unique mode a du sens même pour un petit nombre de photons. Cela se produit lorsque l'atome est dans une petite cavité de sorte que le champ électrique associé à un photon dans un mode particulier est beaucoup plus étendu que le champ associé à d'autres modes. Dans ce cas, un atome excité peut émettre un photon dans la cavité mais le photon ne va pas disparaître à l'infini, il va être réfléchi sur les parois de la cavité de sorte à être absorbé de nouveau par l'atome.

La solution de RABI au problème semi-classique

Nous présentons d'abord le calcul des oscillations³⁰ de RABI. Afin d'étudier cette situation, retournons à l'équation de SCHRÖDINGER pour un atome à deux niveaux perturbé par un unique mode d'un champ électrique classique.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H}_0 |\psi\rangle - \frac{E_0}{2i} \hat{D} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) |\psi\rangle \quad (86)$$

Pour simplifier les notations, nous allons traiter l'atome à deux niveaux comme un spin 1/2 σ fictif pour lequel "up" correspond à l'état $|e\rangle$ et "down" correspond à l'état $|f\rangle$. On note

$$\hat{\sigma}_z = (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

et

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle f| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_- = |f\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

L'opérateur $\hat{\sigma}_\pm$ monte ou descend le spin (excite ou désexcite l'atome). Avec cette notation et en définissant $\hbar\Omega = -dE_0$, le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2i}\hbar\Omega (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \quad (89)$$

Maintenant nous faisons l'approximation résonante qui consistait à négliger le terme d'absorption $\hat{\sigma}_+$ lorsque ce dernier est accompagné d'un terme de fréquences négatives $e^{i\omega t}$ et le terme d'émission $\hat{\sigma}_-$ lorsque ce dernier est accompagné d'un terme de fréquences positives $e^{-i\omega t}$ (on néglige les termes croisés). Nous pouvons réécrire le hamiltonien sous la forme

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + \frac{1}{2i}\hbar\Omega (e^{i\omega t}\hat{\sigma}_- - e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_+) \quad (90)$$

Nous pouvons facilement résoudre l'équation de SCHRÖDINGER en prenant un état du type

30. Ce calcul est archi-classique!

$$|\psi(t)\rangle = d_e(t)e^{-i\Delta t/2}e^{-i\omega_0 t/2}|e\rangle + d_f(t)e^{i\Delta t/2}e^{i\omega_0 t/2}|f\rangle \quad (91)$$

où $\Delta = \omega - \omega_0$. L'équation de SCHRÖDINGER devient alors deux équations différentielles couplées à coefficients constants dont la solution est souvent appelée "solution de RABI" et on montre³¹ que pour $\Delta = 0$ (à résonance) et pour $c_e(0) = 0$ (état excité non peuplé initialement), on obtient

$$d_e(t) = -i \sin(\Omega t) \quad d_f(t) = \cos(\Omega t) \quad (92)$$

Ainsi, la population oscille entre les états $|e\rangle$ et $|f\rangle$ avec une fréquence Ω (fréquence de RABI).

Modèle entièrement quantique

Par analogie avec le calcul des oscillations de RABI où la perturbation se faisait par un champ électrique classique, nous faisons ici le même calcul mais avec un unique mode d'un champ quantique. Ainsi, nous résolvons le hamiltonien (toujours avec la même simplification) suivant

$$\hat{H} \approx \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + i\hbar g (e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - e^{-i\omega t}\hat{a}\hat{\sigma}_+) \quad (93)$$

où $\hbar g = d\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$ est appelé "fréquence du vide de RABI" pour des raisons qui vont paraître plus claires par la suite.

Avant d'aller plus loin dans le calcul, essayons de prédire ce que cet hamiltonien fait qualitativement. Les termes non-diagonaux couplent les états $|e, 0\rangle$ avec $|f, 1\rangle$. Cela signifie que aucun des deux états n'est état propre du système et que si le système est initialement préparé dans l'état $|e, 0\rangle$, il va osciller entre cet état et l'état $|f, 1\rangle$ et ce à la pulsation $2g$. Ainsi, des oscillations de RABI peuvent apparaître même dans le vide à l'exception que ce dernier n'est pas exactement le vide car l'un des état (ici $|f, 1\rangle$) contient un photon.

Jetons maintenant un coup d'oeil aux états propres du système. Pour se faire, introduisons l'énergie du champ $\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ qui jusqu'à présent n'a jamais joué un rôle dans la dynamique du système et donc a toujours été négligé. De plus, pour rendre le hamiltonien plus joli, nous enlevons la partie temporelle de l'opérateur champ électrique. Ce changement se comprend en utilisant la représentation de SCHRÖDINGER. Nous obtenons le hamiltonien de JAYNES-CUMMINGS

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z + i\hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- - \hat{a}\hat{\sigma}_+) \quad (94)$$

Nous avons jusqu'ici exprimé l'opérateur champ électrique comme dépendant du temps agissant dans un espace de HILBERT où les états du champ sont indépendant du temps. Ceci correspond à la représentation de HEISENBERG. Nous pouvons transformer cette représentation en celle de SCHRÖDINGER en utilisant une transformation.

31. Le calcul est laissé en exercice.

Considérons \hat{O}_H un opérateur dans la représentation de HEISENBERG et $|i\rangle_H$ un vecteur correspondant. Les opérateurs de SCHRÖDINGER ainsi que les états sont définis par

$$\hat{O}_S = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}_H e^{i\hat{H}t/\hbar} \quad |i\rangle_S = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |i\rangle_H \quad (95)$$

Remarquons que cette transformation conserve les valeurs moyennes des opérateurs (ce que l'on mesure) : $\langle i | \hat{O} | i \rangle$ se conserve peu importe la représentation.

Considérons maintenant $\hat{O}_H = e^{-i\omega t} \hat{a} e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger$ et $\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Vous pouvez vérifier que l'opérateur correspondant dans la représentation de SCHRÖDINGER est $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$ et l'état correspondant est $e^{-i\omega t} |n\rangle$. Afin de vérifier ce résultat, vous avez besoin du lemme de BAKER-HAUSDORF pour deux opérateurs \hat{A} et \hat{B}

$$e^{i\lambda\hat{A}} \hat{B} e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + i\lambda[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (96)$$

Cette transformation nous permet de nous débarrasser de la dépendance temporelle du hamiltonien. Ce dernier peut être représenté par bloc

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{f0} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \hat{H}_0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \hat{H}_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix} \quad (97)$$

avec

$$\hat{H}_{f0} = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{\hbar\omega_0}{2} \quad \hat{H}_0 = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} + \frac{\omega_0}{2} & -ig \\ ig & \frac{3\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (98)$$

et

$$\hat{H}_n = \hbar \begin{pmatrix} (n + \frac{1}{2})\omega + \frac{\omega_0}{2} & -ig\sqrt{n+1} \\ ig\sqrt{n+1} & (n + 1 + \frac{1}{2})\omega - \frac{\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (99)$$

Ce dernier hamiltonien peut s'écrire plus facilement pour $n \geq 0$

$$\hat{H}_n = \hbar(n+1)\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \hbar \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{2} & -ig\sqrt{n+1} \\ ig\sqrt{n+1} & \frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} \quad (100)$$

Gardez en tête que cet hamiltonien agit dans l'espace des états $\{|f, n+1\rangle, |e, n\rangle\}$. La diagonalisation de cet hamiltonien donne les énergies

$$E_{n,\pm} = \hbar\omega(n+1) \pm \hbar\sqrt{(\Delta/2)^2 + g^2(n+1)} \quad (101)$$

et les vecteurs propres

$$\begin{cases} |n, +\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |f, n+1\rangle \\ |n, -\rangle = -\sin \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |f, n+1\rangle \end{cases} \quad (102)$$

avec $\tan \theta_n = 2\frac{g}{\Delta}\sqrt{n+1}$. On lève ainsi une dégénérescence (voir diagramme énergétique dans les notes de cours).

6 Émission spontanée

Nous avons vu précédemment comment un unique mode d'un champ électrique en interaction dipolaire avec un atome (ou plutôt un électron de l'atome) amène aux notions d'émission stimulée et spontanée. Nous allons maintenant traiter le cas plus réaliste d'un champ électrique multimode. Cela va nous permettre de calculer le taux de désexcitation par émission spontanée d'un atome excité. Il sera nécessaire de considérer un champ multimode et de prendre en compte tous les modes vers lesquels le photon émis est susceptible d'aller. La notion bien connue de densité de mode va apparaître.

6.1 Transitions avec un champ quantique multimode

Nous avons calculé précédemment les probabilités de transitions dipolaires avec un unique mode d'un champ quantique (voir équation 85). La dépendance temporelle proche de la résonance est quadratique (ceci est aussi le cas avec un champ traité classiquement). Une différence fondamentale avec le cas d'un unique mode est que la somme sur plusieurs modes (que l'on va considérer comme un continuum) va créer une dépendance temporelle linéaire proche de la résonance.

Un atome réel est en pratique couplé avec plusieurs modes du rayonnement. Nous considérons alors un opérateur champ électrique multimode

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{i}{2} \sum_{k,p} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_k}{\epsilon V}} \left(\hat{a}_{k,p} \mathbf{e}_p e^{i(\mathbf{kr}-\omega_k t)} - \hat{a}_{k,p}^\dagger \mathbf{e}_p^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega_k t)} \right) \quad (103)$$

où k désigne un mode tel que $\omega_k = kc$ et p une polarisation (p peut prendre deux valeurs correspondant aux deux polarisations orthogonales). Pour chaque mode nous pouvons calculer³² une probabilité de transition. Pour inclure tous les modes, nous sommes les probabilités de transition avec un unique mode. Nous pouvons le faire car les modes sont tous orthogonaux. L'orthogonalité assure que les différents états finaux du champ sont indiscernables et donc il n'y a aucune interférence entre ces états. La probabilité de transition d'un état $|e, 0\rangle$ (atome excité et aucun photon dans le champ électrique) vers un état $|f, \{1\}\rangle$ (atome dans son état fondamental avec un photon dans n'importe quel mode du champ) s'écrit alors (voir le résultat pour un champ monomode)

$$\mathbb{P}_{|e,0\rangle \rightarrow |f,\{1\}\rangle}(t) = \sum_{k,p} \frac{2\omega_k}{\hbar\epsilon_0 V} \frac{\sin^2\left((\omega_k - \omega_0)\frac{t}{2}\right)}{(\omega_k - \omega_0)^2} |\langle f | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_p | e \rangle|^2 \quad (104)$$

La notation $\{1\}$ signifie que exactement un photon est présent dans un des modes de la somme. Passons à la limite continue maintenant et intégrons sur les pulsations³³ (on invoque ici une densité de modes).

$$\mathbb{P}_{|e,0\rangle \rightarrow |f,\{1\}\rangle}(t) = \frac{V}{(2\pi)^2} \sum_p \int d\Omega d\omega \frac{\omega^2}{c^3} \frac{2\omega}{\hbar\epsilon_0 V} \frac{\sin^2\left((\omega - \omega_0)\frac{t}{2}\right)}{(\omega - \omega_0)^2} |\langle f | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_p | e \rangle|^2 \quad (105)$$

32. Fait précédemment.

33. Cette étape est à faire et est un très bon exercice.

où ici l'intégrale sur $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ est une somme sur la dépendance angulaire de $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{p}}$. Concentrons nous sur l'intégrale sur les pulsations. Pour des longs temps d'interaction, nous pouvons remplacer le terme $\frac{\sin^2((\omega - \omega_0)\frac{t}{2})}{(\omega - \omega_0)^2}$ par $\frac{\pi t}{2} \delta(\omega - \omega_0)$ (voir le cours de BEUGNON et l'allure de la fonction sinus cardinal au carré).

