

Projet de stage pédagogique

Une enquête criminelle

Arthur VIETTE et Denis WERTH

Lycée Sainte Catherine Labouré

Mars 2019

Avant-propos

Ce projet s'inscrit dans le cadre d'un stage pédagogique que nous avons pu effectuer au sein de notre cursus à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay. De Novembre à Mars 2019, nous avons été chaleureusement accueilli au lycée Sainte Catherine Labouré, pour cela nous remercions M. Cacheux, directeur adjoint, ainsi que M. Mawawa, enseignant de physique-chimie et tuteur durant ce stage.

Cette immersion professionnelle nous a permis d'enseigner au sein d'une classe de terminale scientifique en physique-chimie. En plus de certains cours magistraux que nous avons eu la chance de superviser, le lycée nous a donné l'opportunité de mener un projet pédagogique à long terme sur les créneaux d'ATL, essentiellement deux heures le mardi soir.

Nous présentons dans ce document le projet construit dont l'idée principale était de développer le goût des sciences au sens large et adopter une démarche scientifique s'inscrivant dans les compétences à acquérir afin de passer le baccalauréat.

Nous avons essayé de susciter l'intérêt des élèves pour ce projet en le présentant sous forme d'enquête criminelle. Chaque sujet permettait de trouver un indice supplémentaire afin d'identifier un potentiel criminel. Une volonté d'interdisciplinarité a été adoptée afin de proposer aux élèves des sujets à la lisière de plusieurs domaines et leur montrer que les matières enseignées au lycée n'étaient pas cloisonnées. C'est ainsi que ce projet mêle informatique, mathématiques, physique, chimie et biologie.

Table des matières

Synthèses personnelles	5
Sujet 1 : Méthode des moindres carrés	7
Le nuage de points	7
Détermination de la droite affine	8
La masse du tueur	9
Sujet 2 : Diffraction des ondes lumineuses	13
Sujet 3 : Étude d'une population de bactéries	16
Une suite numérique	16
Représentation de la population de bactéries	16
Caractérisation de la population de bactérie	17
Sujet 4 : Dosage par étalonnage - Spectrophotométrie	21
Sujet 5 : Balistique	24
Le modèle utilisé	24
Les équations du mouvement (Sujet type BAC)	24
Étude de la trajectoire du projectile	25
Devoir surveillé : Conclusion de l'enquête policière	30

Synthèse personnelle

Denis WERTH

Aux côtés d'élèves de terminales S et supervisé par Gabriel Mawawa, enseignant de physique-chimie, j'ai pu découvrir le métier d'enseignant avec beaucoup d'autonomie et de liberté aussi bien dans la conception des sujets que dans les méthodes pédagogiques employées.

Il m'a été confié le chapitre *Cinématique et dynamique newtonienne* que j'ai pu enseigner durant trois séances d'une heure. Bien qu'une entière liberté m'a été donnée de la part de notre encadrant, la volonté de rendre ce cours agréable, ludique tout en étant rigoureux était de suite présente car ce chapitre introduit tous les concepts clefs du programme de terminale scientifique.

De fait, je me suis plongé dans de longues heures de préparation à l'aide des manuels de cours et du programme officiel du Ministère de l'Education nationale. Une prise de recul a été nécessaire afin d'introduire des concepts, *a priori* sans aucune difficulté pédagogique particulière, de manière claire, ordonnée et rigoureuse. Je me suis alors taché de construire un plan cohérent qui ne se mord pas la queue. Pour donner un exemple frappant de manque de rigueur dans un manuel scolaire, un référentiel galiléen était défini par le fait que c'est un référentiel dans le lequel la première loi de Newton s'applique tandis que la première loi de Newton suppose déjà la connaissance de la notion de référentiel galiléen. J'ai aussi tenté de montrer le lien étroit entre les mathématiques, matière souvent considérée trop difficile et dont l'utilité n'est pas clairement mise en avant à mon goût au lycée en général, et la physique. Comme ce chapitre introduit en partie la notation vectorielle en physique, je me suis senti obligé de faire un "point maths" en début de cours.

Grâce à un petit effectif (14 élèves), la proximité avec les élèves s'est tout de suite ressentie, ce qui m'a permis d'expliquer à nouveau des points techniques du cours. Etant très attaché au rythme que le professeur donne à son cours – une bonne dynamique permet à mon sens de ne pas sombrer dans l'ennui et de stimuler la curiosité de l'élève – j'ai choisi de distribuer un plan du cours à chaque élève et de faire copier le cours que j'écrivais au tableau. Cela m'a permis de réguler le rythme du cours, d'avoir la pleine attention de tous les élèves et de m'adapter sur quelques explications qui méritaient plus de temps. Ce n'est que par surprise que j'ai découvert que les élèves font très attention au vocabulaire employé. Ainsi j'ai dû contrôler plus que d'habitude la manière dont je disais les choses. Cet exercice stimulant m'a pris conscience que le métier de professeur demandait beaucoup de rigueur, de patience, de répétition et de contrôle de soi.

Ce stage, accompagné de mon très cher ami Arthur Viette, m'a plongé à la fois au coeur de la salle des professeurs que devant une classe. Patience, répétition, passion. Telle serait pour moi la devise ternaire de l'enseignant. Désireux de travailler dans la recherche académique, les compétences de pédagogie, d'écoute et de patience sont capitales. J'ai ainsi vécu une expérience très enrichissante, tant sur le point intellectuel que humain.

Méthode des moindres carrés

Aujourd'hui, un meurtre a été commis. La police est sur place afin d'analyser la scène de crime et récolter autant de données que possible dans le but de déterminer le tueur. Après avoir examiné le jardin de la maison où s'est déroulé le crime, des experts en criminologie ont trouvé une trace de pas dans la boue¹.

