
Mécanique & Relativité

Approfondies

Travaux Dirigés

LU3PY536, 2023-2024

Denis WERTH
denis.werth@iap.fr
Sorbonne Université & Institut d'Astrophysique de Paris

Ce polycopié de travaux dirigés regroupe les exercices du cours Mécanique Analytique et Relativité Restreinte (LU3PY536) donné par le professeur Frank B. Rosmej à Sorbonne Université. Les exercices (★) sont des applications directes du cours et doivent être maîtrisés à la perfection. Les exercices (★★) sont des exercices typiques de niveau intermédiaire, tandis que les exercices (★★★) abordent des notions avancées qui ne rentrent pas dans le cadre de ce cours. Nous ne les traiterons pas par faute de temps. Néanmoins, ils constituent une ouverture aux cours que vous allez (probablement) suivre lors de votre cursus en physique. J'espère que ce polycopié prêtera main-forte à nombreux d'entre vous et participera à la réussite de toutes et tous. Il a été écrit en un temps record, veuillez donc m'excuser par avance pour les fautes de frappe et coquilles.

Je tiens à remercier Frank B. Rosmej pour sa confiance et Étienne Camphuis pour avoir élaboré les travaux dirigés des années précédentes et m'avoir transmis le matériel nécessaire pour écrire ce polycopié. Je remercie également mes anciens professeurs qui m'ont appris la relativité restreinte et la mécanique analytique il y a bien quelques années maintenant, et toutes les physiciennes et physiciens qui m'ont inspirés durant l'enseignement de ce cours.

Bibliographie en Ligne

Relativité Restreinte

- **Dynamics and Relativity**, David Tong (chapitre 7)
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/relativity/dynrel.pdf>
- **Joe's Relatively Small Book of Special Relativity**, Joseph Minahan
https://www.physics.uu.se/digitalAssets/405/c_405910-1_3-k_specrel.pdf

Analyse Vectorielle

- **Vector Calculus**, David Tong
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/vc/vc.pdf>
- **Vector Calculus**, M. Dorrzapf
<https://www.joh.cam.ac.uk/sites/default/files/2017-11/notes2005.pdf>

Électromagnétisme

- **The Feynman Lectures on Physics, Volume II**, Feynman, Leighton, Sands
https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_toc.html
- **Electromagnetism**, David Tong (chapitre 5)
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/em/electro.pdf>

Mécanique Analytique

- **Mécanique Analytique**, Frédéric Faure
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/faure/enseignement/meca_analytique_L3/Cours.pdf
- **Lagrangian and Hamiltonian Mechanics**, Iñaki García Etxebarria
<https://www.maths.dur.ac.uk/users/inaki.garcia-etxebarria/MPII/Lectures.pdf>
- **Classical Mechanics**, Iain Stewart
<https://ocw.mit.edu/courses/8-09-classical-mechanics-iii-fall-2014/pages/lecture-notes/>

Pour celles et ceux qui aiment les livres et travailler à la bibliothèque, venez me demander des références. Il y a des classiques à connaître, même simplement de nom.

Table des Matières

Bibliographie en Ligne	3
1 Préliminaires Mathématiques et Physiques	6
Rappels mathématiques	6
1.1 Matrices de rotation et groupes (★)	6
1.2 Rappels d'analyse vectorielle (★)	8
1.3 Transformations hyperboliques (★★)	8
1.4 Pendule simple et intégrale elliptique (★★)	8
2 Fondamentaux de la Relativité Restreinte	10
Rappels de cours	10
2.1 Transformation de Galilée (★)	11
2.2 Conséquences de la transformation de Lorentz (★)	11
2.3 Jumeaux (★★)	12
2.4 Désintégration de muons (★★)	12
2.5 Paradoxe du marcheur rapide (★★)	13
2.6 Équations de Maxwell et équation d'onde (★★)	13
3 Espace-temps de Minkowski et Quadri-vecteurs	14
Rappels de cours	14
3.1 Manipulation de quadri-vecteurs (★)	16
3.2 Mouvement uniformément accéléré (★★)	16
3.3 Quadri-vecteur d'onde (★★)	17
3.4 Groupe de Lorentz $SO(1, 3)$ (★★★)	17
4 Mécanique Relativiste et Physique des Particules	19
Rappels de cours	19
4.1 Effet Compton (★)	20
4.2 Désintégration d'une particule (★)	20
4.3 Variables de Mandelstam (★)	21
4.4 Production de paires électron-positron par des photons (★★)	21
4.5 Photoproduction de mésons π (★★)	22
5 Électromagnétisme	23
Rappels de cours	23
5.1 Manipulation des équations de Maxwell (★)	24
5.2 Particule chargée et quadri-force de Lorentz (★★)	24
5.3 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique (★★★)	25

6 Mécanique Lagrangienne	26
Rappels de cours	26
6.1 Démonstration de l'équation d'Euler-lagrange (★)	26
6.2 Particule libre en coordonnées polaires (★)	27
6.3 Pendule simple (★)	27
6.4 Force de Lorentz (★★)	27
6.5 Lagrangien du champ électromagnétique (★★★)	28
6.6 Équation de Klein-Gordon (★★★)	28
6.7 Vers les théories de jauge (★★★)	28
7 Principe de Moindre Action et Contraintes	30
Rappels de cours	30
7.1 Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes "à la plage" (★)	31
7.2 La corde pendue (★★)	31
7.3 Maximiser l'entropie de Shannon (★★)	32
7.4 Géodésiques sur la sphère (★★)	32
7.5 Brachistochrone (★★)	32
8 Mécanique Hamiltonienne	34
Rappels de cours	34
8.1 Oscillateur harmonique et amorti (★)	35
8.2 La bille et le cerceau (★★)	35
8.3 Problème à deux corps et mouvement à force centrale (★★)	35
8.4 Théorème du viriel (★★)	36
9 Notions Avancées de Mécanique Analytique	37
Rappels de cours	37
9.1 Transformation de Legendre (★★)	37
9.2 Crochets de Poisson (★★)	38
9.3 Transformations canoniques (★★)	39
9.4 Principe de Maupertuis (★★)	39
10 Hamilton-Jacobi	40
Rappels de cours	40
10.1 Encore et toujours l'oscillateur harmonique (★)	41
10.2 Particule dans un champ de force centrale (★★)	41
A Relativité Restreinte: Formules Utiles	42
B Mécanique Analytique: Formules Utiles	43

Rappels mathématiques

Fonctions trigonométriques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions trigonométriques usuelles sont définies par

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (1)$$

déduites à partir de la formule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Quelques relations notables sont

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \sin(-x) &= -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Les dérivées sont

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \quad (3)$$

Les solutions de l'équation algébrique $a^2 + b^2 = 1$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ sont $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$. Les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ sont $y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Fonctions hyperboliques. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions hyperboliques sont définies par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}. \quad (4)$$

Par construction, nous avons $e^x = \cosh x + \sinh x$. Quelques relations notables sont

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \sinh(-x) &= -\sinh(x), \quad \cosh(-x) = \cosh(x), \quad \tanh(-x) = -\tanh(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Les dérivées sont

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. \quad (6)$$

Les solutions de l'équation algébrique $a^2 - b^2 = 1$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ sont $(a, b) = (\cosh x, \sinh x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y''(t) - \omega^2 y(t) = 0$ sont $y(t) = A \cosh(\omega t) + B \sinh(\omega t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

1.1 Matrices de rotation et groupes ($\star$)

Soient un espace euclidien à deux dimensions avec un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dont les vecteurs de base sont $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, et un vecteur $\mathbf{x} = (x, y)$.

Q1. Quelle est l'image du vecteur $\mathbf{x}$, que l'on notera $\mathbf{x}'$, après avoir appliqué une rotation d'angle θ ? Écrire cette transformation dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ sous la forme $\mathbf{x}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{x}$ où $\mathbf{R}(\theta)$ est une matrice à préciser.

Q2. Montrer que les matrices de rotations $\mathbf{R}(\theta)$ à deux dimensions sont orthogonales, i.e. ${}^t\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$, et de déterminant $\det(\mathbf{R}) = 1$.

Q3. Nous rappelons qu'un groupe $(G, \cdot)$ vérifie les axiomes

- (i) Loi de composition interne: Pour $x, y \in G$, $x \cdot y \in G$.
- (ii) Associativité: Pour tout $x, y, z \in G$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (iii) Élément neutre: Il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $x \cdot e = e \cdot x = x$.
- (iv) Symétrie: Pour tout $x, y \in G$, $x \cdot y = y \cdot x$.

Montrer que les matrices $\mathbf{R}(\theta)$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$ forment un groupe, dit groupe spécial orthogonal $SO(2)$. Ce groupe se généralise à $SO(n)$ pour $n \geq 2$.

Q4. Considérons maintenant un espace euclidien à trois dimensions avec un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dont les vecteurs de bases sont $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. Soit un vecteur $\mathbf{x} = (x, y, z)$. On applique une rotation d'angle ϕ autour de l'axe (Ox) . Écrire la matrice $\mathbf{R}_x(\phi)$ associée à cette transformation.

Q5. Commentez les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Q6. Développer la matrice $\mathbf{R}_z(\theta)$ pour $\theta \ll 1$ au voisinage de l'identité et l'écrire sous la forme $\mathbf{R}_z(\theta) \approx \mathbf{1} - i\theta\mathbf{J}$ où $\mathbf{J}$ est une matrice à déterminer. Nous posons

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Les matrices $\mathbf{J}_k$ pour $1 \leq k \leq 3$ sont les générateurs du groupe de Lie associé au groupe $SO(3)$. Vérifier que $(\mathbf{J}_k)_{ij} = -i\epsilon_{ijk}$ où ϵ_{ijk} est le symbole de Levi-Civita totalement anti-symétrique avec $\epsilon_{123} = 1$. Démontrer les propriétés suivantes

- $\text{Tr}(\mathbf{J}_i\mathbf{J}_j) = 2\delta_{ij}$ pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- $[\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathbf{J}_k$.

Pour aller plus loin.— La notion de groupe est un des fondements des théories physiques modernes. En effet, les groupes tels que $SO(1, 3)$, $U(1)$, $SU(2)$ ou encore $SU(3)$ décrivent les symmétries que les lois physiques semblent obéir et permettent de construire des théories qui respectent ces symmétries, comme le Modèle Standard de la physique des particules. Par exemple, nous savons maintenant que le proton n'est pas une particule fondamentale mais dite *composite*, i.e. il est composé

de trois particules fondamentales appelées quarks liées par d'autres particules appelées gluons. Il existe exactement trois "charges de couleur" pour chaque quark et huit types de gluons différents. Notez que huit est la dimension du groupe spécial unitaire $SU(3)$, coïncidence ? Évidemment pas... Cette théorie s'appelle la chromodynamique quantique. Pour les plus curieux, je recommande la vidéo *Quarks et chromodynamique* de l'excellente chaîne Youtube ScienceClic.

