

Première session d'examen de première période
14 décembre 2015

Exercice I. Principe de l'imagerie interférométrique

A. Figure d'interférences d'une paire de trous de Young

1. $\tilde{\psi}_1(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega(t-r_1/c)}$ et $\tilde{\psi}_2(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega(t-r_2/c)}$. (On néglige la différence de dilution entre les deux ondes car $r_1 \approx r_2$ quand $(a; x) \ll D$.)

$$\delta = r_2 - r_1.$$

2. $\tilde{\psi}_A = \tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2$.

$$I_A = |\tilde{\psi}_A|^2 = \tilde{\psi}_A \tilde{\psi}_A^* \text{ (à un facteur près).}$$

$$I_A = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2^* + \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_2 = |\tilde{A}|^2 (2 + e^{i\omega(r_2-r_1/c)} + e^{i\omega(r_1-r_2/c)}) = 2|\tilde{A}|^2 (1 + \cos(\omega \delta/c))$$

$$= \frac{I_A^0}{2} (1 + \cos(\omega \delta/c)).$$

3. $r_1 = S_1M = \sqrt{D^2 + (x - a/2)^2} = D \sqrt{1 + \frac{(x - a/2)^2}{D^2}} \approx D \left(1 + \frac{(x - a/2)^2}{2D^2}\right)$.

De même,

$$r_2 = S_2M \approx D \left(1 + \frac{(x + a/2)^2}{2D^2}\right),$$

donc

$$\delta \approx \frac{(x + a/2)^2 - (x - a/2)^2}{2D} = \frac{ax}{D}.$$

4. $I_A(x) = \frac{I_A^0}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)\right)$.

L'interfrange est la distance séparant deux maximums d'intensité. Ceux-ci ont lieu pour

$$\cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} = 1,$$

donc pour $2\pi ax/(\lambda D) = 2m\pi$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs $x_m = m\lambda D/a$ de x , où $m \in \mathbb{Z}$. L'interfrange vaut donc $i = x_{m+1} - x_m = \lambda D/a$.

5. L'ordre d'interférence est le numéro d'une frange : la frange d'ordre 0 correspond à une différence de marche nulle ; le numéro est de même signe que la différence de marche. (Son signe est donc arbitraire puisqu'il dépend de la numérotation des sources.)

La frange brillante d'ordre 0 est en $x = 0$.

6. Sinusoïde de période i , avec une intensité comprise entre 0 et I_A^0 et un pic en $x = 0$.

Les minimums d'intensité ont lieu pour $\cos(2\pi ax/(\lambda D)) = -1$, donc pour $2\pi ax/(\lambda D) = \pi + 2m\pi$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs $x'_m = (m + 1/2)\lambda D/a$ de x , où $m \in \mathbb{Z}$.

b. Éclairage par deux sources A et B

7. $\delta' = -a \sin \beta \approx -a \beta$.

8. $\delta_{\text{tot}} = \delta + \delta' = a x/D - a \beta$.

9.
$$I_B(x) = \frac{I_B^0}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} - a\beta \right) \right) \right)$$

10. La frange brillante d'ordre 0 correspond $\delta_{\text{tot}} = 0$, donc se trouve en $x = \beta D$.

11. La position de la frange brillante d'ordre m est donnée par

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} - a\beta \right) = 2m\pi,$$

soit

$$x = D \left(\frac{m\lambda}{a} + \beta \right).$$

Avec $x = 0$, on obtient

$$\beta_m = -\frac{m\lambda}{a}.$$

c. Résolution angulaire

12. L'interfrange est la même pour A et pour B. Il suffit donc de déterminer l'angle β tel que la frange brillante d'ordre 0 de B tombe sur une des deux franges sombres de A autour de la frange brillante d'ordre 0 de A. La position de la frange brillante d'ordre 0 de B est $x_0 = D\beta$. Les franges sombres de A qui nous intéressent sont en $x' = \pm i/2 = \pm \lambda D/(2a)$, donc $\beta_{\text{rés}} = \lambda/(2a)$.

13. $\beta_{\text{rés}} = 10^{-3}/(2 \times 500) = 10^{-6}$ rad.

d. Figure de diffraction d'une seule ouverture

14. Schéma : pic principal intense et pics secondaires de plus en plus faibles quand la distance au pic principal croît ; pic principal de largeur double de celle des pics secondaires.

15. La largeur spatiale du pic principal est $L = 2\lambda D/b$. La largeur angulaire correspondante est $\theta = 2\lambda/b$.

16. Schéma : I_B comme I_A , mais décalé (et d'intensité maximale éventuellement différente).

17. La figure de diffraction de B est décalée d'un angle β de celle de A. Au mieux, les pics principaux ne se recouvrent pas si la frange sombre d'un côté de l'un est au même endroit que la frange sombre de l'autre située de l'autre côté. On peut donc distinguer A et B si $|\beta| \geq 2(\theta/2)$, d'où $\beta'_{\text{rés}} = 2\lambda/b$.