Le but de ce TP est d'identifier la masse du tueur en analysant l'empreinte de sa chaussure. Il existe une relation entre la profondeur de la trace de la chaussure et la masse de l'individu qui l'a laissée. On imagine que plus une trace de pas est profonde, plus l'individu a de chance d'être lourd. Après des études faites par des experts, tout laisse à penser qu'il existe une relation linéaire entre la profondeur de la trace de pas et la masse de l'individu qu'il s'agit de trouver. L'équipe de criminologie a mesuré la profondeur de la trace de pas trouvée, elle est de **8mm**. **Le but de ce TP est de trouver la masse du tueur à partir de cette donnée**. Pour cela, nous allons utiliser ce qui est appelée la méthode des moindres carrés.

Les experts ont répertorié les traces de pas de 15 personnes ainsi que leurs masses respectives. Cela nous donne deux ensembles de données, des valeurs X pour la profondeur des traces de pas (en mm) et des valeurs Y pour la masse des individus (en kg).

X	2	2.6	3.7	4.3	4.9	5.5	6.6	7.2	8.4	8.9	10.1	10.7	11.3	11.8	13
Y	37.6	47.3	49.1	52.2	58.2	63.2	56.2	68.4	68	65.7	69.7	74.7	74.6	77.4	84.2

Nous verrons qu'avec l'aide de ces données et de la profondeur de la trace de pas mesurée sur la scène de crime, nous pouvons déterminer la masse du tueur. Dans ce TP, nous allons écrire un algorithme en Python qui va représenter les points de mesure du tableau précédent², calculer les coefficients de la droite qui s'ajuste au mieux par tous ces points et finalement déterminer la masse du tueur.

Le nuage de points

Dans cette première partie, le but est de représenter dans un plan les points de mesure du tableau précédent. Le plan utilisé contient sur l'axe des abscisses la profondeur de la trace de pas en mm et sur l'axe des ordonnées la masse de l'individu en kg.

1) Importer le module `matplotlib` comme sur la figure ci-dessous. Ce module sert à tracer des courbes ou représenter des points dans un plan.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

1. Il pleuvait le jour du meurtre.

2. Nous obtiendrons un nuage de points.

2) Définir deux tableaux X et Y contenant les données du tableau de mesures. On rappelle qu'un tableau s'écrit entre crochets en Python et que les valeurs dans le tableau sont séparées par une virgule.

On peut ainsi représenter ces valeurs dans un plan (X, Y) .

3) Écrire une série d'instructions pour représenter les valeurs de X et Y dans un plan. On s'aidera de l'annexe en fin de sujet. On n'oubliera pas de donner un titre à la figure ainsi que légènder les deux axes.

4) Exécuter le programme³. Enregistrer la figure obtenue.

Détermination de la droite affine

En observant le nuage de points obtenu, nous voyons qu'il y a un lien étroit entre la profondeur de la trace de pas et la masse de l'individu. En supposant une relation affine entre ces deux paramètres, nous cherchons une droite affine de la forme $y = ax + b$ qui s'ajuste au mieux par ces points. On cherche alors à déterminer les coefficients a et b .

1) Que représentent les coefficients a et b pour une droite affine de la forme $y = ax + b$?

En ayant nos deux tableaux $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ où n est le nombre de valeurs que contiennent les deux tableaux, nous pouvons définir des grandeurs $\bar{x}$ et $\bar{y}$ définies par

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (2)$$

Des calculs compliqués ont permis de montrer que les coefficients a et b que l'on cherche ont pour expressions :

$$a = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2} \quad (3)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (4)$$

2) Dans un premier temps, on calcule les grandeurs $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Recopier et compléter les instructions de la figure ci-dessous qui calculent ces deux grandeurs notées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans le programme. Que représente n dans ce programme? Quelle est la valeur de n dans notre problème?

3. Si le programme ne fonctionne pas et renvoie une erreur, ne pas hésiter à nous appeler pour de l'aide.

```

n = len(X)
x_bar = 0
y_bar = 0
for i in range(n):
    #à compléter
    #à compléter
x_bar = x_bar/n
y_bar = y_bar/n

```

3) Maintenant que nous avons calculé $\bar{x}$ et $\bar{y}$, nous allons calculer le coefficient a que l'on cherche. En vous aidant de la question précédente, écrire des instructions qui calculent le coefficient a . On utilisera la formule (3).

4) Écrire une instruction qui définit et calcule le coefficient b cherché. On utilisera la formule (4).

5) Écrire une instruction qui affiche les valeurs de a et de b . Exécuter le programme⁴. Quelles sont les valeurs des coefficients a et b ? On précisera les unités.

La masse du tueur

Dans la partie précédente, nous avons calculé les coefficients a et b définissant la droite affine qui s'ajuste au mieux au nuage de points obtenu dans la première partie. En termes techniques, nous avons réalisé une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. Il est temps à présent de tracer cette droite, de la comparer au nuage de points puis de déterminer la masse du tueur.

Pour tracer la droite $y = ax + b$ avec les coefficients a et b calculés précédemment, nous avons besoin de définir deux tableaux : un tableau `X_droite` contenant les abscisses x_i et un tableau `Y_droite` contenant les ordonnées y_i définies par la relation $y_i = ax_i + b$.

1) Recopier les instructions de la figure ci-dessous qui définissent ces deux tableaux. Expliquer chaque ligne de ces instructions.

```

X_droite = X
Y_droite = []
for i in range(n):
    Y_droite.append(a*X_droite[i]+b)

```

2) Écrire une série d'instructions qui permettent de représenter le nuage de points et la droite affine sur une même figure. On s'aidera de l'annexe en fin de sujet. On n'oubliera pas de donner un titre à la figure ainsi que légender les deux axes.