1.2 Rappels d'analyse vectorielle (★)

On se place dans un espace euclidien $\mathcal{E}$ à trois dimensions et on utilise les coordonnées cartésiennes. Soient un champ scalaire $f(x, y, z)$ et un champ vectoriel $\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x, E_y, E_z)$.

Q1. Rappeler les définitions de $\vec{\text{grad}}(f)$, $\text{div}(\mathbf{E})$, et $\vec{\text{rot}}(\mathbf{E})$. On définit le vecteur $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Écrire $\vec{\text{grad}}(f)$, $\text{div}(\mathbf{E})$, et $\vec{\text{rot}}(\mathbf{E})$ en fonction de ∇ uniquement.

Q2. Calculer $\vec{\text{grad}}(f)$ pour $f(x, y, z) = x^2 - yz + z^2x$. Calculer $\text{div}(\mathbf{E})$ et $\vec{\text{rot}}(\mathbf{E})$ pour $\mathbf{E}(x, y, z) = (x + y, x - z, z^2)$

1.3 Transformations hyperboliques (★★)

Soient un espace pseudo-euclidien $\mathcal{E}$ à deux dimensions, et un vecteur ${}^t\mathbf{x} = (t, x)$. On définit la pseudo-norme $\|\mathbf{x}\|$ du vecteur $\mathbf{x}$ par $\|\mathbf{x}\|^2 = t^2 - x^2$. Noter que pour $x > t$, la quantité $\|\mathbf{x}\|^2$ est négative, d'où l'appellation "pseudo"-norme.

Q1. Montrer que $\|\mathbf{x}\|^2$ peut s'écrire sous la forme ${}^t\mathbf{x} \boldsymbol{\eta} \mathbf{x}$ où $\boldsymbol{\eta}$ est une matrice à préciser. Cette matrice est la métrique de l'espace $\mathcal{E}$.

Q2. Considérons une transformation représentée par la matrice $\mathbf{\Lambda}(\phi)$ où $\phi \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme de la matrice $\mathbf{\Lambda}(\phi)$ de sorte à conserver la pseudo-norme définie ci-dessus, i.e. trouver les matrices $\mathbf{\Lambda}(\phi)$ telles que ${}^t\mathbf{x}' \boldsymbol{\eta} \mathbf{x}' = t^2 - x^2$ où $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}(\phi)\mathbf{x}$. Calculer $\det \mathbf{\Lambda}(\phi)$ et ${}^t\mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} \mathbf{\Lambda}$.

Q3. Dans le plan (t, x) (on choisit t sur l'axe vertical), représenter un vecteur de pseudo-norme nulle. Représenter le vecteur $\mathbf{x} = (1, 0)$ et le vecteur $\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}(\phi)\mathbf{x}$. Commenter. Que se passe-t-il pour les vecteurs de norme négative ? Vous venez de dessiner votre premier diagramme d'espace-temps !

1.4 Pendule simple et intégrale elliptique (★★)

Considérons une bille de masse m attachée à une tige de longueur l faisant un angle θ avec l'axe vertical (Oz). Nous négligeons tout frottement.

Q1. Faire un schéma en indiquant toutes les grandeurs. Représenter les forces appliquées à la bille.

Q2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$.

Q3. En supposant des petites oscillations $\theta \ll 1$, résoudre l'équation du mouvement. Les conditions initiales sont données par $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ au temps $t = 0$.

Q4. À partir de l'équation du mouvement, déterminer une grandeur conservée au cours du temps que l'on notera E . Que représente E ? Posons $\omega = \sqrt{g/l} = 1$ et définissons $x = \theta/\sqrt{2E}$. Calculer la grandeur $1 - x^2$. Montrer que le temps t s'exprime en fonction de x sous la forme

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - x'^2}}. \quad (9)$$

Que reconnaissez vous ? La généralisation de cette intégrale fait partie de la classe d'intégrales dites *elliptiques*, qui ont de nombreuses applications en physique.

Pour aller plus loin.— Pour les plus curieux, je recommande l'excellente vidéo *La géométrie révélée – promenade autour des fonctions elliptiques et des surfaces de Riemann* de la chaîne Youtube Scientia Egregia.

Rappels de cours

Transformation de Galilée. Soit un référentiel $\mathcal{R}$ muni d'un repère $\{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ nous permettant de définir un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Soit un deuxième référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel nous définissons des coordonnées (x', y', z') . L'origine O' de $\mathcal{R}'$ est animée d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à O de vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$. La loi de transformation qui relie les coordonnées d'un objet observé dans $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{10}$$

Ces relations ne sont plus valables en relativité restreinte lorsque la vitesse v approche la vitesse de la lumière dans le vide c .

Postulats d'Einstein. La théorie de la relativité restreinte repose sur deux postulats: (i) toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tout référentiel inertiel, et (ii) dans le vide, la lumière se propage toujours avec la même vitesse dans tout référentiel. Si on ajoute à ces deux postulats les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'espace, on obtient que la quantité $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ est conservée dans tout référentiel $\mathcal{R}$. Les transformations $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ qui laissent cette quantité inchangée sont les transformations de Lorentz.

Transformation de Lorentz. Soient deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ tels que $\mathcal{R}'$ se déplace à vitesse constante v selon l'axe Ox par rapport à $\mathcal{R}$. La loi de transformation de Lorentz est donnée par

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{11}$$

où $\beta \equiv v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Le coefficient γ est appelé facteur de Lorentz. Dans la limite $\beta \ll 1$, on retrouve la transformation de Galilée. La transformée de Lorentz inverse se retrouve en changeant le signe de la vitesse v .

Rapidité. On définit la rapidité ϕ telle que $\gamma = \cosh \phi$ et $\beta = \tanh \phi$. Dans ce cas, la transformation de Lorentz s'écrit

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \tag{12}$$

La rapidité peut être vue comme l'angle d'une "rotation d'espace-temps" (*boost* en anglais) ou "rotation hyperbolique". Il mesure à quel point un référentiel est rapide par rapport à un autre.

Espace-temps. Notons $s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ la distance (pseudo-euclidienne) entre deux évènements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Si $s^2 > 0$, alors il existe un référentiel dans lequel ces deux évènements ont la même position spatiale (genre temps). Si $s^2 < 0$, alors il existe un référentiel dans lequel ces deux évènements sont simultanés (genre espace). Savoir le représenter graphiquement dans un diagramme d'espace-temps.

2.1 Transformation de Galilée (★)

Q1. Un navire manoeuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante $v = 3 \text{ m.s}^{-1}$ parallèlement au quai. Sur le quai, un enfant court à la vitesse $u = 2 \text{ m.s}^{-1}$ par rapport au référentiel du quai $\mathcal{R}$, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire $\mathcal{R}'$?

Q2. Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ($h = 10 \text{ m}$). Décrivez la trajectoire de cet objet pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage.

2.2 Conséquences de la transformation de Lorentz (★)

Q1. Dilatation du temps. Considérons deux évènements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ qui se produisent dans $\mathcal{R}$ au même endroit à deux instants différents $\Delta t \neq 0$. Quel est l'intervalle de temps $\Delta t'$ mesuré dans un référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ à vitesse v . Expliquer que deux évènements simultanés dans $\mathcal{R}$ ne le sont plus dans $\mathcal{R}'$.

Q2. Contraction des longueurs. Soit une barre de longueur L fixe dans $\mathcal{R}$. Dans un référentiel en déplacement $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, déterminer la longueur $L' = \Delta x' = x'_2(t') - x'_1(t')$, x'_1 et x'_2 étant les coordonnées des extrémités de la barre dans $\mathcal{R}'$.

Q3. Composition de transformées de Lorentz. Considérons une transformation de Lorentz selon (Ox) reliant $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ que l'on paramétrise avec la matrice

$$\Lambda(\phi_1) = \begin{pmatrix} \cosh \phi_1 & -\sinh \phi_1 \\ -\sinh \phi_1 & \cosh \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

où ϕ_1 est la rapidité de cette transformation. Faisons une deuxième transformation de Lorentz de même axe entre $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, paramétrée par la matrice $\Lambda(\phi_2)$. Obtenir la matrice qui représente la transformation de Lorentz de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}''$. Commenter. En déduire que la vitesse relative entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$ est donnée par

$$v_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \frac{v_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{1 + v_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} / c^2}. \quad (14)$$

Représenter la composition de deux transformées de Lorentz dans un diagramme d'espace-temps. Justifier graphiquement que la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière c .

Pour aller plus loin— Pour les plus curieux, je recommande l'excellente vidéo *Les Rotations de l'espace-temps* de la chaîne Youtube ScienceClic. Cette vidéo pourra vous aider à visualiser avec de superbes animations les transformées de Lorentz dans l'espace-temps et voir la géométrie hyperbolique apparaître.

Q4. Composition des vitesses. Considérons une particule animée d'un mouvement quelconque, et notons $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ les vitesses de cette particule dans deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, avec $\mathcal{R}'$ se déplaçant à vitesse constante v selon (Ox) par rapport à $\mathcal{R}$. Montrer que

$$w'_x = \frac{w_x - v}{1 - \frac{vw_x}{c^2}}, \quad w'_{y,z} = \frac{w_{y,z}}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} w_x\right)}. \quad (15)$$

Dans le cas d'une transformation de Lorentz quelconque, ces expressions deviennent

$$\mathbf{w}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{w}_{\parallel} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{c^2}}, \quad \mathbf{w}'_{\perp} = \frac{\mathbf{w}_{\perp}}{\gamma(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}/c^2)}. \quad (16)$$

Vérifier que ces relations sont compatibles avec le deuxième postulat d'Einstein.

2.3 Jumeaux (★★)

Pierre quitte son frère jumeau Paul pour un aller-retour vers un système planétaire situé à $d = 8$ a.l. de la Terre. On suppose que l'aller et le retour s'effectuent à vitesse $v = 0.8c$ et on néglige le temps que met Pierre pour faire demi-tour.

Q1. Quelle est la durée de l'aller du point de vue de Pierre ? de Paul resté sur Terre ? Maintenant vous comprenez le film Interstellar...

Q2. On suppose que Pierre célèbre l'anniversaire de son départ en envoyant chaque année (selon son horloge) un signal vers Paul. Pour Paul, quel intervalle de temps sépare la réception de deux signaux successifs envoyés par Pierre durant le voyage aller ? On rappelle que l'effet Doppler classique s'écrit $\Delta t_r = (1 + \beta \cos \theta) \Delta t_e$, en fonction des durées d'émission et de réception, où θ est l'angle entre le déplacement et l'axe source/observateur, et $\beta = v/c$, sachant que v est la vitesse de la source par rapport à l'observateur fixe.