Sans spécifier le terme $\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{p}}$, nous ne pouvons pas aller plus loin dans le calcul. Retenons tout de même le résultat suivant

Transition dipolaire avec un champ quantique multimode

Pour un champ électrique quantique multimode de la forme

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{i}{2} \sum_{k,p} \sqrt{\frac{2\hbar\omega_k}{\epsilon V}} \left(\hat{a}_{k,p} \mathbf{e}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{kr} - \omega_k t)} - \hat{a}_{k,p}^\dagger \mathbf{e}_{\mathbf{p}}^* e^{-i(\mathbf{kr} - \omega_k t)} \right) \quad (106)$$

nous obtenons la probabilité de transition d'un état $|e, 0\rangle$ vers un état $|f, \{1\}\rangle$ en sommant les probabilités pour un champ monomode

$$\mathbb{P}_{|e,0\rangle \rightarrow |f,\{1\}\rangle}(t) = \sum_{k,p} \frac{2\omega}{\hbar\epsilon_0 V} \frac{\sin^2\left((\omega - \omega_0)\frac{t}{2}\right)}{(\omega - \omega_0)^2} |\langle f | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{p}} | e \rangle|^2 \quad (107)$$

La différence principale avec le cas monomode est que après calcul de la somme ^a, cette probabilité de transition possède une dépendance temporelle linéaire ^b.

- ^a. On passe à la limite continue et on fait l'approximation des temps longs d'interaction.
^b. Le cas monomode présentait une dépendance temporelle quadratique.

Pour aller plus loin, prenons un exemple concret. Considérons un atome ne possédant qu'un électron (l'hydrogène) et considérons la transition $|n=2, l=1, m=0\rangle \rightarrow |n=1, l=0, m=0\rangle$. Nous rappelons que l'opérateur dipole électrique est $\hat{\mathbf{D}} = q\hat{\mathbf{r}}$ où $\hat{\mathbf{r}} = \hat{x}\mathbf{e}_x + \hat{y}\mathbf{e}_y + \hat{z}\mathbf{e}_z$ est l'opérateur position de l'électron.

En écrivant les fonctions d'onde ³⁴ des deux états considérés en représentation position

$$\psi_e(\mathbf{r}) = R_{2,1}(r)Y_{1,0}(\theta, \phi) \quad \psi_f(\mathbf{r}) = R_{1,0}(r)Y_{0,0}(\theta, \phi) \quad (108)$$

avec

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} e^{-r/a} \quad R_{2,1}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{3/2}} \left(\frac{r}{a}\right) e^{-r/(2a)} \quad (109)$$

et

³⁴. On rappelle que les fonctions d'onde s'écrivent avec une partie radiale R et une partie angulaire (les harmoniques sphériques).

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (110)$$

et en passant en coordonnées sphériques pour \mathbf{r} , nous pouvons montrer³⁵ que

$$\langle f | \hat{x} | e \rangle = \langle f | \hat{y} | e \rangle = 0 \quad \langle f | \hat{z} | e \rangle = d = 0,745qa \quad (111)$$

où a est le rayon de BOHR. Par ailleurs, nous pouvons montrer³⁶ que $\sum_p |\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_p|^2 = \sin^2 \theta$. Nous pouvons alors achever le calcul et obtenir le taux de transition de $|n = 2, l = 1, m = 0\rangle$ vers $|n = 1, l = 0, m = 0\rangle$

$$\Gamma = \frac{d\mathbb{P}}{dt} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{d^2}{\hbar\epsilon_0} \frac{\omega_0^3}{c^3} \int \sin^3 \theta d\theta d\phi = \frac{1}{3\pi} \frac{d^2}{\hbar\epsilon_0} \frac{\omega_0^3}{c^3} \quad (112)$$

Ce calcul nous donne un temps de désexcitation de $\Gamma^{-1} = 1,6$ ns pour la transition de l'hydrogène ($\lambda = 121,5$ nm), en bon accord avec l'expérience.

Nous pouvons faire le même calcul et aboutir au même résultat en utilisant la règle d'or de FERMI mais cette méthode sera plutôt utilisée pour étudier l'effet photoélectrique présenté plus tard.

6.2 Effet PURCELL

Parfois il n'est pas légitime de considérer un volume infini pour quantifier le champ électrique. Dans ce cas, certaines propriétés comme le taux d'émission spontanée peuvent être changées. Comme exemple, nous allons considérer l'émission spontanée entre deux plaques de métal séparées selon l'axe z par une distance a . Le volume de quantification est alors $V = L^2a$.

Avec une orientation particulière du dipôle électrique de l'atome et une séparation entre les plaques suffisamment petite, il est possible de stopper l'émission spontanée. L'expérience de HULET, HILFER et KLEPPNER de 1985 en donne une démonstration claire.

Dans cette expérience, un jet d'atomes a été préparé dans un état excité $|n = 22, l = 21, m = 21\rangle$ (atomes dits de RYDBERG). La seule transition dipolaire autorisée par les règles de sélection est avec l'état $|n = 21, l = 20, m = 20\rangle$. Cette transition correspond à une longueur d'onde $\lambda = 460 \mu\text{m}$ et possède un taux de désexcitation dans le vide $\Gamma = 2,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$. Lorsque la séparation entre les plaques de métal est plus petite que $\lambda/2$, il est possible de rendre le taux de désexcitation infiniment petit.

Nous commençons par identifier les modes qui peuvent exister dans une telle géométrie. Le vecteur d'onde prend la forme

35. Deux intégrales sont nulles car on intègre sur \mathbb{R} une fonction impaire (la partie angulaire).

36. D'une part $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ si l'on paramétrise le système comme dans le polycopié de cours et $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_1 = \sin \theta$.

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y) + \frac{\pi}{a} n_z \mathbf{e}_z \quad |\mathbf{k}|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (113)$$

Nous sommes libres d'imposer des conditions limites périodiques selon les axes x et y mais pas selon z . Les quantités n_x et n_y sont de grands entiers mais n_z est très petit. En effet, si $a < \frac{\lambda}{2}$, alors nous devons avoir $n_z = 0$ et donc le seul mode qui est autorisé est dans le plan (x, y) . La polarisation étant orthogonal à la propagation, cette dernière est forcément selon l'axe z . De plus, nous pouvons montrer³⁷ que l'élément de matrice du dipôle électrique $\langle e | \hat{\mathbf{D}} | f \rangle$ est polarisé circulairement.

HULET, HILFER et KLEPPNER ont alors construit une situation dans laquelle la polarisation du dipôle électrique et celle du champ électrique étaient orthogonales et donc ont réussi à arrêter l'émission spontanée.

Pour comprendre ce phénomène, commençons par changer de base. Nous passons du champ électrique multimode (somme sur les \hat{a}_k) à un champ électrique stationnaire (somme sur \hat{a}_c et \hat{a}_s).

$$\hat{a}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}) \quad \hat{a}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_{-k}) \quad (114)$$

Ces nouvelles définitions satisfont les relations de commutation habituelles. Nous pouvons conclure que ces nouveaux opérateurs correspondent aussi à des oscillateurs harmoniques quantiques indépendants. Nous pouvons alors réécrire le champ électrique

$$\hat{\mathbf{E}} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{\epsilon_0 V}} \sum_{c,s,p} \left((\hat{a}_{c,p} \mathbf{e}_p e^{-i\omega_k t} - \hat{a}_{c,p}^\dagger \mathbf{e}_p^* e^{i\omega_k t}) \cos kz + i (\hat{a}_{s,p} \mathbf{e}_p e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{s,p}^\dagger \mathbf{e}_p^* e^{i\omega_k t}) \sin kz \right) \quad (115)$$

En dimension trois, un champ multimode entre deux plaques ($z = 0$ et $z = a$) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} = & i^2 \sum_{K, k_z > 0, p} E_\omega \left(\hat{a}_{K, k_z, s, p} \mathbf{e}_p e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} + \hat{a}_{K, k_z, s, p}^\dagger \mathbf{e}_p^* e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} \right) \sin k_z z \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{K, k_z = 0} \mathbf{e}_z E_\omega \left(\hat{a}_{K, k_z = 0} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}} - \hat{a}_{K, k_z = 0}^\dagger e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

où $E_\omega = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\epsilon_0 L^2 a}}$ et $\mathbf{K}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$. Nous avons $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \mathbf{K}^2 + k_z^2$. Nous avons éliminé le cosinus car il ne satisfait pas les conditions limites. Afin de calculer le taux de désexcitation, nous passons à la limite continue dans le plan (x, y)

$$\sum_K \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int K dK d\phi \quad (117)$$

