Mécanique et Relativité Approfondies

Contrôle Continu LU3PY536 (Partie Exercices)

8 Novembre 2023

Le polycopié de cours, de TD et la calculatrice ne sont pas autorisés.

Formulaire

- Soient deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse constante v selon (Oz) par rapport à $\mathcal{R}$. Si un quadri-vecteur a pour coordonnées respectives A^μ et A'^μ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, alors la transformation de Lorentz s'écrit $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$ avec
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{1}$$
où $\beta = v/c$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. On donne $c \approx 3.10^5\text{km/s}$ la vitesse de la lumière dans le vide. Pour inverser la relation entre A'^μ et A^μ, il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.
- Une règle de longueur L au repos dans $\mathcal{R}$ et colinéaire à la direction (Oz) a une longueur contractée $L' = L/\gamma$ dans $\mathcal{R}'$.
- Le quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit
$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right). \tag{2}$$
Pour une particule de masse nulle (comme le photon), la quadri-impulsion est de genre lumière $p_\mu p^\mu = 0$. L'énergie de la particule est donc proportionnelle à son impulsion $E = pc$ où $p = |\boldsymbol{p}|$.

1 Fond Diffus Cosmologique [30pts]

Dans cet exercice, nous proposons de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'Univers en utilisant les anisotropies du fond diffus cosmologique. L'espace, lié à un référentiel $\mathcal{R}$ considéré fixe, baigne dans un rayonnement cosmologique caractérisé par une distribution de photons qui suit la loi de Planck : le nombre d^3N de photons contenus dans un volume V et dont l'impulsion vaut $\boldsymbol{p}$ à d^3p près est donné par $\mathrm{d}^3N = F(\boldsymbol{p})\mathrm{d}^3p$ avec
$$F(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\frac{V}{\exp(pc/k_\mathrm{B}T) - 1}, \tag{3}$$
où $p = |\boldsymbol{p}|$, k_B est la constante de Boltzmann et T est la température du rayonnement. Les quantités p, T et V sont associées au référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace. Nous souhaitons obtenir les expressions correspondantes pour un observateur terrestre, auquel on associe un référentiel $\mathcal{R}'$. On considère que $\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à vitesse constante v selon (Oz) par rapport à $\mathcal{R}$.

Q1. Exprimer les composantes du quadri-vecteur énergie-impulsion p^μ d'un photon dans $\mathcal{R}$ en fonction de ses composantes dans $\mathcal{R}'$.

Q2. On se place en coordonnées sphériques et on note θ et ϕ les angles associés [1] à l'impulsion $\boldsymbol{p}$ dans $\mathcal{R}$. On utilise des notations similaires avec une apostrophe pour désigner les quantités dans $\mathcal{R}'$.

a. À partir de la question précédente, montrer que
$$p = \gamma p'(1 + \beta\cos\theta'). \tag{4}$$

b. De même, montrer que
$$\phi = \phi', \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta\cos\theta'}. \tag{5}$$

1. On utilise les conventions usuelles : θ est l'angle entre $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{e}_z$ ($\theta \in [0, \pi]$), et ϕ est l'angle de la projection de $\boldsymbol{p}$ dans le plan (xOy) ($\phi \in [0, 2\pi]$).

Q3. L'élément d'intégration dans l'espace des impulsions dans $\mathcal{R}$ s'écrit $\mathrm{d}^3p = p^2\mathrm{d}p \sin\theta \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ en coordonnées sphériques.

a. À partir de l'équation (4), exprimer $(p/p')^2$ et $\mathrm{d}p/\mathrm{d}p'$ en fonction de γ, β et θ'.

b. En remarquant que $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta'} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta')}$ et en utilisant l'équation (5), montrer que

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta'} = \frac{1}{\gamma^2(1+\beta\cos\theta')^2}\,. \tag{6}$$

c. Finalement, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{\mathrm{d}^3p'} = \gamma(1+\beta\cos\theta')\,. \tag{7}$$

Q4. Le nombre de photons est un invariant relativiste $\mathrm{d}^3N = \mathrm{d}^3N'$. On en déduit que la distribution de Planck doit vérifier $F(\boldsymbol{p})\mathrm{d}^3p = F'(\boldsymbol{p}')\mathrm{d}^3p'$. Montrer que la distribution $F'(\boldsymbol{p}')$ observée dans $\mathcal{R}'$ s'écrit

$$F'(\boldsymbol{p}') = \frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\frac{\gamma^2V'(1+\beta\cos\theta')}{\exp(p'c/k_\mathrm{B}T')-1}\,, \tag{8}$$

avec une température non isotrope

$$T'(\theta') = \frac{T}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\,. \tag{9}$$

Q5. Déterminer la température la plus élevée T'_max et la plus faible T'_min observées dans $\mathcal{R}'$ puis montrer que la différence relative de températures s'écrit

$$\frac{\Delta T'}{T} \equiv \frac{T'_\mathrm{max}-T'_\mathrm{min}}{T} \approx 2\beta\,. \tag{10}$$

Les mesures les plus récentes donnent $T = 2,728\mathrm{K}$ et on observe une légère anisotropie du rayonnement reçu sur Terre $\Delta T' = 3,358\mathrm{mK}$. Estimer la vitesse v (en km/s) de la Terre par rapport à l'Univers. Commenter.

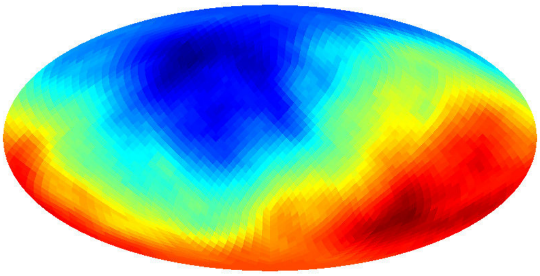

FIGURE 1 – Le dipole $T'(\theta')$ du fond diffus cosmologique mesuré par le satellite Planck.

2 Désintégration d'une Particule [20pts]

On considère la désintégration d'un méson D^0 en un méson $\bar{K}^0$ et un pion π^0 selon la réaction

$$D^0 \to \bar{K}^0 + \pi^0\,. \tag{11}$$

Q1. À partir de la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion, montrer que l'énergie du pion π^0 s'exprime en fonction des masses des particules par

$$E_{\pi^0} = \frac{m_{D^0}^2 + m_{\pi^0}^2 - m_{\bar{K}^0}^2}{2m_{D^0}}\,c^2\,. \tag{12}$$

Q2. On considère que le pion se désintègre ensuite en deux photons.

a. Dans le référentiel propre du pion π^0, expliquer pourquoi les quadri-vecteurs énergie-impulsion p_1^μ et p_2^μ des deux photons peuvent s'écrire

$$p_1^\mu = (E_\gamma/c, \boldsymbol{p})\,, \qquad \text{et} \qquad p_2^\mu = (E_\gamma/c, -\boldsymbol{p})\,. \tag{13}$$

b. Montrer que l'énergie E_γ d'un photon produit vérifie

$$E_\gamma = \frac{1}{2}m_{\pi^0}c^2\,. \tag{14}$$