2.4 Désintégration de muons (★★)

Un muon est formé dans la haute atmosphère en un point O pris comme origine d'un référentiel terrestre inertiel $\mathcal{R}$. Il se propage selon l'axe (Ox) , orienté vers le centre de la Terre, avec une vitesse constante $v = \alpha c$, avec $0 < \alpha < 1$. Après avoir parcouru la distance d , il se désintègre au point D de l'axe (Ox) . On désigne par $\mathcal{R}'$ le référentiel inertiel lié à la particule.

Q1. Donner une expression simple de la durée T qui sépare, dans $\mathcal{R}$, les instants de formation et de désintégration du muon.

Q2. Écrire les coordonnées spatio-temporelles des événements $\mathcal{E}_1$ (formation du muon) et $\mathcal{E}_2$ (désintégration du muon), successivement dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.

Q3. Quelle est la durée T' qui sépare dans $\mathcal{R}'$, les instants $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. De quel genre est l'intervalle entre $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_1$?

2.5 Paradoxe du marcheur rapide (★★)

Un marcheur rapide marche sur une grille métallique dont l'espacement correspond exactement à la longueur de son pied. De son point de vue, l'espacement des barreaux est contracté selon la transformation de Lorentz, ce qui devrait lui permettre de marcher facilement sur la grille. Cependant, du point de vue de la grille elle-même, c'est le pied du marcheur qui est contracté, et il tombera sûrement. Paradoxe ! Expliquer ce qui se passe.

2.6 Équations de Maxwell et équation d'onde (★★)

Nous rappelons que les équations de Maxwell dans le vide pour les champs électriques $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{17}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Q1. Obtenir les équations d'onde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) \mathbf{E} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) \mathbf{B} = 0,\tag{18}$$

où la vitesse de propagation c est définie par $c^2 \equiv 1/(\epsilon_0 \mu_0)$.

Q2. Dans le référentiel inertiel $\mathcal{R}$, on considère l'équation d'onde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) f = 0,\tag{19}$$

où f est un champ scalaire. En utilisant la transformation de Galilée, écrire cette équation d'onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme le long de l'axe (Ox) avec une vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$. Commenter.

Q3. En utilisant la transformation de Lorentz, écrire cette équation d'onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme le long de l'axe (Ox) avec une vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$. Commenter.

Rappels de cours

Quadri-vecteurs. La relativité restreinte peut être reformulée dans un cadre quadri-dimensionnel. Aux trois coordonnées d'espace x, y, z , on ajoute la coordonnée temporelle $x^0 \equiv ct$, définissant ainsi un espace-temps quadri-dimensionnel. Les points correspondent à des événements et se notent

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (20)$$

Dans l'espace-temps, à tout événement $\mathcal{E}$, de coordonnées (ct, x, y, z) , on peut associer le quadri-vecteur position, noté x ,

$$x = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu e_\mu = x^\mu e_\mu, \quad (\text{sommation d'Einstein}) \quad (21)$$

où (e_0, e_1, e_2, e_3) forme une base de l'espace quadri-dimensionnel. Le quadri-vecteur position caractérise la séparation en temps et espace de $\mathcal{E}$ avec l'origine $t = x = y = z = 0$.

Produit scalaire et métrique de Minkowski. L'espace-temps quadri-dimensionnel de Minkowski est muni d'un produit scalaire entre quadri-vecteurs. Le carré scalaire d'un quadri-vecteur x s'écrit

$$x^2 \equiv x \cdot x = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (22)$$

qui correspond à la distance (pseudo-euclidienne) vue précédemment. Le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs x et y est donné par

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (23)$$

La norme d'un quadri-vecteur et le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs sont invariants par transformation de Lorentz, i.e. ne dépendent pas du référentiel dans lequel on se place. La métrique de Minkowski est définie par

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

et permet d'écrire la norme d'un quadri-vecteur $x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ et le produit scalaire $x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$.

Changement de base. Pour un quadri-vecteur x quelconque, un changement de base s'écrit

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (25)$$

où Λ est une "matrice" de changement de base de $\{e_\mu\}$ à $\{e'_\mu\}$. Comme le produit scalaire est invariant de Lorentz $x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, on en déduit

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}. \quad (26)$$

Composantes contravariantes et covariantes. Le produit scalaire peut s'écrire $x \cdot y = x_\mu y^\mu$ en définissant $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$. Les composantes x_μ , avec l'indice en position inférieure, sont appelées composantes covariantes, alors que les composantes x^μ , utilisées jusqu'à présent, avec l'indice en position supérieure, sont dites contravariantes. Les composantes covariantes se déduisent des composantes contravariantes par un simple changement de signe des composantes spatiales. Par exemple, si $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ alors $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\mathbf{x})$. La métrique permet aussi de "monter des indices", par exemple en écrivant $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$, où $\eta^{\mu\nu}$ représentent les coefficients de la métrique inverse. Pour la métrique de Minkowski, les coefficients $\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\nu}$ sont identiques. Ceci n'est plus vrai en Relativité Générale !

Genre des quadri-vecteurs. Un quadri-vecteur x est dit de genre temps (resp. de genre espace) si $x^2 = (x^0)^2 - \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ (resp. $x^2 < 0$). Un quadri-vecteur est dit de genre lumière si $x^2 = 0$. Cette notion permet de définir le cône de lumière, le futur/passé d'un évènement et la région causalement déconnectée d'un évènement.

Temps propre et quadri-vecteurs vitesse/accélération. Le mouvement d'une particule à travers l'espace-temps peut être décrit par un paramètre λ tel que $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Il est commode pour une particule massive de se restreindre à un paramètre particulier, noté τ , tel que

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = c^2. \quad (27)$$

Cette relation peut aussi s'écrire $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$. Le paramètre τ s'appelle le temps propre de la particule. Le quadri-vecteur vitesse est défini par

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right), \quad (28)$$

et vérifie $u^2 = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2$. En substituant (28) dans la condition de normalisation et en notant $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$, on obtient

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (29)$$

Le quadri-vecteur accélération est défini par $\mathcal{A}^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$.

Gradient. On peut définir des opérateurs sur les quadri-vecteurs avec la notation quadri-vectorielle. Par exemple on définit l'opérateur gradient par

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (30)$$

On a choisi l'indice en position inférieure car on peut montrer que ces composantes se transforment comme les composantes d'une base. L'indice se monte avec la métrique

$$\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (31)$$

3.1 Manipulation de quadri-vecteurs (★)

Q1. Identifier les indices libres et contractés dans les équations suivantes. Combien d'équations chaque expression contient ?

$$1) A_\alpha B^\alpha = 5, \quad 2) A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (32)$$

Q2. En exploitant la formule de changement de base pour le quadri-vecteur vitesse $u^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$ (par ailleurs valide pour *tout* quadri-vecteur), retrouver la loi de composition des vitesses (15) pour une transformation de Lorentz d'axe (Ox) et de vitesse v .

Q3. Montrer que le quadri-vecteur accélération s'écrit

$$\mathcal{A}^\mu = (\gamma^4 \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}, \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}) \boldsymbol{\beta} + \gamma^2 \mathbf{a}), \quad (33)$$

avec $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Déterminer le carré scalaire $\mathcal{A}^2$ de la quadri-accélération.

Q4. Calculer $\partial_\mu \partial^\mu$. Que reconnaissez-vous ?

Pour aller plus loin— Pour celles et ceux qui souhaitent de la lecture sur les aspects mathématiques du formalisme quadri-vectoriel et de manière plus générale sur les tenseurs (vous en verrez de plus en plus dans votre parcours, surtout si vous faites de la Relativité Générale un jour...), je recommande le chapitre 18 du livre *Mathématiques pour la physique et les physiciens* de Walter Appel. Néanmoins attention, ce chapitre est difficile et très technique.

3.2 Mouvement uniformément accéléré (★★)

On considère une particule en mouvement dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$.

Q1. Démontrer que $u \cdot \mathcal{A} = u_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$.

Q2. On dit que le mouvement est uniformément accéléré si l'accélération définie à tout instant dans le référentiel inertiel instantané (propre) reste identique, noté $\mathbf{a}$, au cours du temps. On se restreint à une seule dimension spatiale et on étudie le mouvement accéléré le long de l'axe (Ox) dans $\mathcal{R}$. Écrire les deux composantes de la quadri-accélération $\mathcal{A}_\star^0$ et $\mathcal{A}_\star^x$ de la particule dans son référentiel inertiel instantané $\mathcal{R}_\star$. Montrer que les composantes de la quadri-accélération dans $\mathcal{R}$ s'écrivent

$$\mathcal{A}^0 = \gamma \beta a, \quad \mathcal{A}^x = \gamma a, \quad (34)$$

où $a = ||\mathbf{a}||$.

Q3. Trouver un système d'équations différentielles sur $u^0(\tau)$ et $u^x(\tau)$, les composantes de la quadri-vitesse fonction du temps propre τ . Résoudre ce système en supposant que

la particule est au repos à l'instant $\tau = 0$. Montrer que la trajectoire dans l'espace-temps est paramétrée par

$$t = \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right), \quad x = x_0 + \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) - 1 \right], \quad (35)$$

où x_0 est la position de la particule à l'instant $\tau = 0$.

Q4. Déterminer la fonction $x(t)$ après avoir éliminé le paramètre τ . Développer cette expression dans la limite $at \ll c$. Commenter. Représenter sur un diagramme d'espace-temps la trajectoire $x(t)$ dans les cas relativiste et non-relativiste. Commenter.

3.3 Quadri-vecteur d'onde (★★)

Nous introduisons le quadri-vecteur d'onde défini par $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ où ω est la pulsation et $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde.

Q1. Calculer le produit scalaire entre le quadri-vecteur d'onde et le quadri-vecteur position $k \cdot x = k_\mu x^\mu$. Commenter.

Q2. Dans le cas d'un signal lumineux, la pulsation et le vecteur d'onde vérifient $\omega = c\|\mathbf{k}\|$. Écrire cette relation de dispersion en fonction de k^μ . Commenter.

Q3. Considérons un rayon lumineux dans le plan (Oxy) reçu sous un angle θ par un observateur fixe dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$. Les composantes du quadri-vecteur d'onde dans $\mathcal{R}$ s'écrivent

$$k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad k^y = -\frac{\omega}{c} \cos \theta, \quad k^x = -\frac{\omega}{c} \sin \theta. \quad (36)$$

On considère un autre référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ en translation uniforme le long de l'axe (Oy) par rapport à $\mathcal{R}$ à vitesse v . Montrer que

$$\omega' = \gamma\omega(1 + \beta \cos \theta), \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}. \quad (37)$$

Ces phénomènes sont l'effet Doppler (relativiste) et l'aberration (relativiste). Commenter brièvement.