Mais la somme selon z reste discrète

37. En utilisant les règles de sélection dans le cours de BEUGNON.

$$\sum_{K, k_z, p} \rightarrow \sum_{n_z, p} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int K dK d\phi \left(\sin \theta d\theta \delta \left(\cos \theta - n_z \frac{\pi}{ka} \right) \right) \quad (118)$$

où $k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{a} n_z \right)^2 + K^2$. La présence du dirac signifie simplement que l'on impose $\cos \theta = \frac{k_z}{k}$. En intégrant sur les pulsations plutôt que sur les vecteurs d'onde et en faisant l'approximation des temps longs (on remplace le sinus cardinal au carré par un dirac), on obtient

$$\Gamma = \sum_{n_z, p} \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \int \frac{\omega}{c^2} d\omega d\Omega \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \delta \left(\cos \theta - n_z \frac{\pi}{ka} \right) \times 2 \frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 L^2 a} \sin^2 \left(\pi \frac{z}{a} n_z \right) |\langle e | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_p | f \rangle|^2 \quad (119)$$

Nous avons besoin maintenant d'explicitier le dipôle électrique. Ce dipôle est polarisé circulairement dans le plan (x, y) . En procédant de la même manière que pour l'exemple de la transition dipolaire de l'atome d'hydrogène, nous avons

$$\langle e | \hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_p | f \rangle = \frac{d}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_p \quad (120)$$

Pour simplifier le calcul, nous ne considérons dans la somme que le terme $n_z = 1$ qui correspond à $\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$. Ainsi, nous avons après calcul³⁸

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^2}{\hbar \epsilon_0 c^2} \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{\pi^2}{(ka)^2} \right) \sin^2 \frac{\pi}{a} z \quad (121)$$

Si l'on suppose que a est un tout petit peu plus grand que $\lambda/2$ alors $\frac{\pi^2}{(ka)^2} \approx 1$ et

$$\Gamma = \frac{1}{a} \frac{d^2 \omega_0^2}{\hbar \epsilon_0 c^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} z \quad (122)$$

Pour un atome au milieu des deux plaques $z \approx \lambda/4$, nous avons $\Gamma = 3\Gamma_{vide}$ alors que ce taux disparaît pour un atome proche des deux plaques ($z \approx 0$ ou $z \approx a$).

Nous retiendrons le résultat suivant

Effet Purcell

En imposant des conditions limites périodiques au champ électrique traité quantiquement, nous pouvons stopper l'émission spontanée d'un atome^a dans une cavité.

^a. Voir le calcul précédent pour une étude quantitative.

38. Pour les courageux...

6.3 Théorie de WEISSKOPF-WIGNER

Dans cette partie, nous calculons explicitement le taux d'émission spontanée d'un atome. Pour cela, nous calculons l'état quantique du champ électrique émis après l'émission spontanée d'un atome traité comme un système à deux niveaux. La pulsation de la transition entre un état fondamental $|f\rangle$ et un état excité $|e\rangle$ est notée ω_0 .

Nous travaillons dans l'espace de HILBERT produit tensoriel de l'espace de l'atome et l'espace du champ électrique $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{atome}} \otimes \mathcal{H}_{\text{champ}}$ dont les états sont notés $|\gamma, j\rangle$ où $\gamma = f$ ou e (l'atome) et $j = 0$ ou $1_{k,p}$ (zéro ou un photon avec une polarisation p dans le mode k). Si l'atome est dans l'état excité alors il n'y a pas de photon dans le champ et si l'atome est dans l'état fondamental (par exemple après désexcitation) il y a un photon dans le champ mais nous ne savons pas dans quel mode (alors on les considère tous).

Commençons par écrire un état arbitraire combinaison de tous les états $|\gamma, j\rangle$ que l'on cherche à déterminer

$$|\psi(t)\rangle = a(t)e^{-i\omega_0 t} |e, 0\rangle + \sum_{k,p} b_{k,p}(t)e^{-i\omega_k t} |f, 1_{k,p}\rangle \quad (123)$$

En considérant un hamiltonien de la forme habituelle $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ où \hat{H}_0 représente l'atome et $\hat{V}(t) = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, nous pouvons utiliser la résolution perturbative dépendante du temps³⁹ habituelle afin d'obtenir des équations différentielles pour $a(t)$ et une expression pour $b_{k,p}(t)$.

$$\begin{cases} b_{k,p}(t) = -\frac{1}{i\hbar} \langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t'} a(t') \\ \dot{a}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k,p} |\langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle|^2 \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)(t-t')} a(t') \end{cases} \quad (124)$$

Comme dans l'exemple de la transition dipolaire de l'atome d'hydrogène traité précédemment, on montre⁴⁰ que

$$|\langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle|^2 = d^2 \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \sin^2 \theta \quad (125)$$

où θ est l'angle entre l'axe du dipôle et la direction du photon émis spontanément. Le photon émis possède un vecteur d'onde k correspond au mode du champ électrique dans lequel le photon arrive. En passant à la limite continue

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\infty k^2 dk \quad (126)$$

et en intégrant sur les pulsations $\omega = kc$, on obtient

39. Voir section précédente pour une présentation détaillée de cette méthode.

40. On écrit le champ électrique quantique comme somme d'un mode k sur les deux polarisations et on utilise la géométrie sphérique comme dans le polycopié de cours.

$$\dot{a}(t) = -\frac{d^2}{6\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^3 \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0-\omega)(t'-t)} a(t') \quad (127)$$

Le terme $e^{-i(\omega_0-\omega)(t'-t)}$ est un terme oscillant dans l'intégrale. Si ce terme oscille très rapidement (proche de ω_0 donc si $\omega_0 \gg \omega$) alors l'intégrale sera globalement nulle donc on ne garde que le terme $\omega \approx \omega_0$ (proche de la résonance) pour que l'exponentielle n'oscille pas rapidement. On remplace alors ω^3 par ω_0^3 .

L'intégrande oscille à une fréquence proche de ω_0 , on peut donc sortir $a(t')$ de l'intégrale à condition que ce terme varie sur une durée typique $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$. De plus, l'intégrale peut être étendue à l'infini car l'intégrande ajoutée oscille tellement vite que sa contribution est presque nulle une fois intégrée. on obtient finalement ⁴¹

$$\dot{a}(t) = -\frac{d^2 a(t)}{6\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^3 \delta(\omega_0 - \omega) = -\frac{d^2 \omega_0^3}{6\pi^2\epsilon_0\hbar c^3} a(t) \quad (128)$$

Ainsi, si l'on suppose que $a(t) = e^{-\Gamma t/2}$, on trouve le taux de désexcitation par émission spontanée.

Taux de désexcitation par émission spontanée

La théorie de WEISSKOPF-WIGNER nous permet par une méthode perturbative dépendante du temps d'obtenir une expression du taux de désexcitation (en s^{-1}) par émission spontanée d'un atome pour une transition de pulsation ω_0 entre un état $|e\rangle$ et un état $|f\rangle$.

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} \quad (129)$$

où $d\mathbf{e}_d = |\langle f | \hat{\mathbf{D}} | e \rangle|$ avec \mathbf{e}_d le vecteur unitaire donnant l'orientation du dipôle électrique.

Nous avons aussi montré que la désexcitation d'un atome par émission spontanée est exponentielle. En effet, la probabilité que l'atome soit dans l'état excité au temps t est donnée par

$$\mathbb{P}_e(t) = |\langle e, 0 | \psi(t) \rangle|^2 = |a(t)|^2 = e^{-\Gamma t} \quad (130)$$

Par ailleurs, comme nous avons obtenu une expression pour $a(t)$, nous pouvons déterminer une expression pour $b_{k,p}(t)$ ce qui nous donnera une expression de l'état final $|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle$. Après calcul et en prenant la limite des temps infinis $t \rightarrow \infty$, nous obtenons

41. On utilise pour cela le résultat de l'intégrale de l'exponentielle complexe en fonction de la valeur principale de CAUCHY et en négligeant la partie imaginaire du résultat qui ne contribue pas au taux de désexcitation.

$$b_{k,p}(t \rightarrow \infty) = \frac{\langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle / i\hbar}{i(\omega_k - \omega_0) - \Gamma/2} \quad (131)$$

La probabilité que l'atome soit dans son état fondamental avec un photon dans le mode k du champ électrique avec une polarisation p est

$$\mathbb{P}_{f,k,p}(t) = |\langle f, 1_{k,p} | \psi(t) \rangle|^2 = |b_{k,p}|^2 = \frac{|\langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle|^2 / \hbar^2}{(\omega_k - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (132)$$

Cette probabilité est lorentzienne centrée en $\omega_k = \omega_0$. Il est alors d'autant plus probable d'émettre un photon dont la pulsation est proche de la pulsation de résonance de l'atome. Ce résultat est intuitif mais on garde tout de même une probabilité non nulle de ne pas conserver l'énergie (énergie du photon émis pas exactement égale à l'énergie de la transition atomique). Ceci est un phénomène purement quantique.

Ayant calculé les $a(t)$ et $b_{k,p}(t)$, l'état quantique en régime stationnaire $t \rightarrow \infty$ final s'écrit

$$|\psi_\infty\rangle = \frac{1}{i\hbar} \sum_{k,p} \frac{\langle f, 1_{k,p} | \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}} | e, 0 \rangle}{i(\omega_k - \omega_0) - \Gamma/2} |f, 1_{k,p}\rangle \quad (133)$$

On remarque que les coefficients $b_{k,p}$ se distribue de manière à être centrés⁴² autour de ω_0 , pulsation de la transition de l'atome.

7 Détection de photons

Pour être apte à discuter des prédictions de la mécanique quantique, nous devons définir précisément ce qu'est une mesure. Dans ce cours, nous discutons donc de la détection des champs électromagnétiques et plus précisément de la détection d'un photon. Le point de départ est l'effet photoélectrique. La détection du rayonnement passe par son interaction avec la matière (les atomes), d'où toute l'étude précédente. En effet, un champ électrique peut faire passer un électron (dans un atome) d'un état lié à un état libre. L'électron libre (donc dans un continuum d'énergie) peut donc être détecté. Nous supposons alors qu'un appareil classique peut détecter cet électron. Tout ce processus se fait par exemple dans une carte photographique aussi appelée [carte CCD](#). La détection d'un électron correspond alors à la détection d'un photon.

7.1 Règle d'or de FERMI : transition entre un état discret et un continuum

L'étude de l'effet photoélectrique nécessite de calculer la probabilité ou le taux de transition entre un état discret (l'électron lié à l'atome) et un continuum (l'électron libre). Ce calcul se fait par la règle d'or de FERMI que nous présentons ici.

