Université Pierre et Marie Curie
Licence de physique
UE Ondes - 2P011
Année 2015/2016

Première session d'examen de première période
14 décembre 2015

- Durée : 2 h.
- Aucun document n'est autorisé.
- L'usage des calculatrices de type « collège » est autorisé.
- L'usage des téléphones portables est interdit.
- Le sujet de compose de deux exercices totalement indépendants.

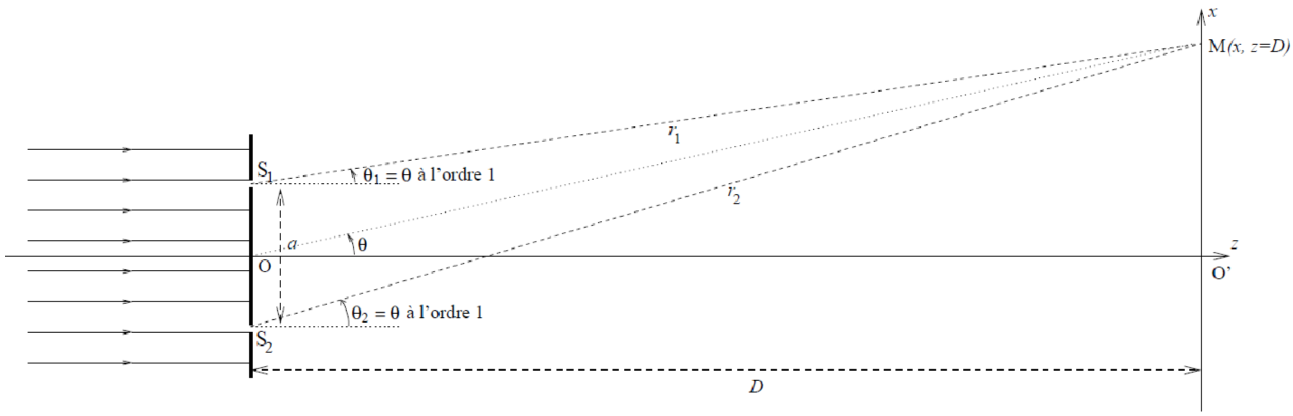
Exercice I. Principe de l'imagerie interférométrique

Ce problème présente l'utilisation de techniques interférométriques pour faire de l'imagerie. Le but est de montrer comment un interféromètre permet d'augmenter la résolution angulaire par rapport à un instrument à une seule ouverture.

A. Figure d'interférences d'une paire de trous de Young

On utilise une paire de trous de Young identiques, placés en deux points S_1 et S_2 séparés d'une distance a. Ils sont illuminés par une source A placée à l'infini sur l'axe (Oz) ; on considère donc que les deux trous sont éclairés par une onde plane, arrivant sous incidence normale. Les trous constituent deux sources secondaires toujours cohérentes entre elles. On effectue toutes les observations sur un écran placé à la distance D des trous (figure ci-dessous).

On se restreindra au plan de la figure, (xOz). Les angles sont orientés dans le sens trigonométrique sur tous les schémas ; ils ont donc un signe.



On pourra faire les calculs dans le cadre de l'approximation des petits angles, car toutes les distances verticales sont beaucoup plus petites que la distance horizontale : $a \ll D$ et $x \ll D$. On se placera dans le cas monochromatique : il n'y a qu'une seule longueur d'onde, notée λ. L'ensemble est dans l'air, dont on assimilera l'indice de réfraction à celui du vide : $n = 1$.