3.4 Groupe de Lorentz $SO(1, 3)$ (★★★)

Dans l'espace-temps quadri-dimensionnel de Minkowski, toute transformation de Lorentz s'écrit $x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$, reliant les coordonnées x'^μ aux coordonnées x^μ . Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle $\mathbf{X}' = \mathbf{\Lambda} \mathbf{X}$ où $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice carrée de composante Λ^μ_{ν} .

Q1. En exploitant l'invariant de Lorentz ${}^t \mathbf{X} \boldsymbol{\eta} \mathbf{X}$ avec $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ et ${}^t \mathbf{X}$ la transposée de la matrice colonne $\mathbf{X}$, montrer que $\mathbf{\Lambda}$ doit vérifier

$${}^t \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}. \quad (38)$$

Montrer que les matrices satisfaisant cette condition forment un groupe. Montrer que $\det(\mathbf{\Lambda}) = \pm 1$. Le groupe de Lorentz propre ($\det(\mathbf{\Lambda}) = 1$) et orthochrone ($\Lambda^0_0 \geq 0$) est noté $SO(1, 3)$.

Q2. Écrire explicitement la matrice Λ correspondant à la rotation d'axe (Ox) et d'angle $\epsilon \ll 1$ et trouver la matrice $\mathbf{J}_1$ telle que $\Lambda \approx \mathbf{1} - \epsilon \mathbf{J}_1$. En déduire les matrices $\mathbf{J}_2$ et $\mathbf{J}_3$ correspondant à des rotations infinitésimales d'axe (Oy) et (Oz) et d'angle ϵ . Écrire explicitement la matrice Λ correspondant à un boost de Lorentz le long de l'axe (Ox) et de rapidité ϵ et trouver la matrice $\mathbf{K}_1$ telle que $\Lambda \approx \mathbf{1} - \epsilon \mathbf{K}_1$. En déduire les matrices $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ correspondant à des boosts de Lorentz infinitésimales le long des axes (Oy) et (Oz) et de rapidité ϵ .

Q3. Les six matrices $\mathbf{J}_i$ et $\mathbf{K}_i$ pour $i = 1, 2, 3$ s'appellent les générateurs infinitésimaux du groupe de Lorentz et on peut écrire un élément de ce groupe sous forme exponentielle

$$\Lambda = \exp(-\theta_i \mathbf{J}_i - \phi_i \mathbf{K}_i), \quad (39)$$

où θ_i (angle) et ϕ_i (rapidité) pour $i = 1, 2, 3$ sont six paramètres continus. Montrer que

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] &= \mathbf{J}_3, & [\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3] &= \mathbf{J}_1, & [\mathbf{J}_3, \mathbf{J}_1] &= \mathbf{J}_2. \\ [\mathbf{J}_1, \mathbf{K}_2] &= \mathbf{K}_3, & (\text{et permutations}) \\ [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] &= -\mathbf{J}_3. & (\text{et permutations}) \end{aligned} \quad (40)$$

Nous voyons apparaître une structure mathématique. En particulier, ces relations de commutations forment l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz.

Pour aller plus loin— Pour celles et ceux qui souhaitent apprendre d'avantage sur la notion de groupe en physique, je recommande le chapitre 20 du très bon livre *Mathématiques pour la physique et les physiciens* de Walter Appel. Même si cet ouvrage est un livre de mathématiques à proprement parler, l'auteur rend le texte accessible aux physiciennes et physiciens et surtout utilise un langage et des notations que l'on utilise en physique. En plus, vous pourrez y trouver pleins d'application concrètes en physique. N'hésitez pas aussi à feuilleter les autres chapitres, ils sont tous excellents...

Rappels de cours

Quadri-vecteur énergie-impulsion. En considérant la masse m d'une particule comme une quantité intrinsèque invariante par changement de référentiel, on définit le quadri-vecteur énergie-impulsion par

$$p^\mu = mu^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}), \quad (41)$$

où u est la quadri-vitesse. La normalisation de la quadri-vitesse $u^2 = u_\mu u^\mu = c^2$ permet de trouver la célèbre formule

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2, \quad (42)$$

qui se retrouve en calculant p^2 . Au repos ($v = 0$), on obtient l'énergie de masse $E = mc^2$. L'énergie cinétique relativiste se trouve en soustrayant l'énergie de masse de l'énergie totale de la particule

$$E_c = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (43)$$

On retrouve $E_c \approx mv^2/2$ dans la limite newtonienne. Le bilan d'une collision entre particules en relativité restreinte doit satisfaire la conservation de la quadri-impulsion

$$\sum_i p_i^\mu = \sum_f p_f^\mu, \quad (44)$$

où les indices i et f désignent respectivement les particules avant et après la collision. Notez que la conservation de la quadri-impulsion contient à la fois la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

Particules de masse nulle. Pour une particule de masse nulle (comme le photon), la quadri-impulsion est de genre lumière $p^2 = 0$. L'énergie de la particule est donc proportionnelle à son impulsion

$$E = \|\mathbf{p}\| c, \quad (45)$$

quel que soit le référentiel. En mécanique quantique, unifiant ondes et particules, l'énergie d'un photon est relié à la pulsation de l'onde électromagnétique associée $E = \hbar\omega$, et l'impulsion du photon est liée au vecteur d'onde $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Le formalisme quadri-dimensionnel permet de réunir ces deux relations en une seule

$$p^\mu = \hbar k^\mu, \quad (46)$$

où k^μ est le quadri-vecteur d'onde (voir 3.3).

Relation fondamentale de la dynamique. La relation fondamentale de la dynamique en relativité s'écrit sous forme quadri-vectorielle

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\mathcal{A}^\mu = \mathcal{F}^\mu, \quad (47)$$

où $\mathcal{F}^\mu$ est le quadri-vecteur force. La propriété $u_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$ (voir 3.2) implique $u_\mu \mathcal{F}^\mu = 0$ et donc que la composante temporelle de $\mathcal{F}^\mu$ est nulle dans le référentiel instantané de la particule $\mathcal{R}_*$, où $u^\mu = (c, \mathbf{0})$.

4.1 Effet Compton (★)

On étudie la diffusion de photons sur des électrons selon la réaction

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-, \quad (48)$$

où l'électron initial est supposé au repos dans le référentiel du laboratoire. On note $\mathbf{p}$ l'impulsion du photon initial, $\mathbf{p}'$ celle du photon diffusé et $\mathbf{q}'$ l'impulsion de l'électron après la collision, et θ et ϕ les angles entre $\mathbf{p}$, et $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{q}'$ respectivement (voir schéma ci-dessous). En écrivant la conservation de la quadri-impulsion, montrer que l'écart entre les longueurs d'onde incidente et diffusée $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ dépend de l'angle de diffusion θ par la formule

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (49)$$

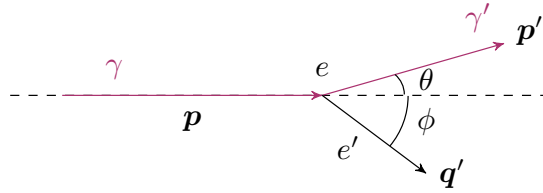


Figure 1: Schéma de l'interaction entre un photon et un électron au repos.

Pour aller plus loin— Ce résultat a été prédit et vérifié expérimentalement par Arthur Compton en 1922. Vous pouvez lire l'article original *A.H. Compton, Physical Review 21, p.483, 1923* sur internet ([A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements](#)). L'expérience, qui consistait à bombarder une cible de graphite avec des rayons X et mesurer la longueur d'onde du rayonnement diffusé en fonction de l'angle de diffusion, constitue une vérification des équations relativistes, et aussi de la dualité onde-particule de la mécanique quantique.

4.2 Désintégration d'une particule (★)

On considère la désintégration d'une particule selon $a \rightarrow b_1 + b_2$. Il est commode de se placer dans le référentiel inertiel où la particule a est au repos avant la désintégration. Plus généralement, on nomme **référentiel du centre de masse** $\mathcal{R}_{\text{CM}}$ le référentiel inertiel dans lequel la somme des impulsions de toutes les particules (initiales) en jeu est nulle.

Q1. En écrivant la conservation de la quadri-impulsion dans $\mathcal{R}_{\text{CM}}$, montrer que la masse de la particule initiale est nécessairement supérieure à la somme des masses des particules finales

$$m_a \geq \sum_f m_{b_f}. \quad (50)$$

Cette relation peut être interprétée géométriquement comme une inégalité triangulaire entre quadri-vecteurs impulsion.

Q2. Montrer que l'énergie des particules finales s'exprime en fonction des masses m_1, m_2 et m_a par

$$E_{1,2} = \frac{m_a^2 + m_{1,2}^2 - m_{2,1}^2}{2m_a} c^2, \quad (51)$$

et que l'impulsion commune aux deux particules finales s'écrit

$$p = p_1 = p_2 = \frac{\sqrt{f(m_a^2, m_1^2, m_2^2)}}{2m_a} c, \quad (52)$$

où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx)$.

4.3 Variables de Mandelstam (★)

On considère une collision de deux particules suivant la réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ et on note p_1, p_2, p_3 et p_4 les quadri-vecteurs impulsion de ces particules. On définit les variables de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_3 - p_1)^2, \quad u = (p_4 - p_1)^2. \quad (53)$$

Q1. Les définitions données de s, t et u sont-elles uniques? Sinon, proposer des définitions équivalentes. Expliquer pourquoi ces quantités sont des invariants relativistes.

Q2. On note m_i la masse de la particule i , E_i et p_i son énergie et le module de son impulsion dans le centre de masse de la collision, θ l'angle entre les impulsions de la particule 2 entrante et la particule 3 sortante dans ce même référentiel. Écrire s, t et u en fonction de ces variables dans le cas général, et quand toutes les particules sont ultra-relativistes.

Q3. Calculer les énergies et impulsions de toutes les particules dans le référentiel du centre de masse, en fonction des masses des particules et de s .

Q4. Montrer que $s + t + u$ s'exprime simplement en fonction des masses des particules. Montrer que $s - u = (p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)$, $u - t = (p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4)$ et $s - t = (p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$.

Remarque— En physique des particules, il est courant de simplifier l'écriture des équations en utilisant un système d'unités où $c = 1$. On rétablit automatiquement l'homogénéité des relations en multipliant par c toutes les quantités qui ont la dimension d'une impulsion et par c^2 toutes celles qui ont la dimension d'une masse. C'est la raison pourquoi les physiciens utilisent le GeV pour mesurer les masses des particules.

4.4 Production de paires électron-positron par des photons (★★)

Des photons de haute énergie (rayons gamma) sont produits par certaines sources astrophysiques très énergétiques (comme des étoiles à neutron ou des pulsars). Ces rayons gamma peuvent interagir avec des photons de faible énergie, comme des photons optiques, en produisant des paires électron-positron.

