Mécanique et Relativité Approfondies

Corrigé de l'examen LU3PY536

12 janvier 2024

1 Oscillateur Harmonique Faiblement non-Linéaire

Q1. L'équation $J = -\frac{\partial F}{\partial \theta}$ appliquée à la fonction $F(q,\theta) = \frac{\omega}{2} q^2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ donne

$$-J = \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\omega}{2}\, q^2\, \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{\omega}{2}\, q^2\, \frac{1}{\sin^2\theta}\,. \tag{1}$$

En inversant cette formule, nous trouvons

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\,\sin\theta\,, \tag{2}$$

où nous avons gardé la solution avec un signe $+$, plutôt que celle avec un signe $-$ (ce choix n'a aucune conséquence physique sur ce qui suit car c'est juste un choix de phase, i.e. $-1 = e^{i\pi}$). En faisant de même avec l'autre équation que doit vérifier la fonction génératrice F, nous trouvons

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \omega q\, \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,. \tag{3}$$

En utilisant la formule donnant q en fonction de θ et J, nous trouvons

$$p = \sqrt{2\omega J}\,\cos\theta\,. \tag{4}$$

Q2. En utilisant la définition donnée dans le sujet, nous avons

$$\begin{aligned}
\{q,p\}_{(\theta,J)} &= \frac{\partial q}{\partial J}\frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial J}\frac{\partial q}{\partial \theta} \\
&= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial J}\left(\sqrt{\frac{2J}{\omega}}\right) \times \sqrt{2\omega J}\,\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta) - \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial J}(\sqrt{2\omega J}) \times \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta \\
&= -\sin^2\theta - \cos^2\theta = -1\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

La transformation est canonique. Notons que nous pouvions calculer $\{\theta, J\}_{(q,p)}$ et aussi obtenir -1, mais le calcul est moins facile.

Q3. En injectant les formules (2) et (3) trouvées dans le Hamiltonien, nous obtenons

$$\mathcal{H}(\theta,J) = \frac{1}{2}\,2\omega J\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\omega^2\frac{2J}{\omega}\sin^2\theta + \frac{\varepsilon}{4}\omega^2\frac{4J^2}{\omega^2}\sin^4\theta = \underbrace{\omega J}_{\mathcal{H}_0(\theta,J)} + \underbrace{\varepsilon J^2\sin^4\theta}_{V(\theta,J)}\,. \tag{6}$$

Q4. Dans le cas de l'oscillateur harmonique linéaire $\mathcal{H}_0$. Pour les variables (q,p) avec $\omega = 1$, la trajectoire dans l'espace des phases est un cercle de rayon $\sqrt{2E}$, i.e. $2E = q^2 + p^2$. La trajectoire pour E_1 est un cercle centré en l'origine plus grand que la trajectoire pour $E_2 < E_1$. Pour les variables (θ, J), nous avons l'équation $E = J$ avec $\omega = 1$, c'est à dire une droite horizontale entre $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ à valeur constante $J = E$. La trajectoire pour E_1 est donc une droite plus éloignée de l'axe des abscisses que pour $E_2 < E_1$. Nous remarquons que la trajectoire est périodique (dans les deux cas), et que dans les variables (θ, J), les trajectoires sont sur un cylindre. La changement de variables $(q,p) \to (\theta, J)$ identifie un plan à un cylindre.

Q5. Pour démontrer cette formule, la méthode classique est d'exprimer le sinus en exponentielles complexes $\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$ puis d'utiliser le binôme de Newton (développer la puissance quatrième). Cette procédure s'appelle la linéarisation de fonctions trigonométriques.

Q6. En utilisant la formule précédente, on obtient des intégrales faciles à calculer

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \omega J + \varepsilon J^2 \left(\frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \cos 4\theta \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \right) . \tag{7}$$

Les deux dernières intégrales sont nulles. Ainsi nous obtenons

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \omega J + \frac{3}{8} \varepsilon J^2 . \tag{8}$$

Q7. Les équations de Hamilton pour $\langle \mathcal{H} \rangle$ sont données par

$$\frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \theta} = -\dot{J} \, , \quad \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial J} = \dot{\theta} \, . \tag{9}$$

Nous obtenons directement le système suivant

$$\dot{J} = 0 \, , \quad \dot{\theta} = \omega + \frac{3}{4} \varepsilon J \, . \tag{10}$$

Q8. La première équation nous dit que $J(t)$ est constant au cours du temps. Avec la condition initiale $J(t=0) = J_0$, on obtient $J(t) = J_0$. La deuxième équation s'intègre en $\theta(t) = (\omega + \frac{3}{4}\varepsilon J_0)t + \alpha$. La condition initiale $\theta(t=0) = 0$ impose $\alpha = 0$, soit $\theta(t) = (\omega + \frac{3}{4}\varepsilon J_0)t$. La variable de position initiale $q(t)$ est alors donnée par

$$q(t) = \sqrt{\frac{2J_0}{\omega}} \sin(\Omega t) \, , \tag{11}$$

avec $\Omega = \omega + \frac{3}{4}\varepsilon J_0$ est la nouvelle pulsation de l'oscillateur harmonique faiblement non-linéaire. Dans la limite $\varepsilon = 0$, nous obtenons bien $\Omega = \omega$ i.e. l'oscillateur est linéaire. Pour $\varepsilon > 0$ et $J_0 > 0$, la correction non-linéaire fait croitre légèrement la pulsation (et donc la fréquence) de l'oscillateur harmonique. Notons aussi que l'on a supposé que le potentiel quartique est une correction au potentiel quadratique, nous devons nécessairement avoir $V \ll \mathcal{H}_0$ pour que notre analyse soit valide. Nous devons alors vérifier $\frac{3}{8}\varepsilon J_0^2 \ll \omega J_0$, soit $\frac{3}{8}\varepsilon J_0 \ll \omega$. Ainsi, la correction à la pulsation ω est très petite par rapport à ω.