RELATIVITÉ. — Méthode d'itération post-minkowskienne et structure des champs gravitationnels radiatifs. Note de **Luc Blanchet** et **Thibaut Damour**, présentée par Yvonne Choquet-Bruhat.

Remise le 12 décembre 1983.

On définit un algorithme post-minkowskien permettant de construire, à partir d'un ensemble fini de fonctions C^∞ d'une variable, constantes dans un voisinage de $-\infty$, une série formelle en puissances de G qui soit solution des équations d'Einstein du vide (en dehors de l'axe des temps du système de coordonnées harmoniques utilisé). On donne la structure générale de chaque terme de la série au voisinage de l'axe ($r \to 0$) ainsi que son comportement asymptotique en c.

RELATIVITY. — Post Minkowskian Iteration Method and the Structure of Radiative Gravitational Fields.

Starting from a finite set of C^∞ *functions of a real variable, constant in the past, we construct, by means of a Post Minkowskian algorithm, a formal series in powers of* G *which is a solution of Einstein's vacuum field equations (outside the time axis). The general structure of each term of this series when* $r \to 0$ *or* $c \to \infty$ *is given.*

Des travaux récents ([1] à [4]), ont montré l'utilité des méthodes d'approximation *post-minkowskiennes* dans des problèmes de relativité générale que, d'une part on ne sait pas résoudre exactement, et que, d'autre part on ne peut pas traiter de façon satisfaisante par les méthodes *post-newtoniennes* à cause de la présence d'effets radiatifs. Jusqu'à présent les calculs explicites dans les méthodes post-minkowskiennes n'ont été poussés que jusqu'au troisième ordre d'itération et l'existence des itérations supérieures n'a pas été démontrée. Le but de cette Note est, premièrement, de démontrer qu'il est possible, dans un cas particulier, d'itérer *à tout ordre* un algorithme post-minkowskien (définissant ainsi une série formelle en G, solution des équations d'Einstein) et, deuxièmement, d'étudier la structure de chaque terme de cette série formelle en tant que fonction de $r := (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ et de c (vitesse de la lumière). L'approche présentée ici est fondée sur l'emploi simultané de développements multipolaires (tels qu'ils ont été définis et étudiés dans [5]), et d'un nouveau procédé de prolongement analytique (différent de celui utilisé dans [4]).

Considérons une série formelle en puissances de la constante de gravitation G pour une métrique « gothique » :

$$|g|^{1/2}\, g^{\alpha\beta} = f^{\alpha\beta} + \mathrm{G}\, h_1^{\alpha\beta} + \ldots + \mathrm{G}^n\, h_n^{\alpha\beta} + \ldots, \tag{1}$$

où $f^{\alpha\beta}$ est une métrique minkowskienne auxiliaire. On en déduit une série formelle pour le tenseur d'Einstein réduit par la condition d'harmonicité ($\partial_\beta h^{\alpha\beta} = 0$) :

$$2\,|g| \left(\mathrm{R}_{(h)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \mathrm{R}_{(h)}\, g^{\alpha\beta} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{G}^n \left(\Box\, h_n^{\alpha\beta} - \mathrm{N}_n^{\alpha\beta}\right), \tag{2}$$

où $\Box$ désigne le dalembertien plat ($\Delta - c^{-2}\,\partial_t^2$, c = vitesse de la lumière), où $\mathrm{N}_1 = 0$ et où N_n est polynomial en h_m et ses deux premières dérivées ($m < n$).

Donnons-nous un ensemble *fini* de fonctions d'une variable $\mathrm{F}(u)$, de la forme $\mathrm{F}(u) = \mathrm{M}_\mathrm{I}(u)$ ou $\mathrm{F}(u) = \varepsilon_{abc}\, \mathrm{S}_{c\mathrm{I}}(u)$, où $\mathrm{I} = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ est un multi-indice d'ordre $p = : |\mathrm{I}|$, avec $\mathrm{M}(u) = \mathrm{M} = \text{const.}$, $\mathrm{M}_i(u) = 0$, $\mathrm{S}_i(u) = \mathrm{S}_i = \text{const.}$, M_I et S_J étant symétriques et sans traces. On supposera enfin que les $\mathrm{F}(u)$ sont $C^\infty(\mathbb{R})$, et constantes pour $u \leqq -\mathrm{T}$. On sait, [5], construire une métrique « linéarisée » $h_1^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x})$, solution, en dehors de l'axe