Q1. On considère, dans un référentiel $\mathcal{R}$, deux photons dont les énergies sont E_1 et E_2 , et les impulsions sont $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$. En notant p_1 et p_2 les quadri-impulsions des deux photons, donner l'expression de $(p_1 + p_2)^2$ en fonction de E_1, E_2 et de θ , l'angle entre $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$.

Q2. Quelle est la relation entre $(p_1 + p_2)^2$ et l'énergie totale dans le référentiel du centre de masse E_{CM} ? En déduire la condition que doivent vérifier E_1, E_2 et θ pour que la réaction $\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow e^+ + e^-$ soit possible.

Q3. L'énergie E_1 étant donnée, quelle est l'énergie minimale E_2^{min} pour avoir production d'une paire électron-positron ? Application numérique : calculer E_2^{min} pour $E_1 = 1 \text{ eV}$.

4.5 Photoproduction de mésons π (★★)

Par absorption d'un photon, le proton peut passer dans un état excité désigné par la lettre Δ . Ce Δ se désexcite ensuite en émettant un méson π . On peut ainsi observer les réactions suivantes :

$$\gamma + p \rightarrow \Delta \rightarrow p + \pi^0, \quad \gamma + p \rightarrow \Delta \rightarrow n + \pi^+.$$
 (54)

On prendra les masses du proton (p) et du neutron (n) égales à $0.94 \text{ GeV}/c^2$ et celles des mésons pi (π^0, π^+) égales à $0.14 \text{ GeV}/c^2$. La masse du Δ est $1.232 \text{ GeV}/c^2$.

Q1. Quelle doit être l'énergie du photon pour produire cette réaction sur un proton au repos ?

Q2. L'Univers est rempli d'un rayonnement de corps noir à 3K, résidu du Big-Bang. Quelle énergie minimum doit avoir un proton du rayonnement cosmique pour produire la réaction précédente sur un photon à 3K dont l'énergie la plus probable est $7 \times 10^{-4} \text{ eV}$? (Le proton est ultra-relativiste $E_p \approx c p_e$.)

Q3. On admettra que l'émission du π par le Δ se fait de façon isotrope dans le référentiel de ce dernier. Quelle est en moyenne la fraction de l'énergie du proton transférée au π^0 dans la réaction $\gamma + p \rightarrow \Delta \rightarrow p + \pi^0$?

Pour aller plus loin— Aujourd'hui, la recherche expérimentale en physique des particules se fait dans des grands collisionneurs de particules, comme le Large Hadron Collider (LHC) situé entre la France et la Suisse à Genève. Je recommande la vidéo *Le LHC : J'ai visité le plus grand accélérateur de particules du monde !* de l'incontournable chaîne Youtube ScienceEtonnante où vous y apprendrez comment les chercheurs s'y prennent pour découvrir de nouvelles particules.

Rappels de cours

Quadri-vecteur courant. La charge électrique Q est une grandeur invariante de Lorentz. Le quadri-vecteur courant est défini à partir de la quadri-vitesse par

$$j^\mu = \rho_\star u^\mu = (\rho_\star \gamma c, \rho_\star \gamma \mathbf{v}) = (\rho c, \mathbf{j}), \quad (55)$$

où $\rho_\star$ est la densité volumique de charge dans le référentiel inertiel instantané $\mathcal{R}_\star$ où les charges sont (localement) au repos, ρ est la densité de charge dans un référentiel quelconque, et $\mathbf{j}$ est la densité de courant. La conservation de la charge électrique s'exprime localement sous la forme classique ou quadri-vectorielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (56)$$

Équations de Maxwell classiques. Les équations de Maxwell se décomposent en deux équations homogènes et deux équations avec sources

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (57)$$

On définit les potentiels scalaire ϕ et vecteur $\mathbf{A}$ par $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$. Les potentiels ϕ et $\mathbf{A}$ ne sont pas uniques. Les transformations (dites de jauge)

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi, \quad (58)$$

où χ est un champ scalaire arbitraire, laisse les champs physiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ inchangés.

Quadri-vecteur potentiel. Les potentiels scalaire ϕ et vecteur $\mathbf{A}$ permettent de définir le quadri-vecteur potentiel

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right), \quad (59)$$

La transformation de jauge (58) se réécrit simplement $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$.

Tenseur Électromagnétique. Le tenseur (généralisation des quadri-vecteurs à des "quadri-matrices") électromagnétique est défini par $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Les composantes de ce tenseur antisymétrique sont

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme condensée

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (61)$$

Comme les équations de Maxwell peuvent s'écrire sous forme covariante (avec des objets quadri-vectoriels), elles sont parfaitement compatibles avec la relativité restreinte, et ne sont donc pas modifiées.

Invariants relativistes. Les quantités suivantes sont des invariants de Lorentz

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2 \left(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} \right), \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = \frac{8}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (62)$$

où les $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ sont les composantes du tenseur totalement antisymétrique appelé tenseur de Levi-Civita : $\epsilon_{0123} = 1$, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$ si $\mu\nu\rho\sigma$ est une permutation paire de 0123, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -1$ si $\mu\nu\rho\sigma$ est une permutation impaire de 0123, et $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ si deux indices au moins sont identiques.

5.1 Manipulation des équations de Maxwell (★)

Q1. À partir des équations de Maxwell sous forme covariante (61), retrouver les quatre équations de Maxwell sous forme classique (57).

Q2. Changement de référentiel. La loi de transformation du tenseur électromagnétique d'un référentiel inertiel $\mathcal{R}'$ à un autre $\mathcal{R}$ s'écrit $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$. On considère que $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme le long de l'axe (Ox) à vitesse v par rapport à $\mathcal{R}$. Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}$ se transforme comme

$$\begin{aligned} E'^x &= E^x, \\ E'^y &= \gamma(E^y - \beta c B^z), \\ E'^z &= \gamma(E^z + \beta c B^y). \end{aligned} \quad (63)$$

Q3. Invariance de jauge. Montrer que la transformation de jauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$ laisse le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ inchangé. On rencontre généralement deux choix de jauge : $\partial_i A^i = 0$ (jauge de Coulomb), ou $\partial_\mu A^\mu = 0$ (jauge de Lorenz). Attention, Lorenz n'est pas Lorentz !

Q4. Propagation. À partir des équations de Maxwell sous forme relativiste, écrire l'équation de propagation du quadri-vecteur potentiel A^μ dans le vide. Montrer que cette équation prend une forme très simple dans la jauge de Lorenz. Vérifier que toute fonction de la forme $\exp(ik_\mu x^\mu)$ avec $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est solution de cette équation (à une constante multiplicative près).

5.2 Particule chargée et quadri-force de Lorentz (★★)

Une particule de charge q plongée dans un champ électromagnétique subit une force, dite de Lorentz. Le tenseur électromagnétique permet de définir la quadri-force de Lorentz $\mathcal{F}^\mu_{\text{Lorentz}} = qF^{\mu\nu}u_\nu$. On suppose que les champs électrique et magnétique sont constants et tous les deux parallèles à l'axe (Ox), i.e. $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$.

Q1. Écrire sous forme matricielle la relation fondamentale de la dynamique relativiste.

Q2. En fixant l'origine temporelle $\tau = 0$ lorsque la vitesse le long de (Ox) est nulle, résoudre ces équations pour $u^0(\tau)$, $u^x(\tau)$, $u^y(\tau)$ et $u^z(\tau)$. Calculer $(u^y)^2 + (u^z)^2$. Commenter.

5.3 Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique (***)

On définit le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[F_{\mu}{}^{\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] , \quad (64)$$

à partir du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$.

Q1. Montrer que la trace de $T_{\mu\nu}$ est nulle, i.e. $T^{\mu}_{\mu} = 0$.

Q2. Exprimer les composantes T^{00} et T^{0i} en fonction des champs électrique et magnétique. Faire le lien avec des quantités familières en électromagnétisme classique.

Q3. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que

$$\partial_{\nu} T^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} J_{\nu} . \quad (65)$$

Rappels de cours

Degrés de liberté. Dans l'espace tridimensionnel, un système de N corps couplés à r relations indépendantes entre les coordonnées possède $f = 3N - r$ degrés de liberté. La dynamique d'un tel système correspond aux trajectoires des coordonnées en fonction du temps. Ces coordonnées sont soit les vecteurs position $\mathbf{r}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, N$, ou les coordonnées dites généralisées q_i pour $i = 1, 2, \dots, 3N$.

Notion de fonctionnelle. Une fonctionnelle est une généralisation d'une fonction. Plutôt que de dépendre d'une (ou plusieurs) variable, une fonctionnelle dépend d'une (ou plusieurs) fonction, elle-même dépendant d'une (ou plusieurs) variable. C'est donc une "fonction de fonction".

Lagrangien. Le lagrangien est défini à partir des coordonnées généralisées par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (66)$$

où $q = (q_1, q_2, \dots, q_{3N})$ et $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{3N})$ avec la notation $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. Si les forces appliquées au système dérivent d'un potentiel, i.e. $\mathbf{F} = -\nabla V$, alors le lagrangien s'écrit $\mathcal{L} = T - V$ où T est l'énergie cinétique et V le potentiel. L'action du système est définie par la fonctionnelle

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (67)$$

pour $t_{1,2}$ fixés. La solution à un problème mécanique est obtenue en résolvant un système de N équations différentielles du second-ordre, i.e. les équations d'Euler-Lagrange, donné par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (68)$$

Ces équations reproduisent les équations de Newton et découlent du principe de stationnarité de l'action $\delta S = 0$. Les mêmes équations sont valides pour tout autre choix de coordonnées.

6.1 Démonstration de l'équation d'Euler-lagrange (★)

Considérons un système décrit par une seule coordonnée généralisée $q(t)$ par simplicité. On suppose que l'on connaisse la trajectoire $q_0(t)$ entre les temps t_1 et t_2 qui rend l'action S extrémale, i.e. qui donne la valeur la plus petite pour la fonctionnelle S .

Q1. On suppose une petite déviation de la trajectoire $q_0(t)$ décrite par

$$q(t) = q_0(t) + \epsilon \eta(t), \quad (69)$$

où $\epsilon \ll 1$ est un paramètre infinitésimal, et $\eta(t)$ est une fonction qui s'annule aux temps initial et final $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ de sorte que $q(t_1) = q_0(t_1)$ et $q(t_2) = q_0(t_2)$. Écrire l'action $S(\epsilon)$ associée à la trajectoire $q(t)$ paramétrée par ϵ . Dériver par rapport à ϵ .

