Mécanique et Relativité Approfondies

Correction des exercices ($\star\star\star$) LU3PY536

Les exercices ($\star\star\star$) du polycopié n'ont pas été abordés en TD. Pour les plus curieux, ils permettent d'introduire et d'explorer des notions avancées en lien avec ce cours, que vous aller surement rencontrer au fil de votre cursus et/ou carrière en physique (surtout en théorie quantique des champs).

Groupe de Lorentz $SO(1,3)$

Q1. La quantité ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{X}$ est un invariant de Lorentz, donc ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{X} = {}^t\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{X}'$ où $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}$. Il s'en suit que

$$ {}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{X} = {}^t(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X})\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}) = {}^t\boldsymbol{X}\,{}^t\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}\,. \tag{1} $$

Cette égalité étant valide pour tout $\boldsymbol{X}$, on en déduit $\boldsymbol{\eta} = {}^t\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}$. La propriété de groupe se montre facilement (loi de composition interne, associativité, élément neutre et symmétrie). En prenant le determinant de cette dernière équation, nous obtenons

$$ \det({}^t\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}) = \det({}^t\boldsymbol{\Lambda})\det(\boldsymbol{\eta})\det(\boldsymbol{\Lambda}) = -\det(\boldsymbol{\Lambda})^2\,, \tag{2} $$

car $\det({}^t\boldsymbol{\Lambda}) = \det(\boldsymbol{\Lambda})$ et $\det(\boldsymbol{\eta}) = -1$. On en déduit que $\det(\boldsymbol{\Lambda}) = \pm 1$.

Q2. La matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ correspondant à la rotation d'axe (Ox) et d'angle $\epsilon \ll 1$ s'écrit

$$ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ 0 & 0 & \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\epsilon \\ 0 & 0 & \epsilon & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} - \epsilon \boldsymbol{J}_1\,, \tag{3} $$

où la matrice $\boldsymbol{J}_1$ est donnée par

$$ \boldsymbol{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4} $$

En suivant la même procédure pour les axes (Oy) et (Oz), on trouve

$$ \boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{J}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{5} $$

La matrice $\boldsymbol{\Lambda}$ correspondant à un boost de Lorentz le long de l'axe (Ox) et de rapidité ϵ s'écrit

$$ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cosh\epsilon & -\sinh\epsilon & 0 & 0 \\ -\sinh\epsilon & \cosh\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} - \epsilon \boldsymbol{K}_1\,, \tag{6} $$

où la matrice $\boldsymbol{K}_1$ est donnée par

$$\boldsymbol{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

En suivant la même procédure pour les axes (Oy) et (Oz), on trouve

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Q3. Ces propriétés sont élémentaires à montrer, c'est juste long. En calculer quelques unes suffit à se convaincre que les relations sont correctes.

Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

Q1. Pour montrer que la trace de $T_{\mu\nu}$ est nulle, il faut bien faire attention à la position des indices. Concrètement nous avons

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\mu} = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\eta^{\mu\nu} F_{\mu}{}^{\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[F^{\nu\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \times 4 F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[-F^{\sigma\nu} F_{\sigma\nu} + F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] \\ &= 0 \,, \end{aligned} \tag{9}$$

où nous avons utilisé le fait que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est antisymmétrique, i.e. $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, et le fait que $\eta^{\mu}{}_{\mu} = 4$.

Q2. D'une part, nous savons que $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2)$. D'autre part, nous avons (attention la forme explicite du tenseur $F^{\mu\nu}$ est définie avec les indices en haut)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[\eta_{\sigma\alpha} F^{\mu\sigma} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] . \tag{10}$$

On trouve

$$T^{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\boldsymbol{E}^2 + c^2 \boldsymbol{B}^2 \right) , \tag{11}$$

qui correspond à la densité d'énergie du champ électromagnétique, et

$$T^{0i} = \frac{1}{c} \Pi^i \,, \tag{12}$$

où $\boldsymbol{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{B}$ est le vecteur de Pointing.

Q3. La divergence du tenseur énergie-impulsion s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu}{}_{\nu} &= \frac{1}{\mu_0} \left[\partial_\mu F^{\mu\sigma} F_{\sigma\nu} + F^{\mu\sigma} \partial_\mu F_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} F^{\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} \right] \\ &= J^{\sigma} F_{\sigma\nu} + \frac{1}{2\mu_0} F^{\rho\sigma} \left(\partial_\rho F_{\sigma\nu} + \partial_\sigma F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\sigma} \right) , \end{aligned} \tag{13}$$

où nous avons utilisé l'équation de Maxwell pour le premier terme, et l'identité

$$2F^{\mu\sigma}\partial_\mu F_{\sigma\nu} = F^{\mu\sigma}\partial_\mu F_{\sigma\nu} + F^{\sigma\mu}\partial_\mu F_{\nu\sigma} = F^{\rho\sigma}\partial_\rho F_{\sigma\nu} + F^{\rho\sigma}\partial_\sigma F_{\nu\rho}\,. \tag{14}$$

Finalement, les trois termes entre parenthèses s'éliminent et on obtient bien $\partial_\mu T^{\mu\nu} = -F^{\nu\sigma}J_\sigma$.