4. Si le programme ne fonctionne pas et renvoie une erreur, ne pas hésiter à nous appeler pour de l'aide.

- 3) Exécuter le programme⁵. Enregistrer la figure obtenue.
- 4) Sachant que la profondeur de la trace mesurée est de 8mm, quelle est a priori la masse du tueur ? Ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
- 5) Mettre les deux figures enregistrées sur une même page de type Word ou autre et imprimer la page. Imprimer de même le code Python dans son ensemble.

FIN

5. Si le programme ne fonctionne pas et renvoie une erreur, ne pas hésiter à nous appeler pour de l'aide.

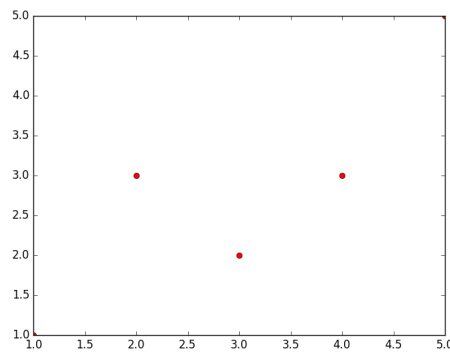
ANNEXE : Réalisation de nuages de points avec Python

Le tracé sur Python nécessite l'import du module `matplotlib`.

Pour tracer des points dans un plan, on définit un tableau d'abscisses puis un tableau d'ordonnées correspondantes (les deux tableaux doivent avoir le même nombre de valeurs). L'exemple ci-dessous représente les deux tableaux X et Y dans un plan.

```
X = [1, 2, 3, 4, 5]
Y = [1, 3, 2, 3, 5]

plt.plot(X,Y, 'ro')
plt.show()
```

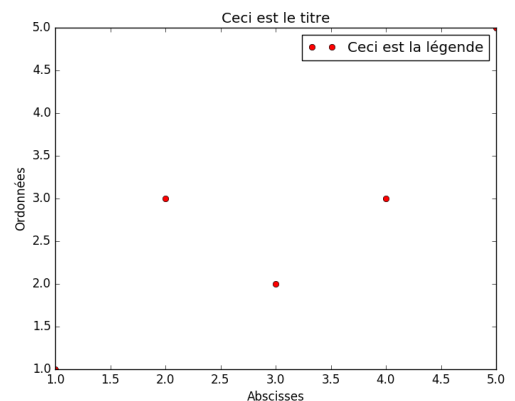


Pour légender une courbe, on utilise `label` suivi de l'instruction `plt.legend()`. Enfin, ajouter un titre à la figure et légender les axes se fait respectivement avec les instructions `plt.xlabel()`, `plt.ylabel()` et `plt.title()`.

À titre d'exemple, l'utilisation de tels paramètres se fait comme sur la figure ci-dessous.

```
X = [1, 2, 3, 4, 5]
Y = [1, 3, 2, 3, 5]

plt.plot(X, Y, 'ro', label = 'Ceci est la légende')
plt.legend()
plt.title('Ceci est le titre')
plt.xlabel('Abscisses')
plt.ylabel('Ordonnées')
plt.show()
```



Pour que les points soient reliés, on enlève juste la partie `'ro'` dans la fonction `plt.plot`. Toutes les autres instructions restent inchangées.

Diffraction des ondes lumineuses

Un compte-rendu par élève est attendu en fin de séance. Il est rappelé que le soin apporté à la copie, la clarté des raisonnements et des justifications ainsi que la rigueur dans la présentation des résultats (veillez notamment aux chiffres significatifs) sont largement valorisés dans l'évaluation de la copie. Le sujet est court, mais il y a beaucoup de travail pour répondre correctement à toutes les questions. Le sujet est conçu pour laisser un maximum d'autonomie, mais il ne faut pas hésiter à faire appel aux enseignants présents. Bon courage !

Au cours de leurs investigations, les techniciens de la police scientifique ont trouvé un cheveu. L'objectif de ce TP est d'utiliser les techniques de diffraction des ondes lumineuses afin d'obtenir une valeur précise de son épaisseur.

1) A l'aide d'une analyse dimensionnelle, et en vous aidant de vos connaissances (on s'intéressera en particulier au sens de variation entre les grandeurs), indiquer laquelle des quatre relations convient pour décrire le phénomène de diffraction des ondes lumineuses. Pour chacune des relations rejetées, indiquer clairement les raisons pour lesquelles on peut l'éliminer.

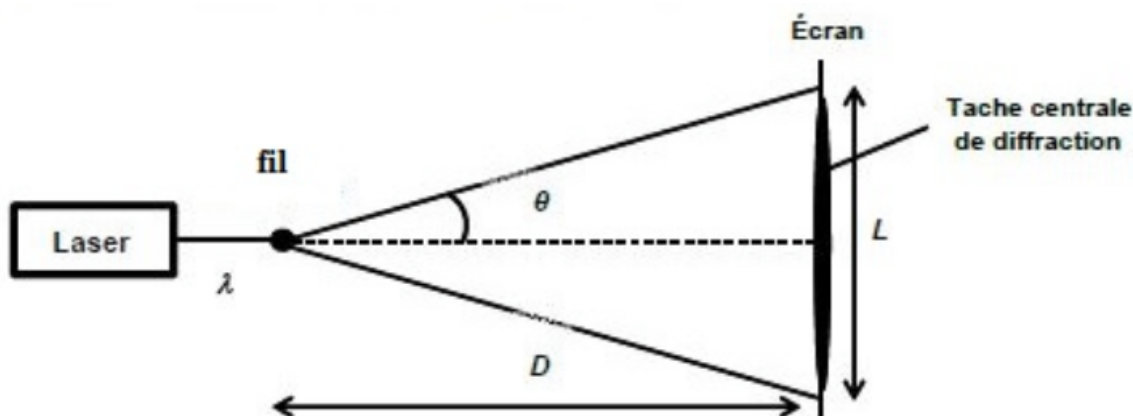


FIGURE 1 – Principe de la diffraction des ondes lumineuses. La longueur d'onde de la lumière du laser est λ , et le fil a une épaisseur a . *Source : chimix.com*

a. $a = 2\lambda DL$

b. $a\lambda L = 2D$

c. $a = 2\lambda \frac{D}{L}$

d. $a = 2\lambda \frac{L}{D}$

2) A l'aide de schémas et de quelques phrases, présenter un protocole expérimental qui permet de valider la relation entre a et L , obtenue à la question précédente. Dresser

une liste de matériel pour réaliser cette expérience. Des précautions particulières doivent-elles être prises par l'expérimentateur ?