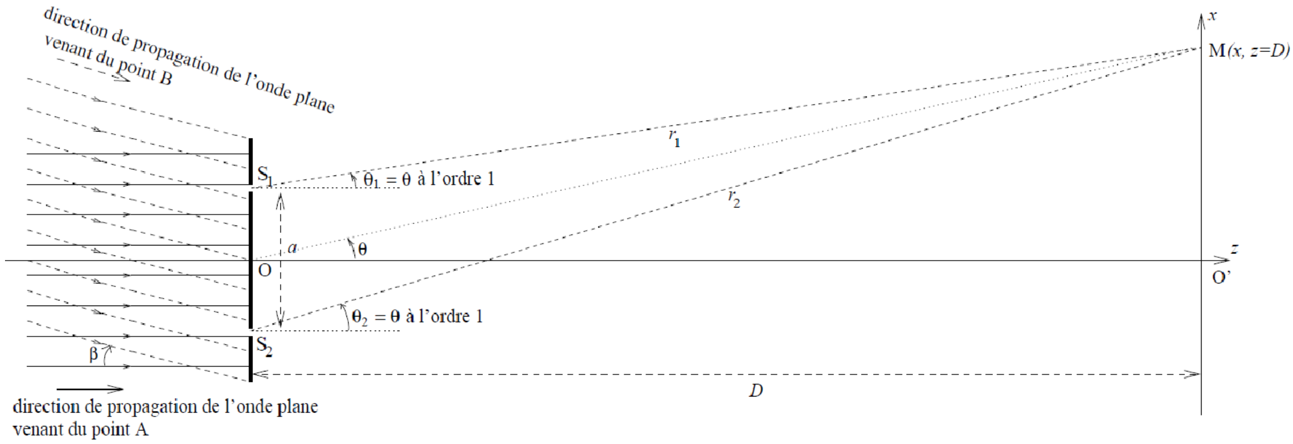
1. En un point M de l'axe $(O'x)$, écrire les fonctions d'ondes complexes $\widetilde{\psi}_1(M,t)$ et $\widetilde{\psi}_2(M,t)$ des deux ondes progressives venant de S_1 et S_2, en fonction des distances r_1 et r_2 (on pourra introduire la pulsation ω et la vitesse de la lumière c).

   Définir la différence de marche δ entre les deux ondes.

2. Écrire la fonction d'onde complexe totale $\widetilde{\psi}_A(M,t)$ et en déduire l'expression de l'intensité lumineuse totale I_A en fonction de δ. (On notera I_A^0 l'intensité maximale de cette figure d'interférences.)
3. En respectant les hypothèses de la géométrie du problème, calculer δ et l'exprimer en fonction de x.
4. Obtenir alors l'expression de l'intensité lumineuse totale $I_A(x)$ à la position M en fonction de λ (entre autres).
   Définir l'interfrange i et établir son expression.
5. Qu'appelle-t-on « ordre d'interférences » ?
   Où est la frange brillante d'ordre zéro sur l'axe $(O'x)$? Indiquer sa position sur un schéma représentant le dispositif.
6. Sur un schéma faisant apparaitre I_A^0, tracer l'intensité I_A en fonction de x.
   Donner l'expression de la position x'_m du minimum d'ordre m de l'intensité I_A.

B. Éclairage par deux sources A et B

Les deux trous de Young précédents sont maintenant illuminés par la lumière venant de deux sources ponctuelles A et B. La source A est toujours sur l'axe (Oz), alors que la source B est en dehors de cet axe, dans une direction faisant un angle β avec celui-ci, comme indiqué sur la figure suivante. On se restreint toujours au plan (xOz) de la figure. Les sources A et B sont monochromatiques et de même longueur d'onde λ.



On considère d'abord seulement la lumière venant de B. Elle arrive sur les trous avec un angle d'incidence β petit ($\ll 1\,\text{rad}$), qui peut être positif ou négatif (l'angle β est **négatif** sur le dessin ci-dessus).

7. Calculer, en fonction de a et β, la différence de marche δ', au niveau de S_1 et S_2, entre deux rayons incidents provenant de B.
8. Calculer la différence de marche totale au point M, δ_{tot}, en fonction de x, β, a et D.
9. Établir l'expression de l'intensité lumineuse $I_B(x)$ au point M. (On notera I_B^0 l'intensité maximale de cette figure d'interférences.)
10. Où est la frange brillante d'ordre zéro ? Indiquer sa position sur un schéma.
11. Calculer l'angle β_m de la direction de la source B pour que la frange brillante d'ordre m soit en $x = 0$.