Q2. En intégrant par parties, utiliser le fait que la fonctionnelle $S(\epsilon)$ est extrémale pour la fonction $q_0(t)$, i.e. sa dérivée doit s'annuler, pour retrouver l'équation d'Euler-Lagrange.

6.2 Particule libre en coordonnées polaires (★)

Il n'est bien sûr pas naturel d'étudier un mouvement rectiligne uniforme en coordonnées polaires, mais cet exemple montre bien que le traitement d'un problème de mécanique à l'aide de coordonnées généralisées est indépendant du système de coordonnées choisi.

Q1. Écrire l'énergie cinétique d'une particule libre en coordonnées polaires (r, θ) et en déduire le lagrangien associé.

Q2. Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour les coordonnées généralisées $(q_1, q_2) = (r, \theta)$. Commenter.

6.3 Pendule simple (★)

Considérons une masse m attachée au bout d'un pendule de longueur l . On repère la position du pendule par son angle θ avec l'axe vertical.

Q1. Expliquer pourquoi le lagrangien du pendule s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (70)$$

Q2. À partir des équations d'Euler-Lagrange, retrouver l'équation du mouvement du pendule pour θ . On voit que contrairement à la résolution du problème par la mécanique newtonienne, la tension du fil n'intervient pas explicitement (la contrainte est prise en compte simplement avec $r = l$) et il n'y a pas d'équations vectorielles à projeter, mais seulement des grandeurs scalaires.

Pour aller plus loin— Comment peut-on approximer le nombre $\pi = 3,14\dots$ avec une expérience de mécanique ? Je vous recommande la vidéo *La réponse la plus inattendue à un problème de comptage* de la chaîne Youtube 3Blue1Brown pour un problème de mécanique qui va vous surprendre... Saurez-vous résoudre cette énigme ?

6.4 Force de Lorentz (★★)

Une particule de masse m et de charge q se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique tel que $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ et $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ où ϕ et $\mathbf{A}$ sont les potentiels scalaire et vecteur. La position de la particule est repérée par ses coordonnées cartésiennes.

Q1. Calculer la dérivée totale par rapport au temps du potentiel vecteur $\mathbf{A}$. Attention, prenez bien en compte que la position $\mathbf{x}(t)$ dépend du temps !

Q2. La particule est soumise à la force de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$. Montrer que les composantes de $\mathbf{F}$ peuvent se mettre sous la forme

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial v_i}, \quad (71)$$

où $V = q(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$. En déduire le lagrangien de la particule.

Q3. Retrouver les équations du mouvement à partir du lagrangien.

Q4. Les champs électromagnétiques sont invariants par les transformations de jauge $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$ et $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \chi$. Écrire le nouveau lagrangien $\mathcal{L}'$ après transformation de jauge et commenter.

6.5 Lagrangien du champ électromagnétique (***)

Les équations du champ électromagnétique peuvent s'écrire sous la forme d'un lagrangien $\mathcal{L}$ (ou plutôt une densité lagrangienne) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu. \quad (72)$$

À partir des équations d'Euler-Lagrange écrites sous forme quadri-vectorielle

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right), \quad (73)$$

retrouver les équations de Maxwell sous forme relativiste (relations aux sources).

6.6 Équation de Klein-Gordon (***)

Écrire l'équation du mouvement pour un champ scalaire dont la dynamique est décrite par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (74)$$

6.7 Vers les théories de jauge (***)

On considère un champ scalaire complexe de densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*. \quad (75)$$

Q1. Écrire la densité lagrangienne en fonction des parties réelle et imaginaire du champ scalaire $\phi = (A + iB)\sqrt{2}$. En déduire les équations d'Euler-Lagrange pour A, B et ϕ .

Q2. Vérifier que $\mathcal{L}$ est invariant sous l'action de la transformation $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{i\alpha} \phi$, avec α constant. Que se passe-t-il si α n'est pas constant ?

Q3. En écrivant la variation de $\mathcal{L}$ sous l'action d'une transformation infinitésimale $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, et en utilisant les équations du mouvement, montrer l'existence d'un quadricourant J^μ conservé tel que $\partial_\mu J^\mu = 0$, associé à l'invariance $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{i\alpha}\phi$.

Q4. On souhaite maintenant généraliser $\mathcal{L}$ pour obtenir un lagrangien invariant sous l'action de la transformation $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{i\alpha(x)}\phi$. On parle de symétrie locale (par opposition avec la symétrie globale lorsque α est constant). Dans ce but, on introduit un champ A_μ et la dérivée généralisée $D_\mu \equiv \partial_\mu + iA_\mu$. Déterminer la loi de transformation $A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu$ telle que

$$D_\mu(e^{i\alpha}\phi) = e^{i\alpha}\tilde{D}_\mu\phi. \quad (76)$$

En déduire un nouveau lagrangien invariant sous l'action de la transformation $\phi \rightarrow \tilde{\phi} = e^{i\alpha(x)}\phi$.

Rappels de cours

Principe de moindre action. Il est possible de résumer les lois de la mécanique sous une forme équivalente et concise avec un impact bien plus global applicable à tous les domaines en physique. C'est le principe de moindre action: *Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qui soit possible.*

Multiplicateurs de Lagrange. La méthode des multiplicateurs de Lagrange est une méthode pour trouver des extrema (minimum ou maximum) locaux d'une fonction en présence d'une (ou plusieurs) contrainte. En une dimension, pour extremiser une fonction $f(x)$ sous la contrainte $g(x) = 0$, on définit le lagrangien

$$\mathcal{L} = f(x) + \lambda g(x), \quad (77)$$

où le paramètre λ , traité comme indépendant, est un multiplicateur de Lagrange, et on cherche les points stationnaires de $\mathcal{L}$ considéré comme une fonction de x et de λ . Cette méthode se généralise à plusieurs contraintes.

Contraintes holonomes et non-holonomes. Une contrainte est dite holonome si elle peut s'exprimer sous la forme $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$ en fonction des vecteurs position $\mathbf{r}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, N$ d'un système à N corps. Pour les contraintes non holonomes, les coordonnées généralisées q_i pour $i = 1, 2, \dots, 3N$ ne sont pas indépendantes les unes des autres. Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i. \quad (78)$$

où les Q_i sont les forces généralisées associées aux forces non conservatives.

Contraintes de forme intégrale. Dans les problèmes de variations, la contrainte peut aussi s'exprimer sous la forme d'une intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} g(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt = 0. \quad (79)$$

L'extremum de l'action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt, \quad (80)$$

soumise à la contrainte (79) est obtenu en recherchant l'extremum de la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) - \lambda g(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)] dt, \quad (81)$$

où le multiplicateur de Lagrange λ est déterminé a posteriori par la contrainte.

7.1 Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes "à la plage" (★)

En 1661, Pierre de Fermat propose une approche des lois de l'optique géométrique basée sur l'idée que *la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples*. Selon ce principe, la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est stationnaire. Il s'agit d'un principe variationnel car la durée du parcours doit être extrémale, en générale minimale, par rapport à une petite variation du trajet.

Telle la lumière qui se propage moins vite dans l'eau que dans l'air, une sauveteuse secouriste court plus vite sur la plage qu'elle ne nage dans l'eau. Elle se trouve à un point A sur la plage lorsqu'elle aperçoit un petit garçon qui se noie dans l'eau en B . Sachant que la secouriste court en ligne droite à vitesse v_1 et nage à la vitesse $v_2 < v_1$, on souhaite trouver le point $I(x, 0)$ où elle doit entrer dans l'eau.

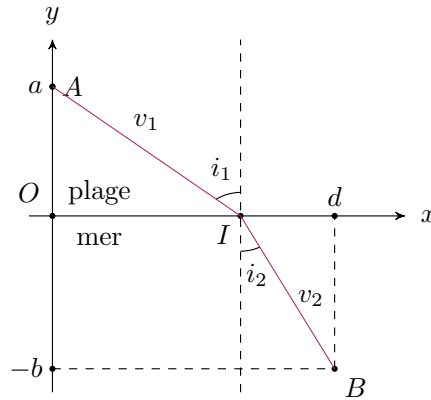


Figure 2: Schéma de la situation avec la paramétrisation des grandeurs.

Q1. Écrire le temps $T(x)$, fonction de la variable x , mis par la secouriste pour aller du point A au point B .

Q2. Minimiser la fonction $T(x)$ et exprimer cette condition en fonction des vitesses $v_{1,2}$ et des angles $i_{1,2}$ seulement. Commenter.

7.2 La corde pendue (★★)

On considère une corde inextensible et homogène de masse linéique μ et de longueur l attachée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = a \leq l$. On souhaite déterminer sa forme $y(x)$ à l'équilibre. Avant de résoudre le problème, avez-vous une idée du profil $y(x)$ (c'est une fonction que vous connaissez) ?

Q1. Faire un schéma de la situation. Sachant que la longueur de la corde est constante, déduire une contrainte sous forme intégrale que doit vérifier la corde.

Q2. Chaque élément de corde de longueur ds et de masse μds a pour coordonnées $(x, y(x))$. Les coordonnées du centre de gravité sont

$$X_g[y] = \frac{\int_0^a x \mu ds}{\int_0^a \mu ds}, \quad Y_g[y] = \frac{\int_0^a y \mu ds}{\int_0^a \mu ds}. \quad (82)$$

La condition d'équilibre impose que le centre de gravité est le plus bas possible, i.e. Y_g minimale avec la contrainte déterminée à la question précédente. En utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange, déterminer le profil $y(x)$ de la corde.

7.3 Maximiser l'entropie de Shannon (★★)

On considère une loi de probabilité discrète sur les points $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. On peut par exemple penser à un lancer de pièce (dans ce cas $n = 2$) avec une probabilité p_1 de tomber sur pile et p_2 de tomber sur face. En théorie de l'information, on définit l'entropie de Shannon par la quantité

$$f(\mathbf{p}) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i, \quad (83)$$

qui correspond intuitivement à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information. Dans cet exercice, on souhaite trouver $\mathbf{p}$ qui maximise l'entropie de Shannon. En langage entropique, cela revient à trouver la distribution de probabilité $\mathbf{p}$ la "moins structurée possible".

Q1. Quelle contrainte $g(\mathbf{p}) = 0$ doit satisfaire $\mathbf{p}$ pour que ce vecteur représente une distribution de probabilité ?

Q2. Introduisons un multiplicateur de Lagrange λ associé à la contrainte précédente et définissons le lagrangien

$$\mathcal{L} = f(\mathbf{p}) + \lambda g(\mathbf{p}). \quad (84)$$

Utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour trouver $\mathbf{p}$ afin de maximiser $f(\mathbf{p})$ sous la contrainte $g(\mathbf{p}) = 0$.

7.4 Géodésiques sur la sphère (★★)

Quel est le chemin le plus court entre deux points à la surface d'une sphère ?