3) En adaptant votre protocole expérimental au matériel disponible, réaliser les mesures nécessaires pour valider la relation obtenue à la première question. Quelle méthode numérique peut-on utiliser pour analyser les données obtenues expérimentalement ?

4) Déterminer le diamètre du cheveu trouvé sur la scène de crime. Un traitement complet des incertitudes est attendu, et on prendra un niveau de confiance de 95% dans la présentation des résultats.

Ne pas hésiter à utiliser son cours pour les incertitudes.

5) Quelle(s) étape(s) de votre travail pourrait-on modifier pour améliorer la précision des résultats ? On cherchera en particulier l'étape qui introduit la plus importante source d'erreur.

Étude d'une population de bactéries

Un compte-rendu par élève est attendu en fin de séance. Il est rappelé que le soin apporté à la copie, la clarté des raisonnements et des justifications sont largement valorisés dans l'évaluation de la copie. Il ne faut pas hésiter à faire appel aux enseignants présents. Bon courage !

Des bactéries ont été découvertes par la police scientifique sur la scène de crime. Des experts affirment que l'étude de la population de ces bactéries pourraient nous renseigner quant au dernier lieu fréquenté par le tueur. L'objectif de ce TP est de modéliser et d'étudier l'évolution de la population de ces bactéries à l'aide de Python.

Une suite numérique

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une suite numérique (u_n) par $u_0 = 0,5$ et

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n) \quad (5)$$

avec $k \in [0; 4]$.

- 1) Cette suite est-elle définie explicitement ou par récurrence ? Justifier la réponse.
- 2) Expliquer comment déterminer u_{100} . Le calcul de cette valeur n'est pas demandé.

Cette suite permet d'étudier la taille d'une population de bactéries. Dans notre problème, n désigne le temps compté en années à partir de l'instant $n = 0$. On note N_{max} le nombre maximal de bactéries que peut contenir notre population⁶ et N_n le nombre de bactéries que contient notre population au rang n . Ainsi, pour tout entier n , on pose

$$u_n = \frac{N_n}{N_{max}} \quad (6)$$

Par exemple, u_3 représente le rapport du nombre de bactéries de notre population sur le nombre maximal de bactéries que cette population peut avoir trois ans après le début de l'étude de cette population.

- 3) Expliquer pourquoi u_n est un nombre compris entre 0 et 1.

Représentation de la population de bactéries

Les questions de cette partie se font entièrement sur Python et ne nécessitent donc pas de réponses dans le rapport.

6. Ce nombre est fixe.

Dans cette partie, l'objectif est de représenter dans un plan l'évolution de la taille de la population de bactéries à l'aide de Python. Le plan utilisé contient sur l'axe des abscisses n (en années) et sur l'axe des ordonnées u_n .

- 1) Importer le module `matplotlib` comme sur la figure ci-dessous.

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

- 2) Définir les variables `k` et `u_0`. On choisira 0,6 comme valeur pour `k`.

Nous souhaitons à présent construire deux tableaux `X` et `Y` qui contiennent respectivement les valeurs de n variant de 0 à 50 et les valeurs de u_n correspondantes. Une fois ces deux tableaux construits, nous pourrons représenter la suite (u_n) sur une figure.

- 3) Définir un tableau `X` contenant la valeur 0 et un tableau `Y` contenant `u_0`.

4) Recopier les instructions de la figure ci-dessous. Ces instructions remplissent le tableau `X` avec les valeurs de n variant de 1 à 50 (la valeur 0 figure déjà dans le tableau).

```
for n in range(1, 51):  
    X.append(n)
```

5) En vous aidant de la question précédente, écrire une série d'instructions pour remplir le tableau `Y` avec les valeurs de u_n pour n variant de 1 à 50 (la valeur `u_0` figure déjà dans le tableau). On utilisera l'équation (1).

6) Écrire une série d'instructions pour représenter la suite sur une figure. On s'aidera de l'annexe en fin de sujet. On n'oubliera pas de donner un titre à la figure ainsi que légender les deux axes.

- 7) Imprimer le code Python dans son ensemble et le joindre au rapport.

Caractérisation de la population de bactérie

Le type de bactéries étudiées est caractérisé par le nombre $k \in [0; 4]$. Cette partie montre que faire varier cette valeur influence fortement le comportement de la population. L'objectif final de toute cette étude est de déterminer la valeur de k qui caractérise les bactéries trouvées sur la scène de crime⁷.

1) Exécuter le programme pour des valeurs de `k` comprises entre 0 et 1. Que peut-on dire sur l'évolution de la population de bactéries ?

7. Ayant besoin d'un environnement très spécifique pour se développer, les bactéries peuvent être classifiées selon leur provenance, déterminée par la valeur de k .

2) Exécuter le programme pour des valeurs de k comprises entre 1 et 3. Que peut-on dire sur l'évolution de la population de la bactérie ?

3) Exécuter le programme pour des valeurs de k comprises entre 3 et 3,57. Que peut-on dire sur l'évolution de la population de la bactérie ?

4) Exécuter le programme pour des valeurs de k comprises entre 3,57 et 4. Que peut-on dire sur l'évolution de la population de la bactérie ?