$r := |\mathbf{x}| = 0$, de $\Box\, h_1^{\alpha\beta} = 0$ et $\partial_\beta\, h_1^{\alpha\beta} = 0$, stationnaire dans le passé, sous la forme d'une somme de termes du type $\partial_I(r^{-1}\,F(t-r/c))$. Nous définissons alors $h_n^{\alpha\beta}$ par récurrence dans $\mathbb{R}^4$ privé de l'axe $r=0$. Pour cela supposons avoir déjà construit les $h_m^{\alpha\beta}$ $(m<n)$ satisfaisant à la fois : $\Box\, h_m^{\alpha\beta} = N_m^{\alpha\beta}$ et la condition d'harmonicité : $\partial_\beta\, h_m^{\alpha\beta} = 0$. Soit B un nombre complexe, Y la fonction de Heaviside et a un nombre réel >0, considérons $S := (r/c)^B\, N_n^{\alpha\beta}(h_m)$, $S_1 := S\,Y(a-r)$ et $S_2 := S\,Y(r-a)$. On démontre (par récurrence également, voir le théorème ci-dessous) que l'intégrale retardée (notée $\Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}$) de S_1 (resp. de S_2) est premièrement, définie quand la partie réelle de B est assez grande (resp. petite), et deuxièmement, prolongeable analytiquement pour tout $B \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$. On définit alors $\Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\, S$ pour $B \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ comme $\Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\, S_1 + \Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\, S_2$ (cette somme ne dépend plus de a). Au voisinage de $B=0$ $\Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\, S$ possède en général un pôle multiple dû au comportement singulier de N_n en $r=0$. Appelons $p_n^{\alpha\beta}$ le terme constant (ou partie finie) du développement de Laurent autour de $B=0$ de cette intégrale retardée, soit :

$$p_n^{\alpha\beta} := \underset{B=0}{\text{Partie finie}}\ \Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\left[\left(\frac{r}{c}\right)^B N_n^{\alpha\beta}(h_m)\right]. \tag{3}$$

On vérifie alors que, en dehors de l'axe :

$$\Box\, p_n^{\alpha\beta} = N_n^{\alpha\beta}. \tag{4}$$

En revanche $P_n^{\alpha\beta}$ ne satisfait pas la condition d'harmonicité. Grâce aux identités de Bianchi et aux propriétés du prolongement analytique on trouve que (avec $n^i := x^i/r$) :

$$\partial_\beta\, p_n^{\alpha\beta} = \underset{B=0}{\text{Résidu}}\ \Box_{\mathrm{Ret.}}^{-1}\left[\left(\frac{r}{c}\right)^B r^{-1}\, n_i\, N_n^{i\alpha}\right]. \tag{5}$$

Le prolongement analytique permet de montrer qu'il existe un nombre fini de tenseurs symétriques et sans traces $A_I(u)$, $B_I(u)$, $C_I(u)$, $D_I(u)$, uniquement déterminés, constants (et en fait nuls si $|I| \leqq 1$) quand $u \leqq -T$ et tels que (avec $u = t - r/c$) :

$$\partial_\beta\, p_n^{0\beta} = \sum_{|I|\geqq 0} \partial_I\,(r^{-1}\,A_I(u)), \tag{6a}$$

$$\partial_\beta\, p_n^{i\beta} = \sum_{|I|\geqq 0} \{\, \partial_{iI}\,(r^{-1}\,B_I(u)) + \partial_I\,(r^{-1}\,C_{iI}(u)) + \varepsilon_{iab}\,\partial_{aI}\,(r^{-1}\,D_{bI}(u))\,\}. \tag{6b}$$