42. Pour ω_k trop éloigné de ω_0 , le coefficient $b_{k,p}$ est presque nul.

Le calcul du taux de transition entre deux états discrets se fait par la méthode des perturbations que l'on a présenté précédemment (une partie entière est consacrée à cette résolution). Rappelons le résultat principal. La probabilité de trouver le système (ici l'électron) dans un état final $|f\rangle$ partant d'un état initial $|i\rangle$ (ces deux états étant couplés par un hamiltonien \hat{V} supposé constant) est

$$\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \frac{\sin^2(\omega_{fi}t/2)}{(\omega_{fi}/2)^2} \quad (134)$$

où $\omega_{fi} = \omega_f - \omega_i$. Pour des temps suffisamment longs, on peut prendre la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2} = 2\pi t \delta(\omega) \quad (135)$$

Ce qui donne

$$\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \quad (136)$$

À partir de cette expression, nous pouvons calculer le taux de transition $\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{d\mathbb{P}_{i \rightarrow f}(t)}{dt}$.

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \quad (137)$$

La présence du dirac dans la formule signifie que pour une perturbation constante de durée suffisamment longue, on va coupler seulement l'état initial à un état final de même énergie.

On considère maintenant que parmi les états propres de \hat{H}_0 (dans notre cas le hamiltonien de l'électron) certains forment un continuum que l'on peut repérer par un ensemble d'indices que l'on nomme k (k correspond au vecteur d'onde de l'électron libre). Pour simplifier la présentation dans la suite, on considère que les états sont uniquement caractérisés par leur énergie. Ainsi, en partant de l'état initial $|i\rangle$ le taux de transition vers un domaine d'états finaux D_k s'écrit

$$\Gamma_{i \rightarrow D_k} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k \in D_k} \delta(E_k - E_i) |\langle k | \hat{V} | i \rangle|^2 \quad (138)$$

En passant à la limite continue (on remplace la somme par une intégrale en faisant intervenir la densité d'états du continuum $\rho(E)$), on obtient la règle d'or de FERMI

Règle d'or de Fermi

Le taux de transition (en s^{-1}) d'un état $|i\rangle$ vers un continuum d'énergie D_k est donné par

$$\begin{aligned}\Gamma_{i \rightarrow D_k} &= \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_k = E_i) |\langle E_k = E_i | \hat{V} | i \rangle|^2 \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k \in D_k} |\langle E_k | \hat{V} | i \rangle|^2 \delta(E_k - E_i)\end{aligned}\quad (139)$$

où $\rho(E)$ est la densité d'états en énergie du continuum.

7.2 Effet photoélectrique avec un champ classique

Commençons par étudier l'effet photoélectrique avec un champ électrique classique. Nous faisons cette première étude pour montrer que la quantification du champ n'est pas nécessaire pour comprendre l'effet photoélectrique (nous avons seulement besoin de quantifier la matière donc les atomes). Pour simplifier, nous résolvons le problème à une dimension selon l'axe x . La fonction d'onde de l'électron vérifie l'équation de SCHRÖDINGER

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m^*} + \hat{V} \right) |\psi\rangle \quad (140)$$

où m^* est la masse effective de l'électron dans un cristal semi-conducteur (par exemple $m^* = 0,067m_e$ dans un cristal GaAs). Nous modélisons le potentiel subi par l'électron lié dans l'atome par un puit de largeur l à l'intérieur d'une boîte carré de longueur L où sont les états libres (le continuum). Les fonctions d'onde unidimensionnelles des états liés et libres de l'électron sont très bien approximées par

$$\langle x | f \rangle = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{\pi}{l} x\right) \quad \langle x | k \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (141)$$

où $k = \frac{\pi}{L}$ pour l'état libre dans le continuum. La règle d'or de FERMI donne le taux de transition (en s^{-1}) de l'état lié $|f\rangle$ vers le continuum $\{|k\rangle\}$

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_k |\langle k | \hat{V} | f \rangle|^2 \delta(E_k - E_f - \hbar\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle k | \hat{V} | f \rangle|^2 \rho(E_k) \quad (142)$$

Si l'on écrit le champ électrique classique sous la forme

$$\mathbf{E} = \frac{i}{2} E_0 (\mathbf{e}_p e^{i(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r} - \omega t)} - \mathbf{e}_p^* e^{-i(\mathbf{k}_\gamma \mathbf{r} - \omega t)}) \quad (143)$$

où \mathbf{k}_γ est le vecteur d'onde du photon dans le champ, nous pouvons écrire le potentiel d'interaction de type dipolaire

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{e}_p \frac{E_0}{2} e^{-i(\mathbf{k}_\gamma z - \omega t)} + c.c. \quad (144)$$

Nous pouvons alors voir⁴³ que le taux de transition w est proportionnel à E_0^2 donc à l'intensité du rayonnement. Si l'on fait l'approximation des grandes fréquences optiques $kl \gg 1$ et que $E_k = \frac{(\hbar k)^2}{2m^*}$, on peut faire le calcul entier pour trouver

$$w \approx \pi^2 \frac{q^2}{l} \hbar^2 \sqrt{\frac{2}{m^{*2} E_k^5}} E_0^2 = A E_0^2 \quad (145)$$

Nous retiendrons le résultat suivant

Taux de détection par effet photoélectrique pour un champ classique

Le taux de transition de l'électron dans un état lié $|f\rangle$ vers un continuum d'énergie E_k par irradiation d'un champ électrique classique est donné par

$$w = A E_0^2 \quad (146)$$

où A ne dépend que des paramètres du détecteur et E_0^2 est l'intensité du champ électrique.

7.3 Effet photoélectrique avec un champ quantique

Étudions maintenant l'effet photoélectrique avec un champ électrique quantique défini par

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{i}{2} E_0 (\mathbf{e}_p \hat{a} e^{i(kz - \omega t)} - \mathbf{e}_p^* \hat{a}^\dagger e^{-i(kz - \omega t)}) = \mathbf{e}_p \hat{E}^{(+)} + \mathbf{e}_p^* \hat{E}^{(-)} \quad (147)$$

où $E_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$. De même que dans les études faites précédemment, l'espace de HILBERT contient des vecteurs du type $|i, \psi\rangle$ où i correspond à l'état de l'électron et ψ correspond à l'état du champ électrique monochromatique (état nombre, état cohérent, état comprimé, chat de SCHRÖDINGER, etc...). Choisissons une polarisation $\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_x$. La règle d'or de FERMI donne le taux de transition de l'état lié $|f, \psi_{initial}\rangle$ vers un état de continuum $|k, \psi_{final}\rangle$.

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k, \psi_{final}} |\langle k, \psi_{final} | \hat{V} | f, \psi_{initial} \rangle|^2 \delta(E_k - E_f - \hbar\omega) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k, \psi_{final}} |\langle \psi_{final} | \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle|^2 \delta(E_k - E_f - \hbar\omega) |\langle k | -\mathbf{e}_x \cdot \hat{\mathbf{D}} | f \rangle|^2 \end{aligned} \quad (148)$$

La conservation de l'énergie supprime le terme $\hat{E}^{(-)}$. Si le champ est monochromatique ou possède un spectre fréquentiel étroit comparé à la réponse du détecteur donnée par la dépendance énergétique $\langle k | -\mathbf{e}_x \cdot \hat{\mathbf{D}} | f \rangle$, nous pouvons considérer ω fixe et séparer la somme sur ψ_{final} de celle sur k . Une relation de fermeture donne

43. Le calcul est laissé en exercice.

$$\begin{aligned}
\sum_{\psi_{final}} |\langle \psi_{final} | \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle|^2 &= \sum_{\psi_{final}} \langle \psi_{final} | \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle \langle \psi_{initial} | \hat{E}^{(-)} | \psi_{final} \rangle \\
&= \sum_{\psi_{final}} \langle \psi_{initial} | \hat{E}^{(-)} | \psi_{final} \rangle \langle \psi_{final} | \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle \\
&= \langle \psi_{initial} | \hat{E}^{(-)} \sum_{\psi_{final}} (|\psi_{final}\rangle \langle \psi_{final}|) \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle \\
&= \langle \psi_{initial} | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle
\end{aligned} \tag{149}$$

car $\hat{E}^{(-)} = \hat{E}^{(+)\dagger}$. Nous voyons dans ce cas que la quantification du champ remplace le terme E_0^2 par $\langle \psi_{initial} | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | \psi_{initial} \rangle$ et ne dépend que de l'état initial du champ électrique. En toute généralité, $\hat{E}^{(-)}$ et $\hat{E}^{(+)}$ dépendent de la position du détecteur \mathbf{r} et du temps t . Pour un champ monochromatique, la dépendance temporelle sous forme d'exponentielle s'annule⁴⁴. Si le champ est multimode, il faut être plus vigilant. Retenons le résultat suivant

Taux de détection par effet photoélectrique pour un champ quantique

Le taux de transition de l'électron dans un état lié $|f\rangle$ vers un continuum d'énergie E_k par irradiation d'un champ électrique quantique

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_p \hat{E}^{(+)} + \mathbf{e}_p^* \hat{E}^{(-)} \tag{150}$$

est donné par

$$w = A \langle \psi | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | \psi \rangle \tag{151}$$

où A ne dépend que des paramètres du détecteur et $|\psi\rangle$ est l'état initial du champ électrique^a.

a. État nombre, état cohérent, état comprimé, chat de SCHRÖDINGER, etc...

Afin de se familiariser avec le formalisme, donnons un exemple. Nous omettons la constante propre au détecteur et ne traitons qu'un champ électrique ne contenant qu'un photon. On a donc

$$w \propto \langle \psi | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | \psi \rangle \propto \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle \tag{152}$$

Pour un état nombre du champ $|\psi\rangle = |n\rangle$, nous obtenons⁴⁵

$$w \propto n \tag{153}$$

Pour un état cohérent du champ $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$, nous obtenons⁴⁶

44. On peut s'en convaincre par le calcul.

45. On rappelle que $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle$.

46. On note $\langle n \rangle = \langle \hat{N} \rangle$.

$$w \propto |\alpha|^2 = \langle n \rangle \quad (154)$$

Et par conséquent, nous retenons le résultat suivant

Taux de détection par effet photoélectrique pour un champ quantique

Le taux de détection w est simplement proportionnel ^a au nombre moyen de photons $\langle n \rangle = \langle \hat{N} \rangle$ donc à l'intensité du rayonnement.

^a. Pour n'importe quel état car tous les autres états sont combinaisons linéaires des états nombres.