5) Les experts affirment que la population de bactéries trouvée sur la scène de crime finit par se stabiliser autour de la valeur 0,6. Quelle est la valeur de k ?

FIN

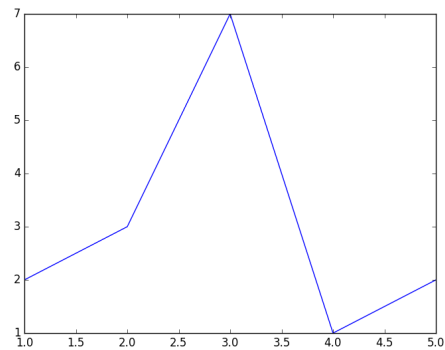
ANNEXE : Réalisation de figures avec Python

La construction de figures sur Python nécessite l'import du module `matplotlib`.

Pour construire une figure en Python, on définit un tableau d'abscisses puis un tableau d'ordonnées correspondantes (les deux tableaux doivent avoir le même nombre de valeurs). L'exemple ci-dessous représente les deux tableaux X et Y dans un plan.

```
X = [1, 2, 3, 4, 5]
Y = [2, 3, 7, 1, 2]

plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

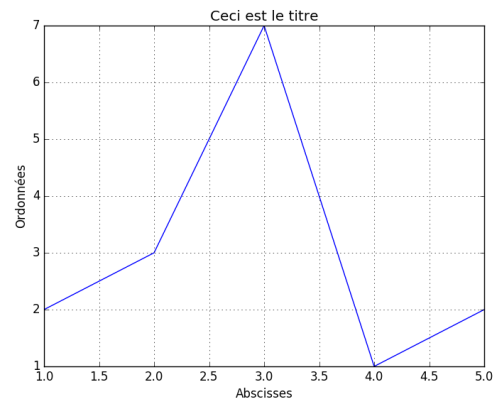


Ajouter un titre à la figure et légender les axes se fait respectivement avec les instructions `plt.xlabel()`, `plt.ylabel()` et `plt.title()`.

A titre d'exemple, l'utilisation de tels paramètres se fait comme sur la figure ci-dessous.

```
X = [1, 2, 3, 4, 5]
Y = [2, 3, 7, 1, 2]

plt.plot(X, Y)
plt.grid()
plt.title('Ceci est le titre')
plt.xlabel('Abscisses')
plt.ylabel('Ordonnées')
plt.show()
```



Dosage par étalonnage - Spectrophotométrie

Un compte-rendu par élève est attendu en fin de séance. Il est rappelé que le soin apporté à la copie, la clarté des raisonnements et des justifications ainsi que la rigueur dans la présentation des résultats (veillez notamment aux chiffres significatifs) sont largement valorisés dans l'évaluation de la copie. Ce sujet est en partie inspiré d'un document disponible sur le site www.physagreg.fr. Bon courage !

L'objectif de ce TP est de savoir utiliser, à une longueur d'onde donnée, la relation entre la concentration d'une espèce colorée en solution et l'absorbance, ainsi que de mettre en oeuvre une démarche expérimentale afin de déterminer la concentration de l'espèce colorée dans une solution de concentration inconnue.

- 1) Pourquoi une solution est-elle colorée ?
- 2) De quoi dépend la couleur de cette solution colorée (expérimentalement) ? Quel est le nom de cette loi ?
- 3) Comment trouver simplement la concentration approximative d'une solution inconnue ?
- 4) Comment fait-on pour être plus précis dans la mesure ?
- 5) Quelle longueur d'onde envoie-t-on sur la solution ?
- 6) Comment utilise-t-on l'échelle de teinte avec le spectrophotomètre ? **Rédiger un protocole détaillé.** Quelles précautions particulières doit-on prendre avec le diode ?
- 7) Réaliser l'échelle de teinte correspondant au tableau suivant.

Solution n	Eau distillée	1	2	3	4	5
$[I_2]$ (mol.L ⁻¹)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

- 8) Mesurer l'absorbance de chacune des solutions. Indiquer l'incertitude expérimentale élargie. Présenter les résultats sous la forme d'un tableau.
- 9) Déterminer la concentration de la solution inconnue.
- 10) Cette solution inconnue a une concentration réelle de 0,25 mol.L⁻¹. Quel est l'écart relatif ? Ceci est-il acceptable ? Si non, quelle(s) étape(s) de votre raisonnement doivent être améliorées ?
- 11) (Bonus) Déterminer l'incertitude élargie (pour un niveau de confiance de 95%) sur le résultat de la concentration. Avec cette méthode, le résultat est-il acceptable ?

ANNEXE



SULFATE DE CUIVRE

Attention

- H302 - Nocif en cas d'ingestion
- H319 - Provoque une sévère irritation des yeux
- H315 - Provoque une irritation cutanée
- H410 - Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme

Les conseils de prudence P sont sélectionnés selon les critères de l'annexe 1 du règlement CE n° 1272/2008.
231-847-6

Si $Y = \frac{X_1}{X_2}$ ou si $Y = X_1 \times X_2$, on a :

$$\frac{U(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{U(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{U(X_2)}{X_2}\right)^2}.$$

Si $Y = X_1 + X_2$ ou si $Y = X_1 - X_2$, on a :

$$U(Y) = \sqrt{U(X_1)^2 + U(X_2)^2}.$$

Balistique

Poursuivons notre enquête criminelle. Parmi les objets trouvés sur la scène de crime, il y a une sarbacane⁸.

Le but de ce TP est de déterminer par une approche balistique la taille du tueur et ainsi avoir une information supplémentaire pour se lancer à sa recherche. Pour mener à bien notre étude, la police a récolté les données suivantes :