Hint: Exprimer la longueur entre deux points sur la sphère comme fonctionnelle des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ où t est un paramètre (pas nécessairement le temps), et imposer la contrainte "être sur la sphère".

7.5 Brachistochrone (★★)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la forme du support qui permet à un mobile de descendre le plus rapidement possible d'un point O à un autre point A . Un point de masse m est lâché sans vitesse initiale du point O . Le point matériel se déplace alors sous l'effet de la pesanteur g sans frottement sur un support donné par la courbe $y(x)$, inconnue et à déterminer.

- Q1.** Faire un schéma du problème.
- Q2.** Écrire le temps T mis par le mobile pour aller de O à A sous la forme d'une intégrale sur x entre 0 et x_A .
- Q3.** Quelle quantité est conservée dans ce problème ? En déduire une expression de $\dot{x}$ en fonction de $y' = \frac{dy}{dx}$, y et g , puis réexprimer T .
- Q4.** Sachant que la hauteur qui sépare le point O du point A est notée h , déduire la contrainte du système et l'écrire sous forme d'une intégrale sur x .
- Q5.** En déduire l'action S et le lagrangien $\mathcal{L}$ du système après avoir introduit un multiplicateur de Lagrange. Déterminer une équation différentielle sur $y(x)$.
- Q6.** En introduisant la quantité $\theta(x)$ telle que $y'(x) = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$, écrire la courbe dite brachistochrone sous forme paramétrée par θ , i.e. écrire $x(\theta)$ et $y(\theta)$.
- Q7.** Vous venez de déterminer la courbe paramétrique d'une cycloïde. Tracer cette courbe entre $\theta = 0$ et $\theta = 6\pi$.
- Q8.** Calculer le temps mis par un point partant à vitesse initiale nulle sur la courbe en $\theta = 0$ pour atteindre le point le plus bas de la courbe $\theta = \pi$.

Rappels de cours

Formalisme hamiltonien. À partir des coordonnées généralisées q_i et du lagrangien $\mathcal{L}$, on définit les moments (ou impulsions) généralisés (ou conjugués) $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. Si le lagrangien ne dépend pas explicitement d'une coordonnée, alors il est dit cyclique. On en déduit la loi de conservation des moments à partir des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{dp_i}{dt} = 0. \quad (85)$$

Le hamiltonien $\mathcal{H}$ d'un système est défini à partir du lagrangien par la transformée de Legendre

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (86)$$

La solution à un problème mécanique est obtenue en résolvant un système de $2 \times 3N$ équations différentielles du premier-ordre, i.e. les équations de Hamilton, donné par

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (87)$$

On a aussi $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. Si le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé. Un tel système est dit conservatif. Si les forces appliquées au système dérivent d'un potentiel, i.e. $\mathbf{F} = -\nabla V$, alors le hamiltonien s'écrit $\mathcal{H} = T + V$ où T est l'énergie cinétique et V le potentiel.

Crochets de Poisson. On considère une fonction arbitraire des moments et coordonnées généralisés $f(q_i, p_i, t)$. Alors, on a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\} \quad \text{avec} \quad \{X, Y\} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right). \quad (88)$$

L'opération $\{X, Y\}$ est appelé crochet de Poisson. Une fonction est conservée si $\frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\} = 0$. Si elle ne dépend pas explicitement du temps et si $\{\mathcal{H}, f\} = 0$ alors elle est constante (au cours du temps). On a $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$ et $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.

Espace des phases. Dans le formalisme hamiltonien, les coordonnées généralisées et les moments généralisés sont considérés indépendants. La dynamique d'un système est alors décrit dans l'espace des phases: l'espace à $d \times 2N$ dimensions (pour N particules qui évoluent dans un espace à d dimensions) dont les coordonnées sont les Nd coordonnées généralisées q_i et les Nd moments généralisés p_i . On peut noter la position du système, $\mathbf{X}(t) = (q_1, q_2, \dots, q_{Nd}, p_1, p_2, \dots, p_{Nd})$, dans l'espace des phases. Le portrait de phase est la représentation de la dynamique du système dans l'espace des phases pour une énergie donnée.

8.1 Oscillateur harmonique et amorti (★)

L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique (classique) à une dimension s'écrit

$$U(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (89)$$

où m est la masse et ω est la pulsation.

Q1. À partir du lagrangien, écrire le hamiltonien de l'oscillateur harmonique et en déduire l'équation du mouvement. Représenter le portrait de phase de l'oscillateur harmonique dans le plan $(Q, P) = (\sqrt{\frac{m}{2}}\omega q, p/\sqrt{2m})$ pour une énergie totale E donnée.

Q2. Montrer à l'aide des équations de Hamilton que le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2), \quad (90)$$

décrit le mouvement d'un oscillateur amorti.

8.2 La bille et le cerceau (★★)

Une bille glisse sans frottement le long d'un cerceau de rayon R animé d'un mouvement de rotation autour de son axe à vitesse angulaire ω constante. La position de la bille sur le cerceau est déterminée par un seul degré de liberté, l'angle θ avec la verticale. La position du cerceau est elle décrite par l'angle ϕ .

Q1. Écrire le lagrangien de ce système en utilisant les coordonnées sphériques. Écrire le hamiltonien du système et en déduire l'équation du mouvement.

Q2. Montrer que la bille est soumise à un potentiel effectif $V(\theta)$ que l'on tracera en fonction de θ . On pose $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

Q3. Quel est le comportement de la bille pour des vitesses de rotation lente $\omega < \omega_0$? Même question dans le cas de la rotation rapide $\omega > \omega_0$?

8.3 Problème à deux corps et mouvement à force centrale (★★)

On s'intéresse au mouvement de deux particules ponctuelles de masse m_1 et m_2 interagissant entre elles par une force centrale dérivant d'un potentiel $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, où on note $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ les vecteurs position des deux particules.

Q1. Écrire le lagrangien de ce système. Proposer un changement de variables $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{R})$ qui simplifie le lagrangien. Se placer en coordonnées polaires et écrire les moments conjugués des coordonnées r et θ .

Q2. On décide de résoudre le problème sans fixer le système de coordonnées. Écrire le moment conjugué $\mathbf{p}$ de $\mathbf{r}$. Écrire le hamiltonien $\mathcal{H}$ du système en fonction de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{p}$. En déduire que l'énergie du système est conservée le long de la trajectoire. Écrire les équations de Hamilton.

Q3. Évaluer les crochets de Poisson $\{\mathbf{r}, \mathcal{H}\}$ et $\{\mathbf{p}, \mathcal{H}\}$ du vecteur position et du vecteur impulsion avec le hamiltonien. Confirmer ainsi le résultat de la question précédente.

Q4. Démontrer, en utilisant le crochet de Poisson, que le vecteur moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ est conservé. En déduire que le mouvement du point matériel effectif de position $\mathbf{r}$ est planaire. *Hint:* On utilisera la formule $\{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, c\} = \mathbf{a} \wedge \{\mathbf{b}, c\} + \{\mathbf{a}, c\} \wedge \mathbf{b}$.

Q5. Force gravitationnelle. On considère que le potentiel est de la forme $V(\mathbf{r}) = -k/r$ avec $k > 0$ et $r = \|\mathbf{r}\|$. Écrire les équations de Hamilton. Montrer que le vecteur de Runge-Lenz

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}}{m} - k \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (91)$$

est une quantité conservée. Calculer $\mathbf{A}^2$ et montrer qu'il s'exprime en fonction d'autres quantités.

8.4 Théorème du viriel (★★)

Une particule de masse m et de position $\mathbf{r}$ se déplace dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ à trois dimensions. On suppose dans la suite que la particule est dans un état d'énergie E .

Q1. Donner l'expression du hamiltonien $\mathcal{H}$ de la particule puis calculer le crochet de Poisson $\{A, \mathcal{H}\}$ où $A = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$. En déduire d'équation d'évolution de A .

Q2. Dans le cas d'un mouvement périodique (par exemple une planète tournant autour de son étoile), la moyenne temporelle $\langle f \rangle$ d'une grandeur physique $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ s'écrit

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) dt, \quad (92)$$

où T est la période. Démontrer le théorème du viriel

$$2 \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V \rangle. \quad (93)$$

Pour un potentiel central de la forme $V(r) = Cr^n$, quel est la relation entre l'énergie totale E , la moyenne de l'énergie cinétique et la moyenne de l'énergie potentielle ?

Q3. En général, le mouvement peut être confiné sans être périodique. Comment généraliser le théorème du viriel ?

Rappels de cours

Transformations canoniques. L'évolution d'un système est donnée par l'intégrale des équations du mouvement. Il est pertinent de choisir des coordonnées cycliques pour décrire le problème. Une transformation canonique $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ est une transformation qui préserve les crochets de Poisson.

Principe de Maupertuis. Pour résoudre un problème de mécanique par approche variationnelle, on cherche la trajectoire optimale qui extremise l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \quad \text{avec} \quad \delta S = 0. \quad (94)$$

Nous supposons que $\mathcal{L}$ est constant au cours du temps, c'est à dire que le système évolue à énergie constante notée E . Nous avons les relations suivantes: $\mathcal{L} = T - V$, $E = T + V$, ainsi $\mathcal{L} = 2T - E$ et donc

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (2T - E) dt = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - E(t_2 - t_1). \quad (95)$$

Écrire $\delta S = 0$ revient donc à écrire

$$\delta \Phi = 0, \quad (96)$$

où $\Phi = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt$ est l'action de Maupertuis.

Opérateurs de variation. L'opérateur Δ correspond à une variation au sens général du terme, c'est une variation *totale globale*. L'opérateur d représente une petite variation entre deux points proches. On dit que cet opérateur est infinitésimal, c'est une variation *totale locale*. Pour une grandeur multi-paramétrée, l'opérateur ∂ représente une variation infinitésimale, mais partielle, c'est à dire engendrée par un seul des paramètres. Elle ne peut jamais être manipulée seule, mais toujours en fraction, c'est une variation *partielle locale*. Enfin, l'opérateur δ dénote une quantité élémentaire, et provient du besoin de distinction sémantique entre variation et amplitude d'une variation. On a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \delta f &= \sum_i f_i dx_i, \quad \text{avec } f_i \text{ à déterminer,} \\ df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \\ \int_a^b df &= \Delta f = f(b) - f(a). \end{aligned} \quad (97)$$

9.1 Transformation de Legendre (★★)

On considère une courbe $\mathcal{C}_f$ dont chaque point est décrit par la coordonnée (x, y) où $y = f(x)$ avec f une fonction sur $\mathbb{R}$.

Q1. On se place à l'abscisse $x = x_*$. Rappeler l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}_f$ en x_* . Quelle est l'ordonnée à l'origine u_* de Δ ?