7.4 lame séparatrice

Après avoir étudié la détection de photons, étudions la lame séparatrice. L'étude est justifiée car une telle lame permet de créer des mélanges entre différents modes et donc de les additionner ou de les soustraire. Considérons quatre modes décrits par \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} et \hat{d} , deux en entrée et deux en sortie de la lame comme sur la FIGURE 1.

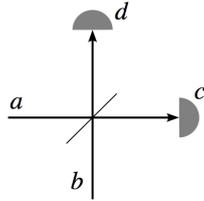


FIGURE 1 – lame séparatrice

L'action d'une lame séparatrice est représentée par une transformation unitaire ⁴⁷ entre les états entrant et les états sortant. De manière générale, on modélise cette transformation par une matrice unitaire ⁴⁸ dont les coefficients peuvent être choisis réels, quitte à changer de base.

47. Le fait que la transformation soit unitaire assure la conservation de l'énergie $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{b}\hat{b}^\dagger = \hat{c}\hat{c}^\dagger + \hat{d}\hat{d}^\dagger$.

48. Cette matrice n'est a priori pas hermitienne car ce n'est pas une observable que l'on peut mesurer.

Transformation unitaire de la lame séparatrice

$$\begin{pmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (155)$$

avec ^a

$$U = \begin{pmatrix} t & r \\ -r & t \end{pmatrix} \quad (156)$$

^a r et t sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude vérifiant $t^2 + r^2 = 1$.

Vous pouvez vous assurer que le fait que U soit unitaire implique que \hat{c} et \hat{d} vérifient les relations de commutations habituelles de deux oscillateurs harmoniques quantiques indépendants. Ceci garantit la conservation de la probabilité : si un photon a une probabilité de 1 d'être dans le mode \hat{a} ou \hat{b} alors il en sera de même dans le mode \hat{c} ou \hat{d} .

Par cette transformation, nous pouvons aisément changer de base (passer de (\hat{a}, \hat{b}) à (\hat{c}, \hat{d})). Par exemple, si l'on prépare un état arbitraire en entrée à partir du vide

$$|n_a, n_b\rangle_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{n_a! n_b!}} (\hat{a}^\dagger)^{n_a} (\hat{b}^\dagger)^{n_b} |0, 0\rangle \quad (157)$$

Nous pouvons réécrire cet état dans la base de sortie de la lame séparatrice

$$|\psi\rangle_{c,d} = \frac{1}{\sqrt{n_a! n_b!}} (t\hat{c}^\dagger + r\hat{d}^\dagger)^{n_a} (-r\hat{c}^\dagger + t\hat{d}^\dagger)^{n_b} |0, 0\rangle \quad (158)$$

Si l'on connaît l'état d'entrée et que l'on veut calculer le taux de détection à la sortie \hat{c} , on écrit

$$w_c \propto \langle \psi | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \psi \rangle = \langle \psi | t\hat{a}^\dagger + r\hat{b}^\dagger | \psi \rangle \quad (159)$$

Exemples

Le taux de détection à la sortie \hat{c} étant donné un état nombre en entrée \hat{a} et le vide en entrée \hat{b} est

$$\begin{aligned} w_a &\propto \langle n_a, 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n_a, 0 \rangle = n_a \\ w_b &\propto \langle n_a, 0 | \hat{b}^\dagger \hat{b} | n_a, 0 \rangle = 0 \\ w_c &\propto \langle n_a, 0 | (t\hat{a}^\dagger + r\hat{b}^\dagger)(t\hat{a} + r\hat{b}) | n_a, 0 \rangle = t^2 n_a \\ w_d &\propto \langle n_a, 0 | (-r\hat{a}^\dagger + t\hat{b}^\dagger)(-r\hat{a} + t\hat{b}) | n_a, 0 \rangle = r^2 n_a \end{aligned} \quad (160)$$

Le même exemple mais avec un état cohérent en entrée \hat{a} donne

$$\begin{aligned} w_c &\propto \langle \alpha, 0 | t^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, 0 \rangle = t^2 |\alpha|^2 \\ w_d &\propto \langle \alpha, 0 | r^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, 0 \rangle = r^2 |\alpha|^2 \end{aligned} \quad (161)$$

Si on considère un état cohérent dans les deux canaux d'entrée, on obtient

$$\begin{aligned} w_a &\propto |\alpha|^2 \\ w_b &\propto |\beta|^2 \\ w_c &\propto t^2|\alpha|^2 + r^2|\beta|^2 + rt(\alpha^*\beta + \alpha\beta^*) \end{aligned} \quad (162)$$

Si l'on suppose⁴⁹ que $\alpha = \sqrt{n_a}$ et que $\beta = \sqrt{n_b}e^{i\phi}$, on a

$$w_c \propto t^2n_a + r^2n_b + 2\sqrt{n_an_b} \cos \phi \quad (163)$$

On obtient des interférences. Mais si les états cohérents sont remplacés par des états nombres, on obtient

$$w_c \propto t^2n_a + r^2n_b \quad (164)$$

et donc les interférences disparaissent. On retiendra le résultat suivant.

États interférents à travers une lame séparatrice

Pour deux états cohérents^a $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ en entrée d'une lame séparatrice, on observe des interférences en sortie et on mesure un taux de détection

$$w_c \propto t^2n_a + r^2n_b + 2\sqrt{n_an_b} \cos \phi \quad (165)$$

Pour deux états nombres $|n\rangle_a$ et $|n\rangle_b$ en entrée d'une lame séparatrice, on n'observe pas d'interférence en sortie et on mesure un taux de détection

$$w_c \propto t^2n_a + r^2n_b \quad (166)$$

a. Tels que $\alpha = \sqrt{n_a}$ et $\beta = \sqrt{n_b}e^{i\phi}$.

On peut se convaincre en faisant le calcul que si l'un des états en entrée est cohérent et l'autre nombre, il n'y a pas non plus d'interférence. Nous pouvons voir ce résultat comme une tentative pour mesurer la phase d'un état nombre relativement à un état cohérent. Nous trouvons que en moyenne la phase possède un comportement comme si elle était aléatoire d'où l'idée que "les états nombres n'ont pas de phase". Mais attention, cela ne veut pas dire que des états nombres ne peuvent pas créer d'interférences !

7.5 Interférométrie

Dans cette partie, nous nous intéressons aux phénomènes d'interférences. Pour cela, considérons l'interféromètre le plus simple qui existe : un interféromètre de MACH-ZEHNDER dont un schéma est présent sur la FIGURE 2.

49. La phase acquise peut être due à une différence de marche entre les deux faisceaux incidents *i.e.* par une différence de longueur de trajet parcouru.

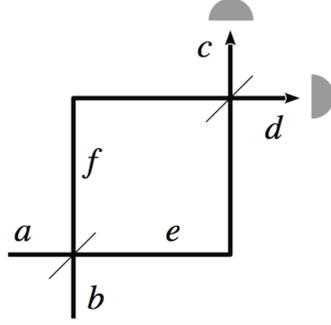


FIGURE 2 – Interféromètre de MACH-ZEHNDER

Les deux lames séparatrices sont notées 1 et 2, et on introduit les champs à l'intérieur de l'interféromètre \hat{e} et \hat{f} . Par ailleurs, nous notons \hat{a} et \hat{b} les champs entrant et \hat{c} et \hat{d} les champs sortant de l'interféromètre.

Ainsi, grâce à la transformation unitaire induite de la lame 1, nous pouvons écrire

$$\hat{e} = t_1 \hat{a} + r_1 \hat{b} \quad \hat{f} = -r_1 \hat{a} + t_1 \hat{b} \quad (167)$$

Notons que nous devons aussi tenir compte de la propagation des champs \hat{e} et \hat{f} à l'intérieur de l'interféromètre en incluant une phase accumulée entre les deux lames séparatrices. Nous avons donc

$$\hat{c} = t_2 \hat{e} e^{ikL_e} + r_2 \hat{f} e^{ikL_f} \quad \hat{d} = -r_2 \hat{e} e^{ikL_e} + t_2 \hat{f} e^{ikL_f} \quad (168)$$

avec L_e et L_f les longueurs des deux chemins parcourus. On définit la phase relative

$$\varphi = k(L_e - L_f) \quad (169)$$

et on suppose que les lames séparatrices sont des lames 50/50 donc $r_1 = r_2 = t_1 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, nous obtenons

$$\hat{c} = \frac{1}{2} e^{ik(L_e+L_f)/2} \left((\hat{a} + \hat{b}) e^{i\varphi/2} + (-\hat{a} + \hat{b}) e^{-i\varphi/2} \right) \quad (170)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\hat{c} = \frac{1}{2} e^{ik(L_e+L_f)/2} \left(-i \sin \frac{\varphi}{2} \hat{a} + \cos \frac{\varphi}{2} \hat{b} \right) \quad (171)$$

Nous pouvons ainsi déterminer le taux de détection au niveau du détecteur c .

Taux de détection pour un interféromètre de type Mach-Zehnder

Le taux de détection à la sortie d'un interféromètre ^a de type MACH-ZEHNDER pour deux champs \hat{a} et \hat{b} en entrée est

$$\begin{aligned} w_c &\propto \langle \psi | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \psi | \left((1 - \cos \varphi) \hat{a}^\dagger \hat{a} + (1 - \cos \varphi) \hat{b}^\dagger \hat{b} + i \sin \varphi (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \right) | \psi \rangle \end{aligned} \quad (172)$$

où $|\psi\rangle$ est un état arbitraire du champ entrant dans l'interféromètre ^b.

^a. Nous avons choisi $r_1 = r_2 = t_1 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour les deux lames séparatrices.

^b. C'est un état $|\psi_a, \psi_b\rangle$ de l'espace de HILBERT produit tensoriel des espaces des deux champs $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$.

Pour prendre un exemple, nous envoyons le vide dans le canal b . Ainsi, on a $|\psi\rangle = |n_a, 0\rangle$. Nous obtenons

$$w_c \propto \langle n_a | (1 - \cos \varphi) \hat{a}^\dagger \hat{a} | n_a \rangle = (1 - \cos \varphi) \langle n_a | \quad (173)$$

Nous venons montrer que même si les "états nombres n'ont pas de phase", nous observons des interférences. De plus, deux photons n'interagissent pas entre eux mais le calcul précédent montre que un photon peut interférer avec lui-même ⁵⁰.