- Des empreintes de pieds ont été trouvées à une distance $L = 25$ m du corps de la victime, ce qui laisse croire que le tueur s'est tenu à cette distance de la victime.
- La vitesse initiale du projectile de la sarbacane a été estimée à $v_0 = 48,2$ m/s.
- Des experts ont montré que le projectile a été tiré initialement avec un angle $\alpha = 1,25^\circ$ par rapport à l'horizontale.
- La victime a été touchée à l'abdomen, ce qui correspond, vue sa corpulence, à une hauteur $h = 1$ m par rapport au sol.

Dans la suite, on notera z la hauteur depuis laquelle a été tiré le projectile. Cette grandeur est inconnue et l'objectif de cette étude est de déterminer z . Sachant que le tueur s'est tenu debout pour tirer, la donnée de cette grandeur nous permettra d'avoir une taille approximative du tueur.

Le modèle utilisé

Afin de résoudre le problème, nous commençons par modéliser la situation. On néglige les frottements. Dans un repère (x, y) de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j})$, le projectile est assimilé à un point matériel M de masse $m = 10$ g. Ce projectile n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$. À $t = 0$ s, le projectile a pour coordonnées $x(t = 0) = 0$ et $y(t = 0) = z$. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait un angle α avec l'horizontale. Le projectile a été tiré à une distance L de la victime et cette dernière a été touchée à une hauteur h du sol.

1) Faire un schéma de la situation en plaçant dans un repère (x, y) les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j})$, l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$, le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ ainsi que l'angle α et les longueurs z , L et h .

Les équations du mouvement (Sujet type BAC)

1) Écrire l'accélération $\vec{a}$ du projectile en fonction de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2) Comment s'exprime le poids $\vec{P}$?

3) Écrire la deuxième loi de Newton⁹ appliquée au point matériel M dans le référen-

8. Surement l'arme qui a tué la victime...

9. On écrira une égalité entre vecteurs dans un premier temps.

tiel terrestre.

4) Projeter l'égalité entre vecteurs obtenue à la question précédente sur les axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que l'on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases} \quad (7)$$

5) Écrire le vecteur $\vec{v}_0$ en fonction des vecteurs ¹⁰ $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

6) En intégrant deux fois ¹¹ le système d'équations (7), montrer que l'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = \frac{-gt^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + z \end{cases} \quad (8)$$

7) Écrire t en fonction de x . On pose $a = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}$ et $b = \tan(\alpha)$. Quelles sont les unités de a et b ? Montrer que la trajectoire est paramétrée par l'équation suivante :

$$y(x) = -ax^2 + bx + z \quad (9)$$

Étude de la trajectoire du projectile

Dans cette partie, nous allons étudier la trajectoire du projectile en utilisant Python. Dans un premier temps, importons les bibliothèques nécessaires pour la suite comme sur la figure ci-dessous. La bibliothèque `matplotlib.pyplot` permet de produire des courbes ¹², la bibliothèque `numpy` nous sera utile pour définir les tableaux et contient les fonctions usuelles comme les fonctions trigonométriques ¹³.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Le problème que l'on souhaite résoudre contient beaucoup de constantes. Nous allons commencer par définir toutes ces constantes au début de notre programme.

1) Après avoir importé les différentes bibliothèques, recopier et compléter les éléments de la figure qui suit à l'aide des données de l'énoncé. On fera attention aux unités!

10. L'expression de $\vec{v}_0$ doit dépendre de l'angle α .

11. On examinera les conditions initiales pour déterminer les valeurs des constantes d'intégration.

12. Une annexe en fin de sujet rappelle l'utilisation de ce module.

13. Aucune connaissance sur la bibliothèque `numpy` n'est requise pour traiter le TP.

