Mécanique et Relativité Approfondies

Corrigé du Contrôle Continu LU3PY536

8 Novembre 2023

1 Fond Diffus Cosmologique

Q1. En appliquant une transformation de Lorentz selon la direction (Oz), nous avons $p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p'^\nu$ avec

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Attention, nous avons exprimé les composantes p^μ en fonction de p'^μ donc nous avons utlisé la transformation de Lorentz inverse, i.e. nous avons changé le signe de β. Explicitement, les composantes du quadri-vecteur énergie-impulsion vérifient

$$\begin{cases} E/c &= \gamma(E'/c + \beta p'_z) \\ p_x &= p'_x \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= \gamma(p'_z + \beta E'/c) . \end{cases} \tag{2}$$

Pour un photon (particule de masse nulle), nous avons $E = pc$ avec $p = |\boldsymbol{p}|$ (de même dans le référentiel $\mathcal{R}'$) donc ce système peut se réécrire

$$\begin{cases} p &= \gamma(p' + \beta p'_z) \\ p_x &= p'_x \\ p_y &= p'_y \\ p_z &= \gamma(p'_z + \beta p') . \end{cases} \tag{3}$$

Q2. En coordonnées sphériques après avoir fait un schéma, nous avons $p_z = p\cos\theta$ (et $p'_z = p'\cos\theta'$). La première équation du système précédent s'écrit donc

$$p = \gamma p'(1 + \beta\cos\theta') . \tag{4}$$

Les deux équations du milieu impliquent $\cos\phi = \cos\phi'$ et $\sin\phi = \sin\phi'$ donc on en déduit que $\phi = \phi'$. La troisième équation donne $p\cos\theta = \gamma p'(\cos\theta' + \beta)$. En combinant cette équation avec (4), on obtient

$$\cos\theta = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta\cos\theta'} . \tag{5}$$

Q3. À partir de l'équation (4), on trouve

$$\left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \gamma^2(1 + \beta\cos\theta')^2 . \tag{6}$$

De même en dérivant p par rapport à p', on trouve

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p'} = \gamma(1 + \beta\cos\theta') . \tag{7}$$

En utlisant l'équation (5) et en dérivant $\cos\theta$ par rapport à $\cos\theta'$, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta')} = \frac{1 + \beta\cos\theta' - (\beta + \cos\theta')\beta}{(1 + \beta\cos\theta')^2} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta\cos\theta')^2} = \frac{1}{\gamma^2(1 + \beta\cos\theta')^2} . \tag{8}$$

En combinant toutes les quantités et en remarquant que $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\phi' = 1$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{\mathrm{d}^3p'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p'} \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}(\cos\theta')} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\phi'} = \gamma(1 + \beta\cos\theta') . \tag{9}$$

Q4. Par invariance du nombre de photons, on a

$$F'(\boldsymbol{p}') = \frac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}^3 p'}\, F(\boldsymbol{p}) = \gamma(1+\beta\cos\theta') \times \frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\frac{V}{\exp(pc/k_\mathrm{B}T)-1}\,. \tag{10}$$

Or par contraction des longueurs, nous avons $V' = V/\gamma$ (seulement le côté du volume colinéaire à (Oz) est contracté), et avec l'équation (4) nous avons $p = \gamma p'(1+\beta\cos\theta')$. On en déduit

$$F'(\boldsymbol{p}') = \gamma(1+\beta\cos\theta') \times \frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\frac{\gamma V'}{\exp[\gamma p'(1+\beta\cos\theta')c/k_\mathrm{B}T]-1}\,. \tag{11}$$

En réécrivant cette équation sous la forme d'une distribution de Planck où les grandeurs sont associées au référentiel $\mathcal{R}'$, on obtient

$$F'(\boldsymbol{p}') = \frac{1}{4\pi^3\hbar^3}\frac{\gamma^2 V'(1+\beta\cos\theta')}{\exp(p'c/k_\mathrm{B}T')-1}\,, \tag{12}$$

où on identifie la température dans le référentiel $\mathcal{R}'$

$$T'(\theta') = \frac{T}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\,. \tag{13}$$

Cette température mesurée sur Terre est non isotrope car dépend de l'angle θ'.