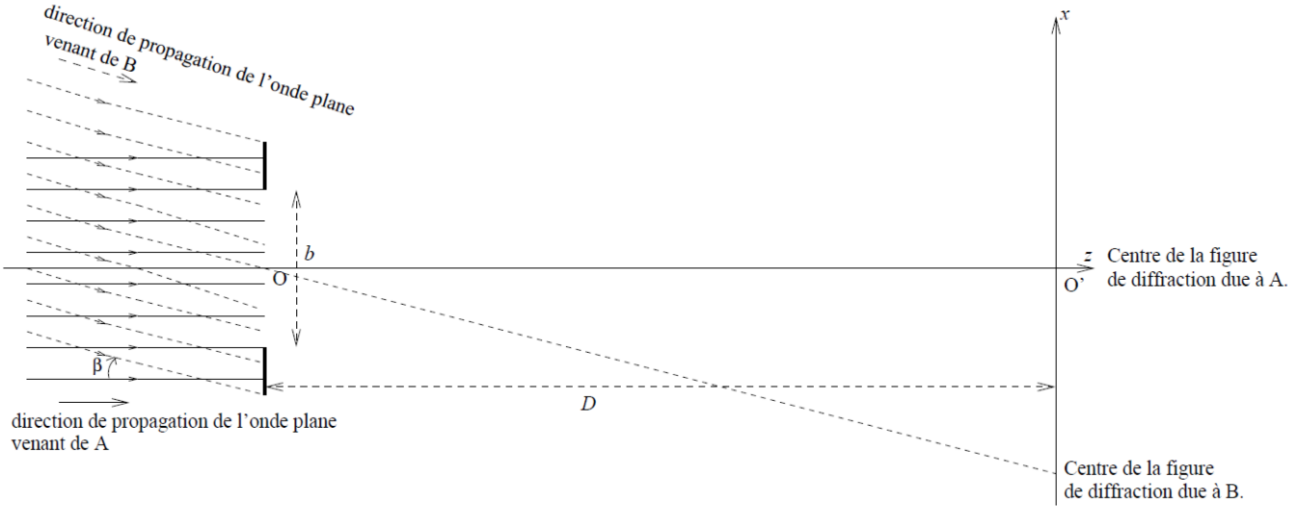
C. Résolution angulaire

Les deux sources A et B émettent chacune de la lumière sans cohérence l'une avec l'autre. La figure d'interférences totale est donc la superposition de la figure d'interférences due à A avec celle due à B.

12. Calculer $\beta_{\text{rés}}$, valeur minimale de $|\beta|$ pour que les franges brillantes dues à B tombent sur les franges sombres dues à A. C'est la **résolution angulaire** de l'interféromètre.
13. Application numérique (interféromètre utilisé en astrophysique) : les deux ouvertures sont en fait deux antennes paraboliques séparées de $a = 500\,\text{m}$, utilisées à la longueur d'onde $\lambda = 1\,\text{mm}$. Calculer la résolution angulaire $\beta_{\text{rés}}$.

D. Figure de diffraction d'une seule ouverture

On cherche ici la résolution angulaire d'un instrument à une seule ouverture. Pour simplifier, on considère une fente rectangulaire de largeur b et on admettra que les résultats ne sont pas qualitativement différents s'il s'agit d'une ouverture circulaire de diamètre b. On admettra également que lorsqu'une ouverture est sous éclairage incliné, sa figure de diffraction se décale de manière à être centrée autour de la direction de l'onde incidente. Pour les deux sources A et B, cela donne le schéma ci-dessous. Il faut alors choisir un critère pour définir la résolution angulaire : **on pourra séparer les sources A et B si les deux pics principaux des figures de diffraction ne se recouvrent pas.** Dans cette partie, on ne demande pas de calculer l'expression mathématique de la figure de diffraction.



14. Sans calcul, tracer tout d'abord l'allure générale de la figure de diffraction par la fente de la lumière provenant de A (c'est-à-dire I_A en fonction de x).
15. Quelle est la largeur angulaire θ du pic principal de cette figure de diffraction ? (On la définit comme l'angle entre les deux minimums de part et d'autre de ce pic et on rappelle qu'elle ne dépend que des deux grandeurs du problème, à un facteur sans dimension près.)
16. Tracer alors l'allure des figures de diffraction par la fente de la lumière provenant des sources A et B (I_A et I_B en fonction de x sur un même graphique).
17. À l'aide du critère défini plus haut, calculer la résolution angulaire $\beta'_{\text{rés}}$ de l'instrument composé d'une seule ouverture.
18. Application numérique : quelle doit être la valeur de b pour que la résolution angulaire soit la même que celle de l'interféromètre calculée à la question 13 ?
    Quel est l'intérêt d'un interféromètre tel que celui considéré dans les parties A à C ?

Exercice II. Transmission d'une onde sonore à travers une cloison

Une cloison plane et verticale, située en $x = 0$, sépare une pièce n° 1 occupant le demi-espace $x < 0$ d'une pièce n° 2 occupant le demi-espace $x > 0$. Au repos, les deux pièces sont remplies d'air de masse volumique ρ à la pression P_0. La cloison est indéformable, d'épaisseur négligeable et de masse surfacique σ ; elle vibre librement selon l'axe (Ox) (elle n'est soumise, horizontalement, qu'aux forces de pression exercées par l'air dans les pièces). Une onde acoustique plane sinusoïdale provenant de la pièce n° 1 atteint la cloison sous incidence normale.

1. Écrire l'expression complexe du déplacement $\widetilde{\psi}_\mathrm{i}(x,t)$ de l'air dû à l'onde incidente en fonction de sa pulsation ω, de son amplitude complexe $\widetilde{A}_\mathrm{i}$ et de la célérité c du son.