```

#Constantes

g= 10                                #Accélération de la pesanteur en m/s^2
v0 =                                #Vitesse initiale en m/s
alpha =                             #Angle initial en rad
m =                                 #Masse en kg
cosalpha = np.cos(alpha)
sinalpha = np.sin(alpha)
a =                                #En
b = np.tan(alpha)

```

2) Écrire une instruction qui affiche les valeurs de a et b . Quelles sont les valeurs de a et b ?

3) Écrire une fonction `trajectoire(x,z)` qui retourne la trajectoire $y(x)$ dont l'expression figure à l'équation (9). On rappelle que z est l'inconnu de tout ce problème que l'on cherche à déterminer, elle fait donc partie des arguments de la fonction.

Afin de tracer la trajectoire, nous définissons le tableau qui contient l'ensemble des points d'abscisses. On souhaite tracer la trajectoire dans un plan (x, y) . Pour cela, on discrétise¹⁴ l'axe des abscisses en un vecteur `x_tableau` qui sera associé un tableau de nombres. Pour créer ce tableau, on utilise l'instruction présente ci-dessous. Finalement, notre trajectoire ne sera plus "lisse" mais sera un ensemble de points qu'il suffit de relier entre eux pour obtenir la trajectoire voulue.

```

x_tableau = np.linspace(0, 40, 1000)

```

4) On fixe $z = 1,5\text{m}$. Après avoir affecté la valeur de 1.5 à z et défini le tableau `x_tableau` comme sur la figure précédente, écrire une fonction `tracer_trajectoire(x_tableau, z)` qui trace la trajectoire du projectile pour une valeur de z quelconque. Pour cela, on utilisera la fonction `trajectoire(x,z)`. On n'oubliera pas d'ajouter un titre à la figure ainsi que légender les axes¹⁵.

5) Exécuter la fonction précédente et enregistrer la courbe obtenue. Quelle est la position verticale de la balle pour $x = 25\text{m}$? Commenter.

6) Écrire une fonction `tracer_plusieurs_trajectoires(x_tableau)` qui trace la trajectoire de la balle pour z variant de 1m à 3m avec un pas de 0.2m sur une même figure. On n'oubliera pas d'ajouter un titre à la figure ainsi que légender les axes.

7) Exécuter la fonction précédente et enregistrer la courbe obtenue. Sachant que la victime a été touchée à une hauteur $h = 1\text{m}$ du sol à une distance de $L = 25\text{m}$ du tueur,

14. On découpe notre axe des abscisses en pleins de portions égales qui vont chacune être associée à une valeur de y .

15. On pourra aussi personnaliser le tracé en changeant la couleur des lignes ou leurs styles.

en déduire de la question précédente la valeur de z . Commenter le résultat ¹⁶.

8) Sans la présence de la victime, à quelle distance du tueur le projectile aurait-il touché le sol pour la valeur de z trouvée à la question précédente ?

9) Proposer au moins une manière d'améliorer notre modèle afin de le rendre plus réaliste.

FIN

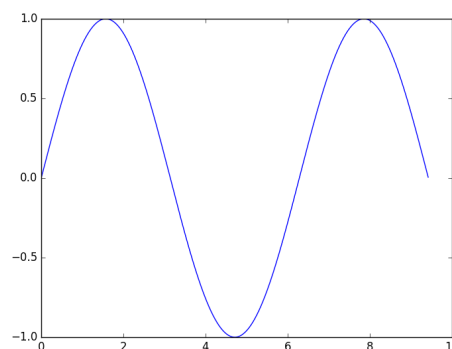
16. On rappelle que l'on a beaucoup d'indices qui laissent penser que le tueur s'est tenu debout lorsqu'il a tiré le projectile sur la victime.

ANNEXE : Réalisation de tracés avec Python

Le tracé sous Python nécessite l'import du module `numpy` et du module `matplotlib.pyplot`.

Pour tracer des fonctions, on définit une liste d'abscisses puis on construit la liste des ordonnées correspondantes. Il est généralement intéressant d'utiliser les fonctions du module `numpy`, plutôt que celles du module `math`, car elles permettent de travailler aussi bien avec des scalaires qu'avec des tableaux. L'exemple ci-dessous trace la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, 3\pi]$.

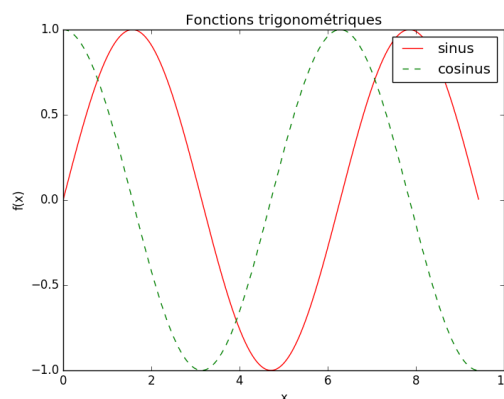
```
def f(x):  
    return np.sin(x)  
  
X = np.arange(0, 3*np.pi, 0.01)  
Y = f(X)  
plt.plot(X, Y)  
plt.show()
```



La fonction `plot` admet de nombreuses options de présentation. La paramètre `color` permet de choisir la couleur ('g' : vert, 'r' : rouge, 'b' : bleu). Pour définir le style de la ligne, on utilise `linestyle` ('-' : ligne continue, '-' : ligne discontinue, ':' : ligne pointillée). Si on veut marquer les points des listes, on utilise le paramètre `marker` ('+', '.', 'o', 'v' donnent différents symboles). Pour légender une courbe, on utilise `label` suivi de l'instruction `plt.legend()`. Enfin, ajouter un titre à la figure et légender les axes se fait respectivement avec les instructions `plt.xlabel()` et `plt.title()`.

À titre d'exemple, l'utilisation de tels paramètres se fait comme sur la figure ci-dessous.

```
def s(x):  
    return np.sin(x)  
  
def c(x):  
    return np.cos(x)  
  