Définissons $\left(\text{avec } \overset{(1)}{A} = (dA/du)\,(u);\ \overset{(-1)}{A} = \int_{-\infty}^{u} dv\, A(v);\ \overset{(-2)}{A} = \int_{-\infty}^{u} dv\, \overset{(-1)}{A}(v)\right)$:

$$q_n^{00} := -r^{-1}\,\overset{(-1)}{A} - \partial_a\,(r^{-1}\,\overset{(-1)}{A_a}) + \partial_a\,(r^{-1}\,\overset{(-2)}{C_a}), \tag{7a}$$

$$q_n^{0i} := -r^{-1}\,\overset{(-1)}{C_i} - \varepsilon_{iab}\,\partial_a\,(r^{-1}\,\overset{(-1)}{D_b}) - \sum_{|I|\geqq 1} \partial_I\,(r^{-1}\,A_{iI}), \tag{7b}$$

$$\begin{aligned} q_n^{ij} := -\delta_{ij}\,[r^{-1}\,B + \partial_a\,(r^{-1}\,B_a)] + \sum_{|I|\geqq 0} \{\, & 2\,\delta_{ij}\,\partial_{I+2}\,(r^{-1}\,B_{I+2}) \\ & - 6\,\partial_{I+1(i}\,(r^{-1}\,B_{j)I+1}) + 3\,\partial_I\,(r^{-1}\,\overset{(2)}{B}_{ijI}) + \partial_I\,(r^{-1}\,\overset{(1)}{A}_{ijI}) \\ & - \partial_I\,(r^{-1}\,C_{ijI}) - 2\,\partial_{aI}\,(\varepsilon_{ab(i}\,r^{-1}\,D_{j)bI})\,\}, \end{aligned} \tag{7c}$$

où $I+1$ désigne le multi-indice $(i_1, \ldots, i_p, i_{p+1})$ et où $T_{(ij)} := 1/2\,(T_{ij} + T_{ji})$.

Si l'on définit maintenant :

$$h_n^{\alpha\beta} := p_n^{\alpha\beta} + q_n^{\alpha\beta}, \tag{8}$$

on vérifie que $h_n^{\alpha\beta}$ satisfait (en dehors de l'axe) à la fois $\Box\, h_n^{\alpha\beta} = \mathrm{N}_n^{\alpha\beta}$ et $\partial_\beta\, h_n^{\alpha\beta} = 0$ et qu'il sera stationnaire pour $t - r/c \leqq -\mathrm{T}$. Alors la série (1) sera bien solution, en dehors de l'axe et au sens des séries formelles, des équations d'Einstein du vide. La construction et les affirmations précédentes se justifient grâce au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Partant d'un ensemble fini de fonctions* $\mathrm{F}(u) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ *constantes pour* $u \leqq -\mathrm{T}$ ($\mathrm{F} = \mathrm{M}_{\mathrm{I}}$ *ou* $\varepsilon_{abc}\, \mathrm{S}_{c\mathrm{I}}$ *comme ci-dessus*), $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{N}$, *il existe des fonctions* $\mathrm{G}(u) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ *constantes pour* $u \leqq -\mathrm{T}$, *et une fonction* $\mathrm{R}_{\mathrm{P}}(t, \mathbf{x})$ *qui est à la fois* $\mathrm{C}^{\mathrm{P}}(\mathbb{R}^4)$ *et* $\mathrm{O}(r^{\mathrm{P}})$ *quand* $r \to 0$ (*à t fixé*), *telles que pour* $r \neq 0$:

$$h_n(t, \mathbf{x}) = \sum_{p, j, k} n^{i_1} n^{i_2} \ldots n^{i_p} (\mathrm{Log}\, r)^j\, r^k\, \mathrm{G}_{p, j, k}(t) + \mathrm{R}_{\mathrm{P}}(t, \mathbf{x}), \tag{9}$$

avec $r = (x^i x^i)^{1/2}$, $n^i = x^i/r$ et la somme (finie) dans l'équation précédente portant sur : $p \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ avec $p \leqq p_{\max.}$, $j \leqq n-1$ et $k_{\min.} \leqq k \leqq \mathrm{P}$.