7.6 Détection homodyne

Les photodétecteurs d'aujourd'hui ne sont pas capables de suivre une oscillation d'un champ électrique car ce dernier oscille trop rapidement. Cependant, on arrive à détecter des champs dans le but de les caractériser (son amplitude et sa phase). La détection homodyne est une méthode indirecte pour déterminer les quadratures Q et P d'un champ inconnu et donc de déterminer son amplitude et sa phase. Cette méthode se base sur un champ de référence appelé oscillateur local.

Le dispositif optique utilisé pour une détection homodyne est une lame séparatrice 50/50 comme celle de la FIGURE 1. Nous considérons que le canal b comporte le champ inconnu noté $|\psi\rangle$ et nous injectons dans le canal a un état cohérent $|\alpha\rangle$ qui sert d'oscillateur local. Nous pouvons écrire les taux de détections des détecteurs c et d en sortie

$$\begin{aligned} w_c &\propto \langle \psi, \alpha | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \psi, \alpha \rangle \\ w_d &\propto \langle \psi, \alpha | \hat{d}^\dagger \hat{d} | \psi, \alpha \rangle \end{aligned} \quad (174)$$

On réécrit les expressions précédentes en fonction de \hat{a} et \hat{b} (on oublie les facteurs 1/2)

⁵⁰. Penser à l'expérience des fentes de YOUNG.

$$\begin{aligned}
w_c &\propto \langle \psi, \alpha | (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(\hat{a} + \hat{b}) | \psi, \alpha \rangle \\
w_d &\propto \langle \psi, \alpha | (-\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)(-\hat{a} + \hat{b}) | \psi, \alpha \rangle
\end{aligned} \tag{175}$$

On développe les expressions précédentes en faisant attention que les opérateurs ne commutent pas et on fait agir les opérateurs qui agissent sur l'oscillateur local $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned}
w_c &\propto |\alpha|^2 + \langle \psi | \hat{b}^\dagger \hat{b} | \psi \rangle + \left(\alpha^* \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle + \alpha \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle \right) \\
w_d &\propto |\alpha|^2 + \langle \psi | \hat{b}^\dagger \hat{b} | \psi \rangle - \left(\alpha^* \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle + \alpha \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle \right)
\end{aligned} \tag{176}$$

En soustrayant les deux signaux détectés, on obtient

$$w_c - w_d \propto \alpha^* \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle + \alpha \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle \tag{177}$$

On pose maintenant $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. On peut régler la valeur de θ en variant la phase accumulée (longueur du chemin optique) de l'oscillateur local. Ainsi,

$$w_c - w_d \propto \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle e^{-i\theta} + \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle e^{i\theta} \tag{178}$$

On voit que pour $\theta = 0$, on obtient (on oublie ici un facteur $\sqrt{2}$)

$$\begin{aligned}
Q &= \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle \\
&\propto \langle \psi | (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle \\
&\propto w_c - w_d
\end{aligned} \tag{179}$$

De même pour $\theta = \pi/2$, on obtient (le facteur i s'élimine avec la définition de \hat{P})

$$\begin{aligned}
P &= \langle \psi | \hat{P} | \psi \rangle \\
&\propto \langle \psi | (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \hat{b} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{b}^\dagger | \psi \rangle \\
&\propto w_c - w_d
\end{aligned} \tag{180}$$

Ainsi, soustraire les deux signaux w_c et w_d permet en faisant varier la phase de l'oscillateur local de mesurer les quadratures Q et P d'un champ inconnu et donc de le représenter dans l'espace des phases. On peut ainsi remonter à son amplitude et sa phase.

Cette méthode permet en outre de mesurer des états comprimés dont l'étude et la production ont été discutées au début de ce cours.

Détection homodyne

La détection homodyne permet de mesurer les quadratures d'un champ inconnu à partir d'un champ de référence appelé oscillateur local, état cohérent $|\alpha\rangle$ avec $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$.

Pour ^a $\theta = 0$, on obtient

$$Q \propto w_c - w_d \quad (181)$$

Pour $\theta = \pi/2$, on obtient

$$P \propto w_c - w_d \quad (182)$$

Une telle mesure permet donc de représenter un champ dans l'espace des phases (Q, P) et ainsi remonter à son amplitude et sa phase.

a. On règle la valeur de θ en faisant varier la phase de l'oscillateur local.

7.7 Détection de deux photons

Nous avons montré précédemment que la détection du champ électrique produit par un photon se fait par la mesure de l'opérateur $\hat{E}^{(-)}\hat{E}^{(+)}$. Nous démontrons dans cette partie que le bon opérateur à mesurer pour détecter deux photons est $\hat{E}_a^{(-)}\hat{E}_b^{(-)}\hat{E}_b^{(+)}\hat{E}_a^{(+)}$ où les indices a et b correspondent aux deux électrons a et b détectés⁵¹. On rappelle qu'une mesure d'un opérateur \hat{A} correspond à la valeur moyenne de cet opérateur pour un état donné $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.

Nous imaginons alors la photoionisation de deux électrons a et b par un même champ électrique. Nous souhaitons calculer le taux de détection $w^{(2)}$ correspondant au taux de photoionisation de deux électrons qui passent de leurs états liés (dans l'atome) aux états libres de vecteurs d'onde k_1 et k_2 .

L'opérateur dipôle électrique à considérer ici est

$$\hat{\mathbf{D}} = q(\hat{\mathbf{r}}_a + \hat{\mathbf{r}}_b) \quad (183)$$

où $\hat{\mathbf{r}}_a$ et $\hat{\mathbf{r}}_b$ sont les opérateurs positions des deux électrons a et b . La méthode perturbative au premier ordre habituelle ne suffit pas dans notre cas car

$$\langle k_1, k_2 | \hat{V} | a, b \rangle \propto \langle k_1, k_2 | \hat{\mathbf{r}}_a | a, b \rangle + \langle k_1, k_2 | \hat{\mathbf{r}}_b | a, b \rangle \quad (184)$$

et l'opérateur $\hat{\mathbf{r}}_a$ par exemple n'agit que sur l'électron a donc le premier terme de la somme est proportionnel à $\langle k_2 | b \rangle$ qui est nul car ce sont deux états orthogonaux. Il en

51. On rappelle que la détection d'un photon se fait par effet photoélectrique et donc que la détection d'un photon correspond à la détection d'un électron libre ionisé par le champ électrique de ce photon.

est de même pour le deuxième terme de la somme. Ainsi, nous avons besoin d'aller au deuxième ordre dans le développement perturbatif.

Avec le calcul au deuxième ordre⁵² dont la méthode générale est présentée précédemment, nous déterminons l'amplitude⁵³ de la transition de l'état $|a, b\rangle$ (les deux électrons sont liés dans l'atome) vers l'état $|k_1, k_2\rangle$ (les deux électrons sont libres avec des vecteurs d'onde k_1 et k_2).

$$\begin{aligned} c_{|a,b\rangle \rightarrow |k_1, k_2\rangle}^{(2)}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_0^t dt' \langle f | \hat{V}(t') | n \rangle c_n^{(1)}(t') e^{-i\omega_{nf}t'} \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_n \int_0^t dt' \langle f | \hat{V}(t') | n \rangle \left(\int_0^{t'} dt'' \langle f | \hat{V}(t'') | i \rangle e^{-i\omega_{if}t''} \right) e^{-i\omega_{nf}t'} \end{aligned} \quad (185)$$

où $|i\rangle = |a, b\rangle$ est l'état initial, $\omega_{nf} = \omega_n - \omega_f$ et la somme porte sur les états propres notés $|n\rangle$ de l'hamiltonien de l'atome (voir méthode perturbative dépendante du temps).

Nous définissons $\hat{\mathbf{D}}_a = q\hat{\mathbf{r}}_a$ et $\hat{\mathbf{D}}_b = q\hat{\mathbf{r}}_b$ pour ainsi définir $\hat{V}_a = -\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_a$ et $\hat{V}_b = -\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_b$. L'expression précédente une fois développée présente des termes croisés $\hat{\mathbf{D}}_a \cdot \hat{\mathbf{D}}_b$ qui sont les seuls termes qui vont donner un résultat non nul une fois évalués pour les états considérés. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} c_{|a,b\rangle \rightarrow |k_1, k_2\rangle}^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_n \left[\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle f | \hat{V}_a(t') | n \rangle \langle n | \hat{V}_b(t'') | i \rangle e^{-i\omega_{in}t''} e^{-i\omega_{nf}t'} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle f | \hat{V}_b(t') | n \rangle \langle n | \hat{V}_a(t'') | i \rangle e^{-i\omega_{in}t''} e^{-i\omega_{nf}t'} \right] \end{aligned} \quad (186)$$

Nous avons vu que seul l'opérateur $\hat{E}^{(+)}$ contenant les fréquences positives devait être pris en compte dans ce calcul dans l'expression de \hat{V}_a et \hat{V}_b . Or cet opérateur ne contient que l'opérateur d'annihilation du champ et donc \hat{V}_a et \hat{V}_b commutent. On obtient

$$c_{|a,b\rangle \rightarrow |k_1, k_2\rangle}^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_n \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle f | \hat{V}_a(t') | n \rangle \langle n | \hat{V}_b(t'') | i \rangle e^{-i\omega_{in}t''} e^{-i\omega_{nf}t'} \quad (187)$$

Par le calcul des deux intégrales⁵⁴, nous voyons que les parties temporelles correspondant aux électrons a et b se découpent et on obtient

$$\begin{aligned} c_{|a,b\rangle \rightarrow |k_1, k_2\rangle} &= \frac{1}{\hbar^2} \langle \psi_f, k_1, k_2 | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b) \hat{D}_b \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a) \hat{D}_a | \psi_i, a, b \rangle \\ &\quad \times \frac{\sin(\omega_{k_1} - \omega_a - \omega) t/2}{(\omega_{k_1} - \omega_a - \omega)} \frac{\sin(\omega_{k_2} - \omega_b - \omega) t/2}{(\omega_{k_2} - \omega_b - \omega)} \end{aligned} \quad (188)$$

52. En connaissant la solution au premier ordre que l'on utilise pour déterminer le terme d'ordre deux.

53. Cette amplitude prise en module carré donne la probabilité de transition.

54. Cette étape est très technique, nous ne la présentons pas ici mais le calcul est expliqué en détail dans les notes de Chris.