X = np.arange(0, 3*np.pi, 0.01)  
S = s(X)  
C = c(X)  
plt.plot(X, S, color = 'r', linestyle = '-', label = 'sinus')  
plt.plot(X, C, color = 'g', linestyle = '--', label = 'cosinus')  
plt.legend()  
plt.xlabel("x")  
plt.ylabel("f(x)")  
plt.title("Fonctions trigonométriques")  
plt.show()
```



Conclusion de l'enquête policière

La durée de ce devoir surveillé est de 1h30. Les documents et la calculatrice sont autorisés. Il est rappelé que le soin apporté à la copie, la clarté des raisonnements et des justifications ainsi que la rigueur dans la présentation des résultats sont largement valorisés dans l'évaluation de la copie. Le sujet contient cinq exercices, complètement indépendants, ayant un poids égal dans le barème. La synthèse ne demande pas forcément d'avoir traité les cinq parties précédentes. Bon courage !

Au cours de l'enquête policière, nous avons pu recueillir et analyser différents indices. En tant que scientifiques, il vous est maintenant demandé de vous prononcer sur la liste des suspects établie par la police afin d'indiquer qui est, selon vous, le coupable. Devant l'importance de l'enjeu, il est évident qu'aucune place n'est laissée à votre interprétation des faits ; il vous faudra faire preuve d'une extrême rigueur pour que vos arguments soient entendus.

Pièce à conviction 1 : la solution de sulfate de cuivre

Une goutte de liquide bleu a été retrouvée dans les traces de pas qui pourraient être celles du tireur. Les premières analyses ont permis de montrer qu'il s'agissait de sulfate de cuivre en solution. Le sulfate de cuivre peut avoir plusieurs usages : en particulier, il est utilisé dans l'industrie phytosanitaire à très haute concentration (rôle fongicide) ainsi que dans l'élevage de porcs, à faible concentration (complément alimentaire). La connaissance de la valeur de la concentration en sulfate de cuivre dans la solution prélevée peut nous permettre d'avoir une idée des sites visités par le tireur.

1) Rappeler le principe d'un dosage par étalonnage. Citer deux méthodes permettant de réaliser un tel dosage.

2) Plusieurs groupes réalisent la même mesure, avec la même méthode. Le tableau de données suivant est obtenu :

Groupe	1	2	3	4	5
Concentration (mol/L)	0,23	0,26	0,25	0,23	0,22

Donner le résultat de la mesure de la concentration en sulfate de cuivre, en précisant les incertitudes pour un intervalle de confiance à 95%.

3) Voici une liste des sites utilisant du sulfate de cuivre dans un rayon de 15 km autour du lieu du crime, avec la concentration moyenne de sulfate de cuivre dans les solutions présentes :

Site	Concentration moyenne (mmol/L)
1	253
2	215
3	275
4	298

A l'aide des questions précédentes, déterminer quels sont les sites qui peuvent avoir été visités par le tueur avec un niveau de confiance de 95 %.

Pièce à conviction 2 : les traces de pas

L'analyse de la profondeur des traces de pas sur la scène de crime nous permet de remonter à la masse du tueur.

- 1) Quel est l'objectif de la méthode des moindres carrés ?
- 2) La loi déterminée entre la masse et la profondeur des pas est :

$$m = 3,5 \times p + 37,2$$

avec m la masse en kg et p la profondeur de la trace en mm.

La profondeur des traces de pas relevée sur le site vaut $1,0 \pm 0,2$ cm.

Donner un encadrement de la masse du tueur.

- 3) Quels autres paramètres il faudrait prendre en compte pour améliorer le modèle reliant la profondeur de la trace à la masse.

Cette question, volontairement très ouverte, peut être traitée en faisant appel à vos connaissances ou à votre sens physique. Vous êtes libres de justifier vos réponses comme vous le souhaitez : à l'aide de démonstrations, de schémas, de quelques phrases, ...

Pièce à conviction 3 : le cheveu

Un cheveu retrouvé sur la trace du crime a pu être analysé. En particulier, le diamètre d'un cheveu est assez caractéristique de la personne dont il provient.

- 1) Rappeler le principe de la diffraction des ondes lumineuses.
- 2) En procédant à l'analyse dimensionnelle des expressions suivantes, retrouver quelle est la relation entre l'épaisseur du cheveu a , la longueur d'onde du laser envoyé λ , la largeur de la tâche centrale de diffraction L et la distance entre le cheveu et l'écran D .

— $a = 2\lambda DL$

— $a = 2\lambda \frac{D}{L}$

- 3) La mesure donne une largeur de tâche centrale $L = 1,6 \pm 0,1$ cm. Donner le résultat de la largeur du cheveu et l'incertitude associée sachant que $\lambda = 780 \pm 0,1$ nm et $D = 50,0 \pm 0,1$ cm.

Pièce à conviction 4 : les bactéries

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une suite numérique (u_n) par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$u_{n+1} = 2u_n^2 - \frac{3}{8} \quad (10)$$

1) Cette suite est-elle définie explicitement ou par récurrence ? Justifier la réponse.

Cette suite permet d'étudier la taille d'une population de bactéries. Dans notre problème, n désigne le temps compté en années à partir de l'instant $n = 0$. On note N_{max} le nombre maximal de bactéries que peut contenir notre population et N_n le nombre de bactéries que contient notre population au rang n . Ainsi, pour tout entier n , on pose

$$u_n = \frac{N_n}{N_{max}} \quad (11)$$

Par exemple, u_3 représente le rapport du nombre de bactéries de notre population sur le nombre maximal de bactéries que cette population peut avoir trois ans après le début de l'étude de cette population.

2) Calculer la limite de cette suite. Pour cela, on supposera que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ avec $l \in [0; 1]$. On remplacera alors u_n et u_{n+1} par l dans l'équation (10) pour ensuite déterminer l . Vous obtiendrez une équation du second ordre avec deux solutions. Donner la valeur de l en justifiant pourquoi vous avez éliminé l'autre solution.

Une population de bactérie peut être caractérisée par le nombre l . Des bactéries ont été retrouvées sur le cheveu analysé dans la partie précédente. Nous avons alors récolté un cheveu de chaque suspect et avons évalué le nombre l pour chaque suspect. Les résultats sont donnés dans le tableau à la fin du sujet.

Pièce à conviction 5 : la taille

1) Énoncer la deuxième loi de Newton en précisant les grandeurs introduites ainsi que leurs unités.

Grâce à une étude balistique, la taille du suspect a été estimée à $z = 1,8$ m. Cependant, ce résultat nécessite la prise en compte de forces de frottement ainsi que l'incertitude sur l'estimation de la vitesse du projectile. La taille du suspect suit alors la loi

$$z = \lambda a \quad (12)$$

où $\lambda = 0,3 \pm 0,01$ m/kg prend en compte les forces de frottement dus à l'air et $a = 6 \pm 0,1$ kg prend en compte l'incertitude sur l'estimation de la vitesse du projectile.

2) Calculer Δz l'incertitude estimée sur z en utilisant l'équation (12) et les données précédentes.

Synthèse

Le tableau qui suit donne les caractéristiques de six suspects. Dans l'ordre, nous avons m la masse, a le diamètre d'un cheveu, l le paramètre caractérisant les bactéries trouvées sur chaque cheveu analysé et z la taille des suspects. Les résultats sont donnés avec leurs unités respectives.

Suspect	1	2	3	4	5	6
m (kg)	64,4	71,2	83,9	75,0	61,8	69,5
a (μm)	44	42	54	52	58	47
l (%)	50	25	50	25	25	50
z (cm)	175	168	183	185	163	187

D'après des témoignages, les suspects 1, 3 et 5 fréquentent régulièrement le site 2 tandis que les suspects 1, 2, 4, et 6 fréquentent le site 1.

En détaillant toutes les étapes de votre raisonnement, déterminer qui est selon vous le coupable.

FIN