Q5. La température la plus élevée est atteinte pour $\theta' = \pi$ et vaut $T'_\mathrm{max} = \frac{T}{\gamma(1-\beta)}$ (on veut le plus petit dénominateur possible), et la plus faible température est atteinte pour $\theta' = 0$ et vaut $T'_\mathrm{min} = \frac{T}{\gamma(1+\beta)}$ (on veut le plus grand dénominateur possible). La différence relative de température est donc

$$\frac{\Delta T'}{T} \equiv \frac{T'_\mathrm{max} - T'_\mathrm{min}}{T} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{2\beta}{1-\beta^2} = 2\gamma\beta \approx 2\beta\,, \tag{14}$$

où on considère que $\beta \ll 1$ et donc $\gamma \approx 1$. Cette hypothèse est vérifiée a posteriori après application numérique. L'application numérique (faisable en ordre de grandeur sans calculatrice) donne

$$v \approx \frac{c}{2}\frac{\Delta T'}{T} = \frac{3.10^5}{2} \times \frac{3,358.10^{-3}}{2,728} \approx 1,5.10^5 \times 10^{-3} \approx 150~\mathrm{km/s}\,. \tag{15}$$

On obtient bien une valeur plus petite que la vitesse de la lumière dans le vide et donc l'hypothèse $\gamma \approx 1$ est justifiée. Néanmoins, la Terre (et donc notre galaxie) se déplace à grande vitesse (à notre échelle) dans le cosmos !

2 Désintégration d'une Particule

Q1. La conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion s'écrit

$$p^\mu_{D^0} = p^\mu_{\bar{K}^0} + p^\mu_{\pi^0}\,. \tag{16}$$

On utilise la méthode usuelle : (i) on met d'un côté de l'équation ce qui ne nous interesse pas, ici le méson $\bar{K}^0$, puis (ii) on met cette expression au carré. Cela donne

$$p^2_{\bar{K}^0} = (p_{D^0} - p_{\pi^0})^2\,. \tag{17}$$

Comme le carré d'un quadri-vecteur est un invariant de Lorentz, nous pouvons l'évaluer dans n'importe quel référentiel. On choisit ici le référentiel de centre de masse, i.e. le référentiel propre du méson D^0. On a de suite que $p^2_{\bar{K}^0} = m^2_{\bar{K}^0}c^2$. On évalue ensuite le terme de droite. On a

$$(p_{D^0} - p_{\pi^0})^2 = p^2_{D^0} + p^2_{\pi^0} - 2\eta_{\mu\nu}p^\mu_{D^0}p^\nu_{\pi^0} = m^2_{D^0}c^2 + m^2_{\pi^0}c^2 - 2\eta_{\mu\nu}p^\mu_{D^0}p^\nu_{\pi^0}\,. \tag{18}$$

Dans le référentiel propre au méson D^0, nous avons $p^\mu_{D^0} = (m_{D^0}c, \mathbf{0})$ (il est immobile), et $p^\mu_{\pi^0} = (E_\pi/c, \boldsymbol{p}_\pi)$. Donc

$$2\eta_{\mu\nu}p^\mu_{D^0}p^\nu_{\pi^0} = 2m_{D^0}E_\pi\,. \tag{19}$$

Finalement, on obtient

$$E_{\pi^0} = \frac{m^2_{D^0} + m^2_{\pi^0} - m^2_{\bar{K}^0}}{2m_{D^0}}\,c^2\,. \tag{20}$$

Q2. Dans le référentiel propre au pion π^0 donc considéré au repos, les deux photons doivent avoir leur impulsions tridimensionnelles opposées l'une à l'autre (par conservation de l'impulsion), on a donc

$$p_1^\mu = (E_1/c, \boldsymbol{p}) \,, \qquad \text{et} \qquad p_2^\mu = (E_2/c, -\boldsymbol{p}) \,. \tag{21}$$

Or, pour un photon (particule de masse nulle), on a $E = pc$, donc $|\boldsymbol{p}| = p = p_1 = E_1/c$. De même, $|-\boldsymbol{p}| = p = p_2 = E_2/c$. On en déduit qu'ils ont la même énergie

$$p_1^\mu = (E_\gamma/c, \boldsymbol{p}) \,, \qquad \text{et} \qquad p_2^\mu = (E_\gamma/c, -\boldsymbol{p}) \,. \tag{22}$$

La conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion (au carré) s'écrit

$$p_{\pi^0}^2 = (p_1 + p_2)^2 \,, \tag{23}$$

avec $p_{\pi^0}^2 = m_{\pi^0}^2 c^2$. Le membre de droite donne

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\eta_{\mu\nu} p_1^\mu p_2^\nu = 0 + 0 + 2(E_\gamma^2/c^2 + p^2) = 4E_\gamma^2/c^2 \,. \tag{24}$$

On en déduit finalement que

$$E_\gamma = \frac{1}{2} m_{\pi^0} c^2 \,. \tag{25}$$