où $|\psi_i\rangle$ et $|\psi_f\rangle$ sont respectivement l'état initial et final du champ électrique. Nous pouvons alors déterminer la probabilité correspondante (toujours en utilisant la même approximation qui consiste à remplacer le sinus cardinal en un dirac)

$$\mathbb{P}^{(2)}(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{t^2}{\hbar^4} \sum_{k_1, k_2, \psi_f} |\langle \psi_f | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_b) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_a) | \psi_i \rangle|^2 |\langle k_1 | \hat{D}_a | a \rangle|^2 |\langle k_2 | \hat{D}_b | b \rangle|^2 \times \delta(\omega_{k_1} - \omega_a - \omega) \delta(\omega_{k_2} - \omega_b - \omega) \quad (189)$$

Comme cette probabilité est quadratique par rapport au temps, nous définissons le taux de coïncidence par $w^{(2)} = \frac{\mathbb{P}^{(2)}(t)}{t^2}$ et non comme la simple dérivée temporelle de la probabilité dans le cas d'un photon. En utilisant la relation de fermeture $\sum_{\psi_f} |\psi_f\rangle \langle \psi_f| = \hat{1}$, on obtient finalement

Taux de coïncidence

Le taux de détection (ou de coïncidence) de deux photons est donné par

$$w^{(2)} = A_a A_b \langle \psi | \hat{E}_a^{(-)} \hat{E}_b^{(-)} \hat{E}_b^{(+)} \hat{E}_a^{(+)} | \psi \rangle \quad (190)$$

où $|\psi\rangle$ est l'état initial ^a du champ électrique et A_a et A_b ne dépendent que des paramètres des détecteurs

$$A_a = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_1} |\langle k_1 | \hat{D}_a | a \rangle|^2 \delta(E_a - E_{k_1} - \hbar\omega) \quad (191)$$

$$A_b = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_2} |\langle k_2 | \hat{D}_b | b \rangle|^2 \delta(E_b - E_{k_2} - \hbar\omega)$$

^a. C'est un état $|\psi_a, \psi_b\rangle$ de l'espace de HILBERT produit tensoriel des espaces des deux champs $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$.

La quantité $w^{(2)}$ est le taux de détection de deux photons, l'un sur le détecteur a et l'autre sur le détecteur b .

Prenons quelques exemples. Pour un état nombre $|1\rangle$ (un photon unique), on a

$$w^{(2)} \propto \langle 1 | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(+)} | 1 \rangle = 0 \quad (192)$$

Nous trouvons un résultat intuitif : nous ne pouvons pas détecter deux photons simultanément lorsqu'il n'y a qu'un photon unique.

Pour un état cohérent $|\alpha\rangle$, on trouve

$$\begin{aligned}
w^{(2)} &\propto \langle \alpha | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \hat{E}^{(+)} | \alpha \rangle \\
&= \frac{E_0^4}{16} \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | \alpha \rangle \\
&= \frac{E_0^4}{16} |\alpha|^4 \\
&= w_a^{(1)} w_b^{(1)}
\end{aligned} \tag{193}$$

Ainsi pour un état cohérent, la probabilité de détecter deux photons est proportionnelle à la probabilité de détecter chaque photon individuellement.

Il est plus commun d'utiliser deux détecteurs à la sortie d'une lame séparatrice. Si l'on note comme d'habitude \hat{a} et \hat{b} les champs en entrée et \hat{c} et \hat{d} les champs en sortie, le taux de coïncidence aux deux sorties sera

Taux de coïncidence pour deux détecteurs

Le taux de détection (ou de coïncidence) de deux photons pour deux détecteurs à la sortie d'une lame séparatrice ^a est donné par

$$\begin{aligned}
w_{cd}^{(2)} &= A_c A_d \langle \psi | \hat{E}_c^{(-)} \hat{E}_d^{(-)} \hat{E}_d^{(+)} \hat{E}_c^{(+)} | \psi \rangle \\
&\propto \langle \psi | \hat{c}^\dagger \hat{d}^\dagger \hat{d} \hat{c} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | (t\hat{a}^\dagger + r\hat{b}^\dagger)(-r\hat{a}^\dagger + t\hat{b}^\dagger)(-r\hat{a} + t\hat{b})(t\hat{a} + r\hat{b}) | \psi \rangle
\end{aligned} \tag{194}$$

où $|\psi\rangle$ est l'état initial ^b du champ électrique et A_c et A_d ne dépendent que des paramètres des détecteurs.

^a. Nous notons \hat{a} et \hat{b} les champs en entrée et \hat{c} et \hat{d} les champs de sortie.

^b. C'est un état $|\psi_a, \psi_b\rangle$ de l'espace de HILBERT produit tensoriel des espaces des deux champs $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$.

Pour un champ électrique $|\alpha, 0\rangle$ en entrée, nous obtenons $w_{cd}^{(2)} = w_c^{(1)} w_d^{(1)}$ mais pour un unique photon on obtient un taux de coïncidence nul. Ainsi, une telle mesure permet de distinguer facilement un unique photon d'un état cohérent. Nous définissons pour cela une fonction d'auto-corrélation que nous ne développons pas dans ce cours.

7.8 Champs électriques pulsés

Notre formalisme ne permet pas de traiter la lumière pulsée, qu'elle soit sous forme d'état cohérent ou d'états à nombres fixes de photons. Pour obtenir des impulsions, il faut introduire la notion de champ à large bande spectrale.

Impulsions classiques

Afin d'introduire un aspect temporel à un champ quantique, rappelons comment cela se fait en électrodynamique classique. Une impulsion est représentée par une somme sur différentes composantes fréquentielles que nous traitons comme des ondes planes. Nous donnons un exemple à une dimension.

$$E(z, t) = \frac{E_0}{2} \sum_n \alpha_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + c.c. \quad (195)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique et α_n est un nombre complexe arbitraire. L'intensité du champ (en faisant l'approximation séculaire) est

$$I(z, t) \propto E^* E = \frac{E_0^2}{4} \sum_{n,m} \alpha_n^* \alpha_m e^{-i(k_n z - \omega_n t)} e^{i(k_m z - \omega_m t)} + c.c. \quad (196)$$

que nous pouvons écrire sous forme d'intégrales

$$\begin{aligned} I(z=0, t) &\propto \int d\omega e^{i\omega t} \alpha^*(\omega) \int d\omega' \alpha(\omega') e^{-i\omega' t} \\ &= \int d\delta e^{i\delta t} \int d\Omega \alpha^*\left(\frac{\Omega + \delta}{2}\right) \alpha\left(\frac{\Omega - \delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (197)$$

où l'on a fait le changement de variables $\omega = \frac{\Omega + \delta}{2}$ et $\omega' = \frac{\Omega - \delta}{2}$. Le profil temporel de l'intensité est donc la transformée de FOURIER de l'auto-convolution de la fonction $\alpha(\omega)$.

Champ quantique pulsé

L'approche classique précédente peut facilement être généralisée à une somme de champs quantiques, chacun dans un état cohérent $|\psi\rangle = |\alpha_1, \alpha_2, \dots\rangle$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= \sum_{n,p} i \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 V}} \left(\mathbf{e}_p \hat{a}_{n,p} e^{i(k_n z - \omega_n t)} - \mathbf{e}_p^* \hat{a}_{n,p}^\dagger e^{-i(k_n z - \omega_n t)} \right) \\ &= \sum_{n,p} \mathbf{e}_p \hat{E}_{n,p}^{(+)} + \mathbf{e}_p^* \hat{E}_{n,p}^{(-)} \\ &= \hat{\mathbf{E}}^{(+)} + \hat{\mathbf{E}}^{(-)} \end{aligned} \quad (198)$$

où la somme porte sur les différents modes n et sur les deux polarisations orthogonales p . En utilisant la règle d'or de FERMI pour calculer le taux de photodétection comme fait précédemment, on trouve

$$w^{(1)}(t) \propto \|\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(z, t) |\psi\rangle\|^2 = \sum_{n,m} \langle \psi | \hat{E}_n^{(-)}(z, t) \hat{E}_m^{(+)}(z, t) | \psi \rangle \quad (199)$$

Pour un état cohérent, on trouve

$$w^{(1)} \propto \sum_{n,m} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 V}} \alpha_n^* e^{i(k_n z - \omega_n t)} \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\epsilon_0 V}} \alpha_m e^{-i(k_m z - \omega_m t)} = E_0^* E_0 \quad (200)$$

Ce résultat est similaire au cas classique à condition que l'on définisse

$$E_0 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots | \hat{E}^{(+)} | \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle \quad (201)$$

7.9 Impulsions de photon unique

Nous pouvons construire une impulsion réaliste multi-fréquentielle à un photon en regardant la solution de WEISSKOPF-WIGNER (voir précédemment) sur l'émission spontanée. Après qu'un atome soit dans son état excité avec aucun photon dans le champ électrique $|e, 0\rangle$, il peut se désexciter par émission spontanée de manière certaine au bout d'un temps infini et l'état de l'atome dans son état fondamental avec un photon dans le champ électrique s'écrit

$$|\psi(t \rightarrow \infty)\rangle = \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2\epsilon_0 V \hbar}} d \sin \theta_k \frac{1}{i(\omega_k - \omega_0) + \Gamma/2} |f, 1_k\rangle \quad (202)$$

où la somme porte sur les différents modes dans lequel peut se trouver le photon. Nous pouvons utiliser cet état pour calculer le taux de détection pour un détecteur situé en $z = L$ étant donné un atome à la position $z = 0$ et supposé excité à $t = 0$.