18. $b = 2\lambda/\beta'_{\text{rés}}$ avec $\beta'_{\text{rés}} = \beta_{\text{rés}} = 10^{-6}$ rad, soit $b = 2$ km !

L'intérêt de l'interféromètre est qu'il est beaucoup plus facile d'espacer deux petites ouvertures d'environ 1 km que de réaliser une unique ouverture de cette taille, surtout si elle doit être mobile. (On y perd en revanche en luminosité.)

Exercice II. Transmission d'une onde sonore à travers une cloison

1.

$$\tilde{\psi}_i(x, t) = \tilde{A}_i e^{i\omega(t-x/c)}. \quad (1')$$

$$\tilde{\psi}_r(x, t) = \tilde{A}_r e^{i\omega(t+x/c)}. \quad (2')$$

$$\tilde{\psi}_t(x, t) = \tilde{A}_t e^{i\omega(t-x/c)}. \quad (3')$$

2.

$$\tilde{p}_i(x, t) = \frac{i\omega \tilde{A}_i}{\chi c} e^{i\omega(t-x/c)}. \quad (4')$$

$$\tilde{p}_r(x, t) = -\frac{i\omega \tilde{A}_r}{\chi c} e^{i\omega(t+x/c)}. \quad (5')$$

$$\tilde{p}_t(x, t) = \frac{i\omega \tilde{A}_t}{\chi c} e^{i\omega(t-x/c)}. \quad (6')$$

3. Le déplacement total vaut $\psi_i + \psi_r$ dans la pièce n° 1 et ψ_t dans la pièce n° 2. La cloison étant infiniment mince et l'air y étant « collé » de part et d'autre, on a $(\psi_i + \psi_r)(0^-, t) = \psi_t(0^+, t)$ pour tout t , soit

$$\tilde{A}_i + \tilde{A}_r = \tilde{A}_t. \quad (7')$$

4. **Si la cloison est de masse nulle**, la pression est la même de part et d'autre de l'interface, donc $\tilde{A}_i - \tilde{A}_r = \tilde{A}_t$. Comme on a aussi $\tilde{A}_i + \tilde{A}_r = \tilde{A}_t$, la seule solution est $\tilde{A}_i = \tilde{A}_t$ et $\tilde{A}_r = 0$:

$$\tilde{r} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = 1. \quad (8')$$

(On retrouve la même situation que pour deux tuyaux de même section raccordés l'un à l'autre : l'onde incidente n'est pas perturbée par l'interface fictive ; l'onde transmise est identique à l'onde incidente et il n'y a pas d'onde réfléchie.)

Si la cloison est de masse infinie, son inertie est infinie et elle est immobile : $\tilde{A}_t = 0$, donc $\tilde{A}_r = -\tilde{A}_i$, soit

$$\tilde{r} = -1 \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = 0. \quad (9')$$

(Situation identique à celle à l'extrémité fermée d'un tuyau.)

5. La masse de la portion de cloison est $m = \sigma S$ et son accélération est

$$\vec{a} = \frac{\partial^2(\psi_i + \psi_r)}{\partial t^2}(0^-, t) \vec{u}_x = \frac{\partial^2 \psi_t}{\partial t^2}(0^+, t) \vec{u}_x. \quad (10')$$

Les forces exercées sur la portion de cloison par l'air présent dans chacune des pièces valent $\vec{F}_1 = (P_0 + (p_i + p_r)(0^-, t)) S \vec{u}_x$ et $\vec{F}_2 = (P_0 + p_t(0^+, t)) S (-\vec{u}_x)$.

Comme $m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, on a

$$\sigma S \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi_t(0^+, t) \vec{u}_x = ((p_i + p_r)(0^-, t) - p_t(0^+, t)) S \vec{u}_x, \quad (11')$$

soit

$$-\sigma \omega^2 \tilde{A}_t = \frac{i\omega \tilde{A}_i}{\chi c} - \frac{i\omega \tilde{A}_r}{\chi c} - \frac{i\omega \tilde{A}_t}{\chi c}. \quad (12')$$

6. L'équation (12') peut être réécrite $\tilde{A}_t(1 + i\sigma\omega\chi c) = \tilde{A}_i - \tilde{A}_r$. En combinant avec l'équation (7') et en notant que $\chi c = 1/(\rho c)$, on obtient que

$$\tilde{A}_t = \frac{\tilde{A}_i}{1 + i\frac{\sigma\omega}{2\rho c}}, \quad (13')$$

donc $\tilde{\tau}$ a bien l'expression (1) pour $\omega_0 = 2\rho c/\sigma$. De même,

$$\tilde{r} = \tilde{\tau} - 1 = -\frac{i\omega/\omega_0}{1 + i\omega/\omega_0}. \quad (14')$$

7. a. Quand $\sigma \rightarrow 0$, $\omega_0 \rightarrow \infty$, donc $\tilde{\tau} \rightarrow 1$ et $\tilde{r} \rightarrow 0$.
b. Quand $\sigma \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$, donc $\tilde{\tau} \rightarrow 0$ et $\tilde{r} \rightarrow -1$.