Ce théorème se démontre par récurrence de la façon suivante : partant des h_m $(m < n)$ satisfaisant (9) on trouve que $\mathrm{N}_n(h_m)$ admet lui aussi un développement du type (9) avec un « reste » R'_{P}. On utilise ensuite, d'une part, de manière itérative, la « formule de réduction » suivante ($n^{\mathrm{I}} := \{ n^{i_1} \ldots n^{i_p} \}$ (sans traces); $p = |\mathrm{I}|$) :

$$\Box^{-1}_{\mathrm{Ret.}} (n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{B}} (\mathrm{Log}\, r)^j\, \mathrm{F}(t)) = \frac{\partial^j}{\partial \mathrm{B}^j} \left[\frac{n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{B}+2}\, \mathrm{F}(t)}{(\mathrm{B}+2-|\mathrm{I}|)(\mathrm{B}+3+|\mathrm{I}|)} \right] + \Box^{-1}_{\mathrm{Ret.}} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \mathrm{B}^j} \left[\frac{n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{B}+2}\, \partial^2 \mathrm{F}(t)/c^2\, \partial t^2}{(\mathrm{B}+2-|\mathrm{I}|)(\mathrm{B}+3+|\mathrm{I}|)} \right] \right\}, \tag{10}$$

et, d'autre part, le théorème de Taylor avec reste pour $\Box^{-1}_{\mathrm{Ret.}}\, \mathrm{R}'_{\mathrm{P}}$.

Un corollaire intéressant du théorème précédent est que si on attribue aux $\mathrm{F}(u)$ leurs dimensions physiques usuelles (par exemple $[\mathrm{M}_{\mathrm{I}}] = (\text{masse}) \times (\text{longueur})^{|\mathrm{I}|}$, [5]) et si on rétablit toutes les puissances de c, h_n devient aussi une fonction de c et on démontre alors que $h_n(t, \mathbf{x}, c)$, pour t, $\mathbf{x}$ fixés, admet un développement asymptotique, à tout ordre, sur l'échelle de comparaison [6] des $(\mathrm{Log}\, c)^p/c^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$. Ce résultat permet de comprendre l'origine des difficultés (intégrales divergentes) rencontrées par les méthodes d'approximation post-newtoniennes qui supposaient un développement asymptotique sur l'échelle de comparaison des puissances c^{-q} seulement. Les intégrales divergentes apparaissent quand aurait dû apparaître le premier $\log c$. C'est aussi la conclusion suggérée dans [7] sur la base d'un résultat partiel d'itération en zone d'onde.

Indiquons enfin la justification physique motivant la construction précédente : si l'on pouvait étendre la construction de h_n en partant d'un ensemble infini de $\mathrm{F}(u)$ (provenant de suites « arbitraires » de « multipôles » : $(\mathrm{M}_{\mathrm{I}})$, $(\mathrm{S}_{\mathrm{I}})$, $|\mathrm{I}| \in \mathbb{N}$) c'est-à-dire si l'on pouvait prouver (sous des conditions raisonnables pour les suites de multipôles), la convergence absolue (peut-être seulement en dehors d'un tube $r > r_0 > 0$) de toutes les séries multipolaires qui apparaissent, alors on pourrait prouver avoir ainsi construit la solution formelle générale des équations du vide d'Einstein (modulo une transformation de coordonnées donnée comme une série formelle en G) qui est stationnaire dans le passé et suffisamment régulière pour admettre de tels développements multipolaires.

Références bibliographiques

[1] K. S. Thorne et S. Kovács, *Astrophys. J.*, 200, 1975, p. 245.

[2] K. Westpfahl et H. Hoyler, *Lett. Nuov. Cim.*, 27, série 2, 1980, p. 581.

[3] L. Bel, T. Damour, N. Deruelle, J. Ibañez et J. Martin, *Gen. Rel. Grav.*, 13, 1981, p. 963.

[4] T. Damour, in *Gravitational Radiation*, N. Deruelle et T. Piran, éd., North Holland, Amsterdam, 1983, p. 59.

[5] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 1980, p. 299.

[6] J. Dieudonne, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1980.

[7] J. Anderson, R. E. Kates, L. S. Kegeles et R. G. Madonna, *Phys. Rev. D.*, 25, 1982, p. 2038.

Groupe d'Astrophysique relativiste, E.R. n° 176 du C.N.R.S., Observatoire de Paris-Meudon, 92195 *Meudon Principal Cedex.*