Nous nous intéressons maintenant au profil temporel d'une impulsion. On a

$$w^{(1)}(t) \propto \|\hat{E}^{(+)}(L, t) |\psi\rangle\|^2 = \left\| \sum_m i \sqrt{\frac{\hbar \omega_m}{2\epsilon_0 V}} \hat{a}_m e^{-(k_m L - \omega_m t)} |\psi\rangle \right\|^2 \quad (203)$$

On définit une nouvelle variable $\tau = t - \frac{L}{c}$ et on utilise $k_m/\omega_m = c$. Nous avons une double somme sur les opérateurs de champs m (les plusieurs modes considérés) et les états du champs n qui s'annule pour ne faire qu'une somme. Nous obtenons (on passe à la limite continue en introduisant la densité d'états)

$$\begin{aligned} w^{(1)}(t) &\propto \left| \sum_n \frac{\omega_n}{2\epsilon_0 V} d \frac{e^{-i\omega_n \tau}}{\omega_0 - \omega_n - i\Gamma/2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{d}{2\epsilon_0 V} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^3} \int d\omega \omega^3 \frac{e^{-i\omega \tau}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma/2} \right|^2 \end{aligned} \quad (204)$$

Remarquons que le résultat ne dépend pas du volume V (et heureusement). Cette intégrale peut être réécrite

$$w^{(1)}(t) \propto \left| \int d\omega (\omega - \omega_0 + \omega_0)^3 \frac{e^{-i(\omega - \omega_0)\tau}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma/2} e^{(-i\omega_0\tau)} \right|^2 \quad (205)$$

Le terme de phase $e^{-i\omega_0\tau}$ peut être enlevé de l'intégrale (car c'est le module carré qui compte) et on fait le changement de variables $u = \omega_0 - \omega$. On utilise le théorème des résidus pour calculer cette intégrale. On intègre sur un contour dans le plan complexe. Nous avons un unique pôle dans la partie supérieure du plan complexe pour $u = i\Gamma/2$. Si $\tau < 0$, le contour peut être fermé par dessous et l'intégrale est nulle. Si $\tau > 0$, nous refermons le contour par dessus et le calcul du résidu donne le résultat suivant

$$w^{(1)}(t) \propto \left| (\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})^3 e^{-\frac{\Gamma}{2}\tau} \right|^2 \quad (206)$$

que l'on peut réécrire sous la forme suivante

Profil temporel d'une impulsion de photon unique

Le taux de détection d'un photon unique émis par un atome ^a à $t = 0$ détecté à une position $z = L$ présente le profil temporel suivant

$$w^{(1)}(t) \propto \theta(\tau) e^{-\Gamma\tau} = \theta(t - \frac{L}{c}) e^{-\Gamma(t - \frac{L}{c})} \quad (207)$$

où θ est la fonction HEAVISIDE. Cela correspond à une impulsion avec une durée bien déterminée commençant au temps $t = \frac{L}{c}$ et qui décroît de manière exponentielle.

^a. Par exemple par émission spontanée.

Notre formalisme introduit précédemment concernant l'effet d'une lame séparatrice reste valide avec la nouvelle définition d'un photon "multi-fréquentiel"

$$\hat{\mathbf{E}}_a = \sum_{k,p} i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left(\mathbf{e}_p \hat{a}_{a,k} e^{i(k_a z - \omega_k t)} - \mathbf{e}_p^* \hat{a}_{a,k}^\dagger e^{-i(k_a z - \omega_k t)} \right) \quad (208)$$

De même pour \hat{b} , \hat{c} et \hat{d} .

Lorsque l'on observe continûment la lumière émise par un ensemble de sources irradiées de manière continue, nous pouvons mesurer le taux de coïncidence pour deux temps différents

$$w_{c,d}^{(2)} \propto \|\hat{E}^{(+)}(z, t_c) \hat{E}^{(+)}(z, t_d) |\psi\rangle\|^2 \quad (209)$$

En utilisant une lame séparatrice, nous pouvons mesurer le taux de coïncidence à deux endroits (détecteurs) et deux temps différents

$$w_{c,d}^{(2)} \propto \|\hat{E}^{(+)}(z_c, t_c) \hat{E}^{(+)}(z_d, t_d) |\psi\rangle\|^2 \quad (210)$$

Si l'ensemble de sources est un unique atome, nous trouvons $w^{(2)}(t_c = t_d) = 0$ et pour des temps séparés de plus du temps de relaxation de l'atome ($|t_d - t_c| \gg \Gamma^{-1}$) nous trouvons $w^{(2)} = w^{(1)}(t_c)w^{(1)}(t_d)$. En d'autres termes, pour une courte séparation temporelle nous observons un comportement non-classique alors que au temps longs la source ressemble à une source classique. On parle de phénomène d'*antibunching* et de *bunching*. La mesure de la fonction d'auto-corrélation en intensité permet de quantifier

ces effets et d'identifier un critère expérimental qui assure que la source est par exemple une source de photons uniques⁵⁵.

7.10 Bruit de détection et précision dans un interféromètre

Précision pour une mesure d'intensité

Un état cohérent est une superposition de différents états de plusieurs photons (états nombres). Ainsi, si l'on détecte son intensité en mesurant le taux de détection par effet photoélectrique $w^{(1)} \propto \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, nous espérons trouver différents taux pour différentes réalisations (fluctuation statistique purement quantique). Cet effet est caractérisé par une variance

$$\begin{aligned}
 (\delta w^{(1)})^2 &\propto \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle^2 \\
 &= \langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - |\alpha|^4 \\
 &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4 \\
 &= |\alpha|^2
 \end{aligned} \tag{211}$$

On peut alors en déduire le résultat suivant.

Précision de mesure d'intensité

La précision relative d'une mesure d'intensité, si le champ est un état cohérent $|\alpha\rangle$, est

$$\frac{\delta w^{(1)}}{w^{(1)}} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \tag{212}$$

où $\bar{n} = \langle \hat{N} \rangle$ est le nombre moyen de photons dans l'état du champ considéré.

On peut se convaincre que si une telle mesure est faite après une lame séparatrice caractérisée par un coefficient de transmission t , alors on obtient

$$\frac{\delta w^{(1)}}{w^{(1)}} = \frac{1}{t|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 \bar{n}}} \tag{213}$$

Nous avons une limitation purement quantique de la précision évoluant avec la racine carrée du nombre de photons détectés.

Précision pour une mesure de phase

Afin de mesurer la phase d'un champ, nous utilisons la méthode de détection homodyne présentée précédemment. Introduisons l'opérateur homodyne de la manière suivante

$$\hat{h} = \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} \tag{214}$$

55. Par exemples des centres NV (*Nitrogen-Vacancy*).

Nous rappelons que si l'un des deux champs envoyés dans la lame séparatrice est un état cohérent qui sert de référence (oscillateur local), la mesure de \hat{h} donne les quadratures d'un champ inconnu injecté dans la deuxième voie de la lame séparatrice en faisant varier la phase de l'oscillateur local.

La transformation unitaire d'un interféromètre qui crée un déphasage de $\pm\frac{\varphi}{2}$ dans chaque bras est représentée par la matrice

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (215)$$

où la première et la dernière matrice correspondent à une réflexion parfaite sur un miroir et celle du milieu au déphasage de $\pm\frac{\varphi}{2}$ dans chaque bras. La matrice U sert à transformer (\hat{a}, \hat{b}) en (\hat{c}, \hat{d}) .

On a alors

$$\hat{h} = \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} = \cos\varphi(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}) + i\sin\varphi(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \quad (216)$$

Pour un état $|\alpha, 0\rangle$ (le champ inconnu est le vide $|0\rangle$), on trouve

$$\langle \hat{h} \rangle = \cos\varphi |\alpha|^2 \quad (217)$$

Et un calcul de la variance de \hat{h} donne

$$(\Delta\hat{h})^2 = \langle \hat{h}^2 \rangle - \langle \hat{h} \rangle^2 = |\alpha|^2 \quad (218)$$

On définit la précision pour une mesure de phase

$$\delta\varphi = \frac{\delta\hat{h}}{|\frac{\partial\hat{h}}{\partial\varphi}|} = \sqrt{\langle \delta\hat{h}^2 \rangle} / \frac{\partial\hat{h}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi |\alpha|} \quad (219)$$

Comme pour une mesure d'intensité, la précision d'une mesure de phase varie comme la racine carrée du nombre de photons détectés. La plus petite incertitude est atteinte pour $\varphi = \pi/2$.

Curieusement, nous pouvons trouver un autre point de fonctionnement pour lequel $\delta\varphi = \frac{1}{|\alpha|}$. Si l'on ne regarde qu'une sortie de l'interféromètre sur une frange sombre, même si le signal est quadratique par rapport à φ , il y a moins de bruit. En effet, on considère la mesure de $\hat{d}^\dagger \hat{d}$ pour une phase φ proche de zéro.

$$\hat{d}^\dagger \hat{d} = \sin^2\frac{\varphi}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \cos^2\varphi \hat{b}^\dagger \hat{b} \approx \frac{\varphi^2}{4} \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (220)$$

Considérons que l'on met en entrée un état $|\alpha, 0\rangle$. La variance est donné par

$$\begin{aligned} \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle - \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle^2 &= \langle \hat{d}^\dagger \hat{d}^\dagger \hat{d} \hat{d} \rangle + \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle - \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle^2 \\ &= \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle \\ &= \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (221)$$

La précision de mesure est alors donnée par

$$\delta\varphi = \frac{\delta\hat{d}}{\left|\frac{\partial\hat{d}}{\partial\varphi}\right|} = \sqrt{\langle\delta\hat{d}^2\rangle} / \frac{\partial\langle\hat{d}^\dagger\hat{d}\rangle}{\partial\varphi} = \frac{1}{|\alpha|} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \approx \frac{1}{|\alpha|} \quad (222)$$

Nous obtenons exactement le même rapport signal/bruit que dans la configuration homodyne présentée précédemment.

Précision de mesure en interférométrie avec des états comprimés

Considérons un état comprimé $|\xi\rangle = |0\rangle + \xi|2\rangle$ (nous ne considérons que le premier ordre de développement du vide quantique⁵⁶). Cet état est donc le champ inconnu que l'on cherche à mesurer par détection homodyne. Nous avons donc en entrée de la lame séparatrice un état $|\alpha, \xi\rangle$. Avec les mêmes notations que précédemment, on peut calculer

$$\langle\hat{h}\rangle = \cos\varphi|\alpha|^2 \quad (223)$$

En calculant la variance en prenant $\varphi = \pi/2$, on trouve

$$\begin{aligned} \langle\delta\hat{h}^2\rangle &= \langle\alpha, \xi|\hat{h}^2|\alpha, \xi\rangle \\ &= |\alpha|^2 - \xi\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle\langle 0|\hat{b}^2|2\rangle + \langle\hat{a}^2\rangle\langle 2|\hat{b}^{\dagger 2}|0\rangle \\ &= |\alpha|^2(1 - 2\sqrt{2}\xi\cos 2\theta) \end{aligned} \quad (224)$$

où θ est la phase de l'état cohérent par rapport à l'état comprimé si l'on note $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$. Un choix approprié de θ donne le même signal avec un bruit réduit.

$$\delta\varphi = \sqrt{\langle\delta\hat{h}^2\rangle} / \frac{\partial\hat{h}}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}(1 - \sqrt{2}\xi\cos 2\theta) \quad (225)$$

Le rapport signal/bruit est alors amélioré.

56. Voir équation 69.