   Faire de même pour les déplacements $\widetilde{\psi}_\mathrm{r}(x,t)$ et $\widetilde{\psi}_\mathrm{t}(x,t)$ dus aux ondes réfléchie et transmise par la cloison. (On notera $\widetilde{A}_\mathrm{r}$ et $\widetilde{A}_\mathrm{t}$ les amplitudes complexes des ondes réfléchie et transmise.)
2. On rappelle que la surpression $p(x,t)$ due à une onde acoustique est reliée à $\psi(x,t)$ par
$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{1}$$
   où χ est le coefficient de compressibilité.

   En déduire l'expression complexe des surpressions $\widetilde{p}_\mathrm{i}(x,t)$, $\widetilde{p}_\mathrm{r}(x,t)$ et $\widetilde{p}_\mathrm{t}(x,t)$ des trois ondes.
3. En considérant que l'air est en permanence « collé » à la cloison de part et d'autre de celle-ci, établir une relation entre ψ_i, ψ_r et ψ_t. En déduire une relation entre $\widetilde{A}_\mathrm{i}$, $\widetilde{A}_\mathrm{r}$ et $\widetilde{A}_\mathrm{t}$.
4. On note $\widetilde{r} = \widetilde{A}_\mathrm{r}/\widetilde{A}_\mathrm{i}$ et $\widetilde{\tau} = \widetilde{A}_\mathrm{t}/\widetilde{A}_\mathrm{i}$ les coefficients de réflexion et de transmission pour les amplitudes complexes de déplacement.

   On considère dans un premier temps deux cas extrêmes :
   a. celui d'une cloison de masse nulle ;
   b. celui d'une cloison de masse infinie.

   Donner dans chacun de ces cas les coefficients $\widetilde{r}$ et $\widetilde{\tau}$. (On pourra raisonner par analogie avec les cas vus en cours pour les tuyaux.)
5. **On revient désormais au cas général d'une cloison de masse surfacique σ.**

   En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une portion d'aire S de la cloison, établir une relation entre p_i, p_r et p_t au niveau de la cloison. En déduire une autre relation entre $\widetilde{A}_\mathrm{i}$, $\widetilde{A}_\mathrm{r}$ et $\widetilde{A}_\mathrm{t}$.
6. Déduire des relations précédentes la valeur des coefficients $\widetilde{r}$ et $\widetilde{\tau}$, et montrer que
$$\widetilde{\tau} = \frac{1}{1+\mathrm{i}\,\omega/\omega_0}\,, \tag{2}$$
   où ω_0 est une constante dont on donnera l'expression en fonction de ρ, c et σ (on rappelle que $c = 1/\sqrt{\chi\rho}$).
7. Vérifier que les expressions obtenues à la question précédente sont en accord avec les résultats pour les deux cas limites de la question 4.

Dans tout ce qui suit, on peut utiliser la relation (2) **et exprimer les résultats en fonction de ω_0, même si l'expression de ω_0 demandée à la question 6 n'a pas été obtenue.**

8. Déterminer le rapport τ entre les amplitudes réelles de l'onde transmise et de l'onde incidente, puis le sinus et le cosinus du déphasage $\phi = \varphi_\mathrm{t} - \varphi_\mathrm{i}$, où φ_t et φ_i sont les phases de ces ondes au niveau de la cloison. (On exprimera ces quantités en fonction de ω et ω_0.)

   De quel signe est $\sin\phi$? En déduire l'intervalle dans lequel ϕ est compris.
9. Représenter schématiquement τ et ϕ en fonction de ω/ω_0.

   La cloison agit comme un filtre. Laisse-t-elle mieux passer les sons graves ou aigus ?
10. Montrer que la puissance transportée par une onde traversant une surface S vers les x croissants vaut
$$\mathcal{P} = S\left(P_0 - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{3}$$
    En déduire l'expression de l'intensité I d'une onde sonore sinusoïdale en fonction de son amplitude réelle et de sa pulsation. (Attention : à cause du produit, il faut raisonner sur les fonctions d'onde réelles, pas complexes.)
11. Exprimer le facteur de transmission énergétique T en fonction de ω et ω_0.
12. On note $G = 10\log_{10} T$ l'atténuation en décibels de l'intensité de l'onde à travers la paroi. Représenter G en fonction de $\log_{10}\nu$, où ν est la fréquence en hertz.

    On appelle « fréquence de coupure » ν_c la fréquence pour laquelle $G = -3\,\mathrm{dB}$. Exprimer ν_c en fonction de ω_0.