

Invitation à la Théorie des Cordes

La théorie des cordes est un sujet vaste et réputé très difficile, tant sur le plan technique que conceptuel, qui a pour ambition d'unifier la physique quantique et la relativité. Bien plus qu'une théorie de "gravité quantique", elle a offert aux physiciens pleins de nouveaux outils et un regard nouveau sur d'autres domaines de la physique. Nous proposons de démystifier certaines préconceptions liées à cette théorie et d'étudier les aspects *classique*, *quantique* et *relativiste* d'une corde. Cette invitation à la théorie des cordes est inspirée par l'excellente vidéo *Qu'est ce que la théorie des cordes ?* de la chaîne Youtube Scientia Egredia.

La corde classique

Nous considérons une corde sans raideur dans un plan à deux dimensions, caractérisée par sa masse linéique μ et une tension constante T . La dynamique de la corde est décrite par l'abscisse verticale $y(t, x)$, fonction du temps et de l'axe horizontale. Nous supposons que la corde est attachée en $x = 0$ et $x = L$ si bien que la fonction $y(t, x)$ vérifie les conditions limites $y(t, 0) = y(t, L) = 0$. Nous supposons de plus que les vibrations de la corde sont petites $|\frac{\partial y}{\partial x}| \ll 1$.

Q1. Appliquer le principe fondamentale de la dynamique à une section infinitésimale de la corde et déterminer l'équation du mouvement de $y(t, x)$. On posera $v = \sqrt{T/\mu}$. Quelle est l'interprétation physique de v ?

Q2. En cherchant des solutions stationnaires sous la forme $y(t, x) = f(t)g(x)$, montrer que la solution générale qui vérifie les conditions aux limites $y(t, 0) = y(t, L) = 0$ s'écrit sous la forme

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\omega_n}{v} x\right) \sin(\omega_n t), \quad (1)$$

où ω_n est la pulsation d'un mode $y_n(t, x)$ que l'on déterminera. Représenter schématiquement les modes $n = 1, 2$ et 3 . La corde classique peut donc être décrite par une infinité de modes discrets et découplés car le système est linéaire.

Q3. Nous définissons l'énergie moyenne de la corde par

$$E = \mu \left\langle \int_0^L \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^2 dx \right\rangle, \quad (2)$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne une moyenne temporelle. En Appliquant l'identité de Parseval

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad \text{pour} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\omega_n}{v} x\right), \quad (3)$$

montrer que l'énergie d'un mode est donnée par $E_n = \frac{\mu L}{4} \frac{A_n^2}{v^2} \omega_n^2$. En supposant que l'amplitude des modes est constante, $A_n = A$ pour tout $n > 0$, représenter schématiquement les niveaux d'énergie.

La corde quantique

Nous essayons maintenant de quantifier la corde classique pour étudier ces aspects quantiques. Généralisons le problème en considérant que l'espace-temps est de dimension D (pour l'instant arbitraire), et on suppose que la corde peut vibrer dans toutes les directions transverses à la direction de propagation. Une stratégie naturelle pour rendre la corde quantique et de remplacer chaque mode de la corde classique par un oscillateur harmonique quantique. Chaque état quantique de la corde est donc décrit par un nombre entier $N_{i,n}$ où $i = 1, \dots, D$ indexe les dimensions de l'espace-temps, et $n = 1, 2, \dots$ indexe les modes. On rappelle que l'énergie d'un oscillateur harmonique quantique est $E_{i,n} = \omega_n(\frac{1}{2} + N_{i,n})$ avec $\omega_n = \frac{\pi v}{L}n$.

Q1. L'énergie totale de la corde dans un certain état quantique $|\mathbf{N}\rangle$, de nombre quantique $N_{i,n}$, s'écrit

$$E_{|\mathbf{N}\rangle} = \sum_{i=1}^D \sum_{n=1}^{\infty} E_{i,n}. \quad (4)$$

Quel est l'énergie de point zéro correspondant à l'énergie de la corde dans son état fondamental, i.e. lorsque tous les oscillateurs harmoniques sont dans l'état fondamental $|\mathbf{N}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$? Commenter.

Q2. Essayons de donner une valeur finie à l'énergie de point zéro de la corde quantique. Pour cela, il faut donner un sens à la somme (infinie) $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Considérons la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (5)$$

définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$ afin que la série converge. En appliquant la formule d'Abel-Plana¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(t)dt + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (6)$$

calculer $\zeta(-1)$. Ce résultat surprenant doit être interprété comme la "valeur finie naturelle" que l'on peut donner à la série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} n$ si l'on prolonge par continuité analytique la fonction ζ de Riemann.

Q3. En théorie quantique des champs, toute particule est décrite par une excitation, au sens de premier état excité, d'un champ. Dans notre cas, on considère que le premier état excité de la corde décrit une particule de masse nulle,² de sorte que

$$E_{|\mathbf{0}\rangle} + \frac{\pi v}{L} = 0. \quad (7)$$

Montrer que ce postulat impose une condition sur la dimension de l'espace-temps D .

¹Cette formule se démontre en utilisant le théorème de Cauchy de l'analyse complexe (auss appelé théorème des résidues).