8. Rapport des amplitudes réelles :

$$\tau = |\tilde{\tau}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}}. \quad (15')$$

En multipliant (1) par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\tilde{\tau} = \frac{1 - i\omega/\omega_0}{1 + \omega^2/\omega_0^2} = \tau \frac{1 - i\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}} = \tau e^{i\phi}, \quad (16')$$

donc

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = -\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}}. \quad (17')$$

$\sin \phi \leq 0$, donc $\phi \in [-\pi, 0]$.

9.

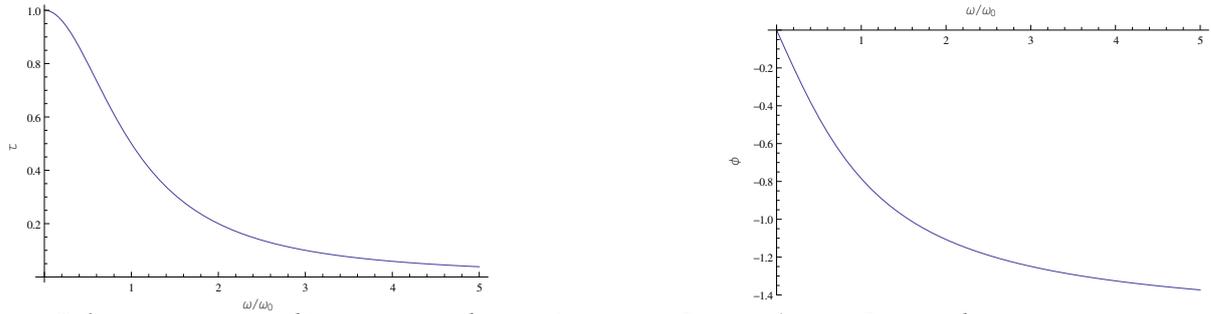


Schéma pour τ : décroissance de $\tau = 1$ en $\omega = 0$ jusqu'à $\tau = 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$; tangente horizontale en $\omega = 0$ et point d'inflexion vers ω_0 .

Schéma pour ϕ : décroissance de $\phi = 0$ en $\omega = 0$ jusqu'à $\phi = -\pi/2$ quand $\omega \rightarrow \infty$; tangente en diagonale (pente égale à -1) en $\omega = 0$.

On a $\lim_{\omega \rightarrow 0} \tau = 1$ et $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tau = 0$. La cloison laisse donc passer les sons graves et filtre les sons aigus.

10. La puissance transportée par l'onde est $\mathcal{P} = (P_0 + p) S \vec{u}_x \cdot v \vec{u}_x$, où v est la vitesse vibrationnelle du milieu. On obtient le résultat en écrivant que $v = \partial\psi/\partial t$ et que $p = (-1/\chi) \partial\psi/\partial x$.

$$\mathcal{P} = S \left(P_0 - \frac{1}{\chi} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (18')$$

L'intensité vaut $I = \langle \mathcal{P} \rangle / S$. La moyenne du terme avec P_0 est nulle, donc

$$I = \left\langle -\frac{1}{\chi} \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial t} \right\rangle. \quad (19')$$

Avec $\psi(x, t) = A \cos(\omega(t - x/c) + \phi)$ pour $\tilde{A} = A e^{i\phi}$, on obtient

$$I = \frac{A^2 \omega^2}{\chi c} \langle \sin^2(\omega(t - x/c) + \phi) \rangle = \frac{\rho c A^2 \omega^2}{2}. \quad (20')$$

11.

$$T = I_t/I_i = |\tilde{\tau}|^2 = 1/(1 + \omega^2/\omega_0^2). \quad (21')$$

12.

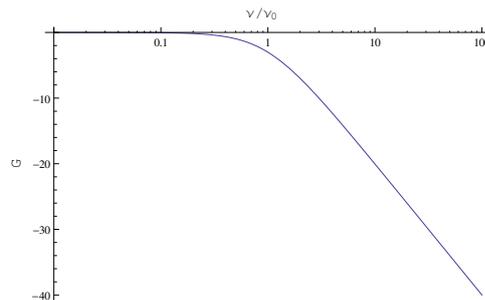


Schéma : G négatif décroissant de 0 en $\nu = 0$ vers $-\infty$ quand $\nu \rightarrow \infty$; plateau pour $\nu \ll \omega_0/(2\pi)$; asymptote de pente -20 quand $\nu \gg \omega_0/(2\pi)$.

Quand $G = -3 \text{ dB}$, $T = 10^{-0,3} \approx 1/2$. Ceci se produit quand $\omega = \omega_0$, donc pour $\nu_c = \omega_0/(2\pi)$.