Lagrangien du champ électromagnétique

La difficulté de cette exercice réside entièrement dans la manipulation d'indices (c'est aussi un classique que vous allez refaire en cours de théorie quantique des champs). L'idée principale est d'utiliser les identités

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} = \delta_\mu^\nu\,, \quad \frac{\partial(\partial_\mu A_\nu)}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta\,. \tag{15}$$

Nous avons d'abord

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = -\frac{\partial(A_\mu j^\mu)}{\partial A_\alpha} = -\delta_\mu^\alpha j^\mu = -j^\alpha\,. \tag{16}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= \frac{-1}{4\mu_0}\frac{\partial}{(\partial_\alpha A_\beta)}[(\partial_\mu A_\nu)(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\sigma A_\rho) - (\partial_\mu A_\nu)(\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\partial_\sigma A_\rho) \\
&\quad - \partial_\nu A_\mu(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\sigma A_\rho) + \partial_\nu A_\mu(\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\partial_\sigma A_\rho)] \\
&= \frac{-1}{4\mu_0}[\delta_\mu^\alpha \delta_\nu \beta \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\sigma A_\rho + (\partial_\mu A_\nu)\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\alpha\delta_\rho^\beta \\
&\quad - \delta_\mu^\alpha \delta_\nu \beta \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\partial_\sigma A_\rho - (\partial_\mu A_\nu)\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\alpha\delta_\rho^\beta \\
&\quad - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu \beta \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\partial_\sigma A_\rho - (\partial_\nu A_\mu)\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\alpha\delta_\rho^\beta \\
&\quad + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu \beta \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\partial_\sigma A_\rho + (\partial_\nu A_\mu)\eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\alpha\delta_\rho^\beta] \\
&= \frac{-1}{4\mu_0}[4\partial^\alpha A^\beta - 4\partial^\beta A^\alpha] \\
&= -\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta}\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Finalement, on retrouve bien

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu\,. \tag{18}$$

Équation de Klein-Gordon

Les dérivées partielles de la densité lagrangienne sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\,, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\,. \tag{19}$$

L'équation du mouvement associée est donc

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial^\mu\partial_\mu\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0\,. \tag{20}$$

Vers les théories de jauge

Q1. En insérant la décomposition $\phi = (A + iB)/\sqrt{2}$ où A et B sont réels, la densité lagrangienne s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu A\partial^\mu A + \frac{1}{2}\partial_\mu B\partial^\mu B - \frac{1}{2}m^2(A^2 + B^2)\,. \tag{21}$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour A et B sont donc (cf exercice précédent)

$$\partial_\mu \partial^\mu A + m^2 A = 0\,, \quad \partial_\mu \partial^\mu B + m^2 B = 0\,. \tag{22}$$

Ces deux équations se combinent pour donner l'équation complexe

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0\,. \tag{23}$$

Q2. Si α est constant, alors

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = \partial_\mu (e^{i\alpha}\phi) = e^{i\alpha}\partial_\mu \phi\,, \quad \partial_\mu \tilde{\phi}^* = \partial_\mu (e^{-i\alpha}\phi^*) = e^{-i\alpha}\partial_\mu \phi^*\,. \tag{24}$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est donc invariant par transformation $\phi \to \tilde{\phi} = e^{i\alpha}\phi$. Par contre, si α n'est pas constant dans l'espace-temps (i.e. $\alpha(x)$), alors

$$\partial_\mu \tilde{\phi} = \partial_\mu (e^{i\alpha}\phi) = e^{i\alpha}(\partial_\mu \phi + i\partial_\mu \alpha\, \phi)\,. \tag{25}$$

Par conséquent, le Lagrangien $\mathcal{L}$ n'est pas invariant sous la transformation $\phi \to \tilde{\phi} = e^{i\alpha}\phi$ à cause des dérivées de $\alpha(x)$.

Q3. En utilisant les deux degrés de liberté ϕ et ϕ^*, la variation de $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\partial_\mu\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\delta\partial_\mu\phi^* \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \\ &+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right)\right]\delta\phi^* + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta\phi^*\right)\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Les termes entre crochets sont nuls pour une solution des équations du mouvement, vérifiant les équations d'Euler-Lagrange. L'invariance du Lagrangien implique que pour $\delta\phi = i\alpha\phi$ et $\delta\phi^* = -i\alpha\phi$, on a

$$\delta\mathcal{L} = i\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\phi^*\right) = i\alpha\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) = 0 \tag{27}$$

On en déduit que le quadri-vecteur $J^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$ est conservé.

Q4. On cherche la loi de transformation pour A_μ telle que

$$D_\mu(e^{i\alpha}\phi) = \partial_\mu(e^{i\alpha}\phi) + iA_\mu e^{i\alpha}\phi = e^{i\alpha}\tilde{D}_\mu\phi = e^{i\alpha}(\partial_\mu\phi + i\tilde{A}_\mu\phi)\,. \tag{28}$$

Ceci implique $\tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha$. On peut remarquer que cette transformation est identique à une transformation de jauge pour le quadri-vecteur potentiel de l'électromagnétisme. Dans l'approche moderne de la physique des particules, l'électromagnétisme, est plus généralement les interactions élémentaires sont associées à des symétries de type local, appelées symétries de jauge. Dans notre exemple, le Lagrangien généralisé s'écrit

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*\,, \tag{29}$$

où on a simplement remplacé les dérivées partielles ∂_μ par des dérivées dites covariantes D_μ. On pourrait également ajouter le Lagrangien du champ électromagnétique, ce qui permettrait de décrire la dynamique couplée entre champ électromagnétique et matière chargée, ici décrite par un champ scalaire complexe.