²Cela peut être démontré par des arguments de théorie des groupes. En particulier, dans un espace-temps de dimension D , une particule de masse nulle est décrite par $D - 2$ états de polarisation (comme le photon), et les particules massives par $D - 1$ états de polarisation (comme les bosons Z et W). Ici, le premier état excité est dégénéré $D - 2$ fois donc chacun des états de même énergie $E_{|\mathbf{0}\rangle} + \frac{\pi v}{L}$ décrit une particule de masse nulle.

La corde relativiste

L'étude de la propagation d'une corde relativiste dans l'espace-temps nécessite de changer notre vision habituelle de ce qu'est une propagation. Dans l'espace-temps, la propagation d'une particule est décrite par une surface unidimensionnelle (une ligne). De même, la propagation d'une corde de longueur L peut être vue comme une surface à deux dimensions, que l'on note $\mathcal{M}$, plongée dans l'espace-temps. Lorsque la corde est ouverte, cette surface est une feuille $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times [0, L]$, alors que pour une corde fermée, cette surface est un tube $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathcal{S}_L^1$. L'étude de la propagation est donc complètement équivalente à l'étude de cette surface $\mathcal{M}$. La stratégie que nous allons suivre est d'appliquer un principe de moindre action covariant (de sorte à ce que la description est compatible avec la relativité restreinte) pour cette surface $\mathcal{M}$ dans un espace-temps de dimension D .

Q1. Considérons un espace-temps $\mathbb{R}^{1,D-1}$ muni de coordonnées X^μ avec $\mu = 0, 1, \dots, D-1$ et d'une métrique $G_{\mu\nu}(X)$.³ Pour une particule ponctuelle, la trajectoire dans l'espace-temps peut être paramétrisée par un paramètre $\sigma \in \mathbb{R}$ de sorte que les fonctions $X^\mu(\sigma)$ décrivent cette trajectoire. L'action de cette particule est

$$S_{\text{particule}}[X] = -m \int d\sigma \sqrt{-G_{\mu\nu}(X) \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}}, \quad (8)$$

où m est la masse de la particule et σ doit être intégrée sur le chemin $\mathcal{M}$. Faites un dessin de la situation.

Q2. De la même manière, pour une corde, la propagation est une surface à deux dimensions que l'on paramétrise par deux grandeurs $(\sigma^0, \sigma^1) \in \mathbb{R} \times [0, L]$. Les coordonnées de l'espace-temps qui décrivent la propagation de la corde sont donc fonctions de ces deux paramètres $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1)$. Par analogie, nous admettons que l'action de la corde est

$$S_{\text{corde}}[X] = -T \iint_{\mathcal{M}} d\sigma^0 d\sigma^1 \sqrt{-\det \left(G_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} \right)}, \quad (9)$$

où T est la tension de la corde. Faites un dessin de la situation. Interpréter le terme sous la racine carrée de l'action.

Q3. Considérons une corde *au repos* de longueur L dans un espace-temps de Minkowski. Pendant un temps très court δX^0 , on choisit de paramétrer les coordonnées de la corde par $X^0(\sigma^0, \sigma^1) = \sigma^0$, $X^1(\sigma^0, \sigma^1) = \sigma^1$, et $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1) = 0$ pour $\mu = 2, \dots, D$. Déterminer la matrice $G_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b}$ puis montrer que

$$S_{\text{corde}} = -T \delta X^0 L. \quad (10)$$

Interpréter la quantité $\delta X^0 L$ puis montrer que l'énergie potentielle de la corde s'écrit

$$V(L) = TL. \quad (11)$$

Comparer avec l'énergie potentielle d'un élastique classique.

³Nous prendrons la convention $(- + \dots +)$ comme signature de la métrique et posons $c = 1$ pour la vitesse de la lumière.

Q4. Nous voulons maintenant étudier des petites vibrations de la corde relativiste. Pour cela, nous décidons de paramétrer les coordonnées de la corde par

$$\begin{aligned} X^0(\sigma^0, \sigma^1) &= \sigma^0 = t, \\ X^1(\sigma^0, \sigma^1) &= \sigma^1 = x, \\ X^2(\sigma^0, \sigma^1) &= y(\sigma^0, \sigma^1) = y(t, x), \end{aligned} \tag{12}$$

et $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1) = 0$ pour $\mu = 3, \dots, D$, avec les conditions $|\frac{\partial X^2}{\partial \sigma^0}| \equiv |\frac{\partial y}{\partial t}| \ll 1$ et $|\frac{\partial X^2}{\partial \sigma^1}| \equiv |\frac{\partial y}{\partial x}| \ll 1$. Calculer $\det(G_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b})$, puis montrer que le Lagrangien de la corde est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{T}{2} \int dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - LT - \frac{T}{2} \int dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \tag{13}$$

Identifier l'énergie cinétique et potentielle de la corde. Dériver l'équation du mouvement décrivant les vibrations de la corde. En particulier, montrer que les petites vibrations de la corde relativiste se propagent nécessairement à la vitesse de la lumière $c = 1$.

Conclusion.— En combinant les principes fondamentaux de la physique quantique et de relativité, les modes de vibration d'une corde décrivent des particules de masse nulle qui se propagent à la vitesse de la lumière dans un espace-temps qui nécessite plus de dimensions que celles auxquelles nous avons l'habitude. En particulier, le spectre de cette corde fait apparaître le graviton, c'est à dire une excitation quantique de la gravité ! On parle de gravité quantique.