Mécanique et Relativité Approfondies

Examen LU3PY536 (Partie Exercices)

12 janvier 2024

Le polycopié de cours, de TD et la calculatrice ne sont pas autorisés. Q2 et Q3 nécessitent la résolution de Q1. Q4 peut être traitée de manière indépendante. Q5 est en bonus. Q7, Q8 et Q9 dépendent toutes de la résolution de Q6.

Oscillateur Harmonique Faiblement non-Linéaire

<u>*Thèmes abordés*</u> *: mécanique hamiltonienne, transformations canoniques, théorie des perturbations.*

L'oscillateur harmonique parfait est (à quelques exceptions près) le seul système physique que nous savons résoudre analytiquement de manière exacte. Et il y a une raison à cela : l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique parfait est *linéaire*. Cependant, décrire des phénomènes physiques par des oscillations harmoniques parfaits n'est souvent qu'une approximation. Par exemple, dans la cas d'un pendule, il faudrait en toute généralité prendre en compte les frottements de l'air, etc...

L'objectif de ce problème est de construire une analyse de la pulsation d'un oscillateur harmonique *faiblement non-linéaire*, donc plus réaliste. Les variables de position et moment sont notés q et p. Pour un potentiel pair (c'est le cas de l'oscillateur harmonique parfait), la première correction non-linéaire doit être de degré quatre. Ainsi, nous considérons dans ce problème le Hamiltonien $\mathcal{H}(q,p)$ suivant :

$$\mathcal{H}(q,p) = \mathcal{H}_0 + V(q) = \underbrace{\frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}\,q^2}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}\,\omega^2 q^4}_{V(q)}\,, \tag{1}$$

où ω est la pulsation du mouvement associé à l'oscillateur linéaire de Hamiltonien $\mathcal{H}_0$, ε est un petit paramètre, et $V(q)$ décrit la non-linéarité considérée que nous allons traiter de manière perturbative.

Afin de résoudre ce système de manière perturbative, on effectue la transformation $(q,p) \to (\theta, J)$. Les nouvelles coordonnées (θ, J) sont communément appelés *variables angle-action*. Vous pouvez voir θ comme la nouvelle coordonnée "position" et J la nouvelle coordonnée "moment" du système. La transformation est obtenue grâce à la fonction génératrice de première espèce

$$F(q,\theta) = \frac{\omega}{2}\,q^2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,. \tag{2}$$

On rappelle que les règles de génération de la fonction F sont

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}\,, \quad J = -\frac{\partial F}{\partial \theta}\,. \tag{3}$$

Q1. [2pt] Exprimer q en fonction de J et θ seulement. Faire de même pour p.

Q2. [2pt] Nous rappelons que le crochet de Poisson entre deux variables X et Y par rapport aux variables x et y est défini par

$$\{X, Y\}_{(x,y)} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial x}\,. \tag{4}$$

Calculer $\{q, p\}_{(\theta,J)}$. Est-ce que la transformation $(q, p) \to (\theta, J)$ est canonique ?

Q3. [2pt] Montrer que le Hamiltonien dans les nouvelles variables s'écrit

$$\mathcal{H}(\theta, J) = \omega J + \varepsilon J^2 \sin^4\theta\,. \tag{5}$$

Identifier $\mathcal{H}_0(\theta, J)$ et $V(\theta, J)$ dans ce nouvel Hamiltonien.

Q4. [4pt] On s'intéresse dans cette question seulement à l'oscillateur harmonique linéaire.

- **a.** Dessiner l'allure du portrait de phase de $\mathcal{H}_0(q, p)$ dans le plan (q, p) pour deux énergies données E_1 et E_2 telles que $E_1 > E_2$. On prendra $\omega = 1$ pour simplifier.
- **b.** De même, dessiner l'allure du nouveau portrait de phase de $\mathcal{H}_0(\theta, J)$ dans le plan (θ, J) pour deux énergies données E_1 et E_2 telles que $E_1 > E_2$. Commenter.

Q5. [Bonus] On rappelle l'identité trigonométrique suivante

$$\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta\,. \tag{6}$$

Comment démontreriez-vous cette relation ? On décrira très brièvement une méthode sans la mettre en oeuvre.

Q6. [3pt] Une approche perturbative pour résoudre l'oscillateur harmonique faiblement non-linéaire est de moyenner la dynamique du système sur la variable θ. Cette approximation est connue sous le nom de *méthode du champ moyen*. À partir de l'Eq. (5), calculer le Hamiltonien moyen $\langle\mathcal{H}\rangle$ défini par

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \mathcal{H}_0 + \int_0^{2\pi} V(\theta, J)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,. \tag{7}$$

Q7. [2pt] À partir des équations de Hamilton, établir les équations du mouvement relatives aux variables $\theta(t)$ et $J(t)$ pour le Hamiltonien $\langle\mathcal{H}\rangle$.

Q8. [3pt] On choisit comme conditions initiales $J(t = 0) = J_0$ et $\theta(t = 0) = 0$. Résoudre ces équations et exprimer la variable de position $q(t)$ en fonction de t, ω, J_0 et ε.

Q9. [2pt] Déduire du résultat précédent l'expression de la nouvelle pulsation $\Omega(\omega, \varepsilon, J_0)$ des oscillations. Commenter. Ce résultat est connu sous le nom de formule d'Airy.