Q2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $z = f'(x)$ et on définit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \rightarrow u$. Ainsi, $u_* = F(z_*)$ et $z_* = f'(x_*)$. Quelle est l'expression de $F(z)$ en fonction de x et z ? La fonction F est appelée transformée de Legendre de la fonction f .

Q3. La fonction f' est inversible. Donner l'expression de $F(z)$ en fonction de z seulement. Application: Donner la transformée de Legendre F de $f : x \rightarrow x^2/2$.

9.2 Crochets de Poisson (★★)

Dans cet exercice, on démontre quelques propriétés sur les crochets de Poisson et on étudie une application.

Q1. Montrer les propriétés suivantes

- (i) $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
- (ii) $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$,
- (iii) $\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2$,
- (iv) $\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$ and $\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$,
- (v) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (identité de Jacobi).

Démontrer le théorème de Poisson: Si f et g sont deux intégrales premières du système, i.e. $\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = 0$, alors $\{f, g\}$ en est une aussi.

Comme application, on considère un oscillateur harmonique à une dimension de hamiltonien $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. On pose $x = X/\sqrt{m\omega}$ et $p = P\sqrt{m\omega}$.

Q2. Écrire le hamiltonien en fonction de X et P , puis calculer $\{X, P\}$.

Q3. On introduit les fonctions a et a^* par

$$a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}}, \quad a^* = \frac{X - iP}{\sqrt{2}}. \quad (98)$$

Écrire le hamiltonien en fonction de a, a^* et ω . Calculer le crochet de Poisson $\{a, a^*\}$. En déduire l'évolution temporelle de $a(t)$ et $a^*(t)$.

Pour aller plus loin— L'intérêt du crochet de Poisson est qu'il permet de passer facilement de la mécanique classique à la quantification de la mécanique quantique. Il suffit en général de remplacer le crochet de Poisson par le commutateur

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (99)$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur et $\hat{f}$ et $\hat{g}$ désignent des opérateurs définis sur un espace de Hilbert.

9.3 Transformations canoniques (★★)

On considère un oscillateur harmonique atténué à une dimension, d'hamiltonien

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} e^{-2\gamma t} + \frac{m\omega^2}{2} e^{2\gamma t} q^2, \quad (100)$$

où ω et γ sont constants.

Q1. Écrire les équations de Hamilton et retrouver l'équation du mouvement.

Q2. On propose la transformation de coordonnées suivante

$$p = e^{\gamma t} P - m\gamma e^{2\gamma t} q, \quad Q = e^{\gamma t} q. \quad (101)$$

Montrer que cette transformation est canonique, puis l'écrire sous forme matricielle. Que vaut le déterminant de la matrice de changement ? Quel est le nouveau hamiltonien ?

Q3. Donner l'évolution temporelle de Q et P . En déduire $q(t)$ et $p(t)$ en fonction du temps, en écrivant la solution sous la forme $\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

9.4 Principe de Maupertuis (★★)

On cherche à appliquer le principe de Maupertuis dans le cas d'une particule massive de masse m dans un potentiel V . On se place à une dimension pour simplifier.

Q1. Rappeler le lagrangien. Exprimer le moment généralisé et donner l'expression de l'énergie E du système.

Q2. En supposant que l'énergie est constante au cours du temps, exprimer la variation infinitésimale de temps dt en fonction de E, V et des coordonnées généralisées. Donner l'expression de l'action de Maupertuis Φ comme intégrale sur q .

Q3. En utilisant le principe variationnel $\delta\Phi = 0$, trouver l'équation différentielle de la trajectoire.

Q4. Trouver le temps écoulé le long de la trajectoire.

Rappels de cours

Méthode de Hamilton-Jacobi. Le formalisme de Hamilton-Jacobi donne une méthode systématique pour trouver la *meilleure* transformation canonique pour résoudre un problème mécanique. Considérons une transformation canonique

$$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i), \quad \mathcal{H}(q_i, p_i, t) \rightarrow \mathcal{K}(Q_i, P_i, t), \quad (102)$$

où le nouveau hamiltonien $\mathcal{K}$ est le plus trivial possible, i.e. $\mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = 0$. Dans ce cas, les équations de Hamilton deviennent triviales, i.e. $\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = 0$ et $\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} = 0$. Chaque position du système $\mathbf{X} = (Q_i, P_i)$ dans le nouvel espace des phases (Q_i, P_i) est donc un point d'équilibre (constant): $Q_i(t) = Q_i(0) = \text{cst}$ et $P_i(t) = P_i(0) = \text{cst}$. La méthode de Hamilton-Jacobi permet de trouver cette transformation canonique.

Équation de Hamilton-Jacobi. Les nouvelles coordonnées généralisées étant constantes, nous posons par convention $Q_i(t) = \alpha_i$ où α_i sont des paramètres constants. Nous cherchons une fonction $S(q_i, Q_i, t)$ génératrice des moments généralisés telle que $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ et $P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} = \beta_i$ où β_i sont des paramètres constants. L'interprétation physique des paramètres α_i et β_i dépendent du problème mécanique. Par construction, le nouvel hamiltonien devient $\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$. L'équation de Hamilton-Jacobi est une équation sur $S(q_i, \alpha_i, t)$ et est donnée par

$$\mathcal{H}(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, \alpha_i, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q_i, \alpha_i, t) = 0. \quad (103)$$

Cette équation est une équation aux dérivées partielles (q_i et t étant les variables) non-linéaire sur la quantité scalaire S , appelée la fonction principale de Hamilton. Résoudre cette équation revient à résoudre un problème mécanique donné.

Fonction caractéristique de Hamilton. Si le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, la fonction génératrice S devient $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - tE$ avec $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$. L'équation de Hamilton-Jacobi devient

$$\mathcal{H}(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = E. \quad (104)$$

La fonction W s'appelle la fonction caractéristique de Hamilton.

Interprétation de la fonction principale de Hamilton. En prenant la dérivée totale de la fonction $S(q_i, \alpha_i, t)$, nous obtenons

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L} + \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} = \mathcal{L}. \quad (105)$$

La fonction principale de Hamilton n'est rien d'autre que l'action $S = \int \mathcal{L} dt$ du système à une constante additive près.

10.1 Encore et toujours l'oscillateur harmonique (★)

On considère (je vous assure que c'est la dernière fois) un oscillateur harmonique à une dimension dont le hamiltonien s'écrit $\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$, où nous avons posé $m = 1$.

Q1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction $S(q, \alpha, t)$.

Q2. Utiliser la méthode de séparation des variables pour montrer que la résolution de cette équation mène à

$$S(q, \alpha, t) = \int \sqrt{2\alpha - \omega^2 q^2} dq - \alpha t. \quad (106)$$

Q3. Par définition, la fonction S génère la meilleure transformation canonique. Déterminer $P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \beta$, puis déterminer $q(t)$ en fonction de ω, α et β . Donner une interprétation physique aux paramètres α et β . Illustrer la transformation canonique entre les espaces des phases (q, p) et (Q, P) .

10.2 Particule dans un champ de force centrale (★★)

On considère une particule de masse m soumise à une force centrale attractive $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}/r^3$ où $r = \|\mathbf{r}\|$. Vue que le mouvement est planaire, on choisit d'utiliser les coordonnées polaires $(q_1, q_2) = (r, \theta)$ comme coordonnées généralisées.

Q1. Écrire l'expression du hamiltonien $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$ de la particule, puis établir l'équation de Hamilton-Jacobi.

Q2. On cherche des solutions par séparation des variables sous la forme $S(r, \theta, \alpha_r, \alpha_\theta) = S_r(r, \alpha_r, \alpha_\theta) + S_\theta(\theta, \alpha_r, \alpha_\theta)$ où α_r et α_θ sont des paramètres constants. Établir l'expression de S_r et celle de S_θ . En déduire que l'équation de la trajectoire $r(\theta)$ est donnée par

$$\int_0^r \frac{\alpha_\theta dr'}{r'^2 \sqrt{2m\alpha_r + \frac{2mk}{r'} - \frac{\alpha_\theta^2}{r'^2}}} = \theta + \text{cst}. \quad (107)$$

Q3. Résoudre l'équation précédente et montrer que la solution est une conique $r(\theta) = p/(1 + e \cos(\theta - \theta_0))$ où les paramètres p, e et θ_0 sont à déterminer. Représenter la trajectoire $r(\theta)$.

Paramètres de Lorentz

$$\beta = v/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta^2 + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

Pour une particule : $\beta = pc/E$, $\gamma = E/mc^2$, $\beta\gamma = p/mc$.

Rapacité : ϕ , $\tanh \phi = \beta$, $\cosh \phi = \gamma$, $\sinh \phi = \beta\gamma$.

Transformation de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

où x^μ et x'^μ sont les composantes d'un même quadri-vecteur x dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ respectivement, avec $\mathcal{R}'$ animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v = c\beta$ le long de l'axe (Ox) par rapport à $\mathcal{R}$.

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{sommation sur les indices répétés}) \Leftrightarrow x_0 = x^0, x_i = -x^i, i = 1, 2, 3.$$

Quadri-vecteurs

4-position : $(ct, \mathbf{x})$

4-impulsion : $(E/c, \mathbf{p})$

4-vitesse : $(\gamma(v)c, \gamma(v)\mathbf{v})$

4-courant : $(c\rho, \rho\mathbf{v})$

4-potentiel : $(\phi/c, \mathbf{A})$

4-vecteur d'onde : $(\omega/c, \mathbf{k})$

Invariants

Produit scalaire : $x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

Temps propre : $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$, $d\tau = dt/\gamma(v)$

Masse : $m^2 c^4 = E^2 - c^2 \mathbf{p}^2$

Champs électrique et magnétique

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Invariants : $\mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2 = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\frac{c}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$

Équations de Maxwell : $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$

Grandeurs mécaniques

$$\text{Lagrangien : } \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V ,$$

$$\text{Hamiltonien : } \mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = T + V ,$$

$$\text{Action : } S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt ,$$

où q_i (resp. p_i) sont les coordonnées (resp. impulsions) généralisées, et T et V sont l'énergie cinétique et le potentiel (si les forces dérivent d'un potentiel).

Équations dynamiques

$$\text{Euler-Lagrange : } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 , \quad (\delta S = 0) ,$$

$$\text{Hamilton : } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i ,$$

$$\text{Hamilton-Jacobi : } \mathcal{H}(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_i, \alpha_i, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q_i, \alpha_i, t) = 0 ,$$

où α_i sont des paramètres constants.

Crochet de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{\mathcal{H}, f\} \quad \text{avec} \quad \{X, Y\} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} - \frac{\partial Y}{\partial p_i} \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) ,$$

où $f(q_i, p_i, t)$ est une fonction arbitraire des moments et coordonnées généralisés.