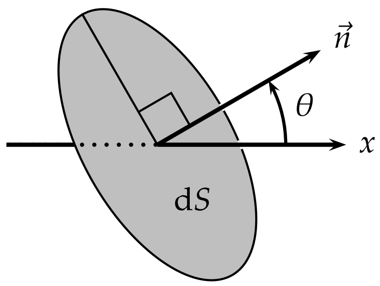
Exercice II. Ondes acoustiques

A. Propagation

On considère une perturbation acoustique se propageant dans un fluide élastique selon l'axe des x et dans le sens des x croissants. On note $\psi(x,t)$ le déplacement d'un point du fluide à un instant t par rapport à sa position x au repos, $v(x,t) = \partial\psi/\partial t$ la vitesse vibrationnelle, $P(x,t)$ la pression, $p(x,t)$ la surpression par rapport à la pression au repos P_0 et ρ_0 la masse volumique au repos. Les quantités P_0 et ρ_0 sont des constantes. On se placera dans le référentiel du fluide au repos, supposé galiléen, et on négligera le poids du fluide et les frottements.

1. En considérant les forces appliquées à un petit élément de volume se situant au repos entre les plans d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$ et de surface S sur ces plans, montrer que, au premier ordre,
$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{1}$$
On admettra que $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t \approx \partial v/\partial t$.
2. On a
$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{2}$$
où χ est une constante strictement positive appelée « coefficient de compressibilité ». Déduire des équations (1) et (2) l'équation d'onde à laquelle $\psi(x,t)$, $v(x,t)$ et $p(x,t)$ obéissent. Déterminer la célérité c de l'onde.
3. Rappeler l'expression de la solution générale de l'équation d'onde obtenue à la question précédente pour $\psi(x,t)$. Préciser le sens de propagation de chacun des termes de cette solution générale.
4. On considère une onde ne se déplaçant que selon les x croissants.
   (a) Montrer que
   $$p(x,t) = Z\,v(x,t), \tag{3}$$
   où Z est une constante (appelée « impédance caractéristique » du milieu) dont on donnera l'expression en fonction de ρ_0 et c.

   (b) L'onde traverse en un point d'abscisse x une surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ dont le vecteur normal $\vec{n}$ fait un angle θ avec la direction de propagation (schéma ci-contre). Calculer la puissance $\mathrm{d}w(x,t)$ reçue à un instant t par le milieu en aval de $\mathrm{d}S$ en fonction de la pression totale $P(x,t)$, de $v(x,t)$, θ et $\mathrm{d}S$.

   On définit l'intensité acoustique en x par $I(x) = \langle \mathrm{d}w(x,t)\rangle/\mathrm{d}S$, où $\langle X\rangle$ représente la moyenne temporelle d'une quantité X. Montrer que
   $$I(x) = \frac{\langle (p[x,t])^2\rangle}{Z}\cos\theta. \tag{4}$$

B. Onde monochromatique

On considère désormais une onde acoustique se propageant dans un milieu $\mathcal{E}_1$ d'impédance caractéristique Z_1 à la célérité c_1. En représentation complexe, la surpression acoustique en un point M de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ vaut

$$p_1(M, t) = A_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM})}, \tag{5}$$

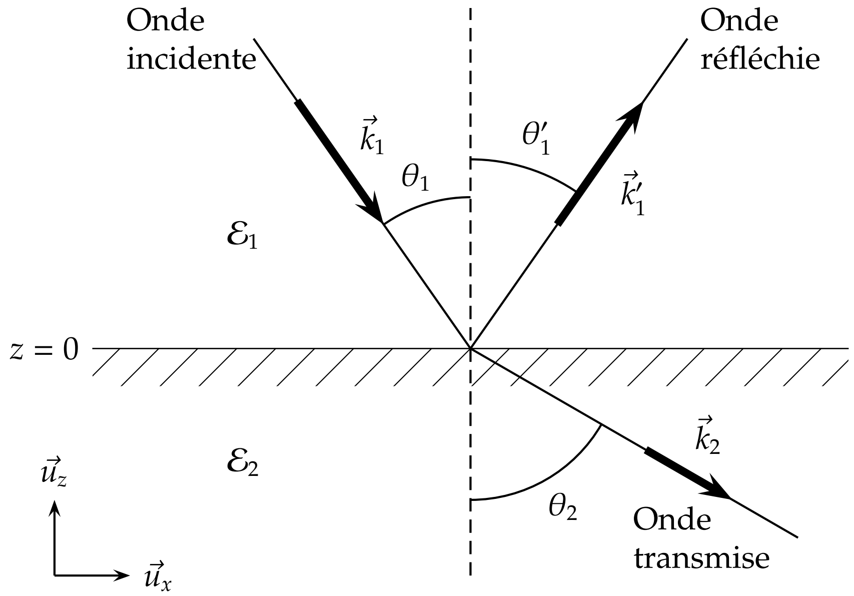
où A_1, ω et $\vec{k}_1$ sont des constantes, A_1 est un nombre complexe et ω et les composantes de $\vec{k}_1$ sont des réels.

Attention : A_1 est l'amplitude de la *surpression*, pas du déplacement.

1. Quelle est la nature de l'onde décrite par l'équation (5) ? Comment s'appellent les quantités ω et $\vec{k}_1$? Quelle relation a-t-on entre c_1, ω et la norme k_1 de $\vec{k}_1$?
2. En utilisant l'équation (4), exprimer l'intensité I_1 de l'onde traversant une surface dS dont la normale fait un angle θ_1 avec la direction de propagation en fonction de A_1, θ_1 et Z_1.

C. Réflexion et transmission sous incidence oblique

Le milieu $\mathcal{E}_1$ est séparé du milieu $\mathcal{E}_2$ par une interface de masse négligeable située en $z = 0$ (voir schéma). En arrivant à cette interface, l'onde introduite au B (appelée « onde incidente » ci-après) donne naissance à deux autres ondes : une onde réfléchie se propageant dans $\mathcal{E}_1$ et une onde transmise pénétrant dans $\mathcal{E}_2$.



1. La réflexion et la transmission obéissent aux deux conditions suivantes à l'interface :
   – continuité de la pression :

$$\textbf{en tout point au voisinage de l'interface,} \quad p(z = 0^+) = p(z = 0^-), \tag{6}$$

   où l'on a posé $p(z = 0^+) = \lim_{z \to 0;\, z>0} p(x, y, z, t)$ et $p(z = 0^-) = \lim_{z \to 0;\, z<0} p(x, y, z, t)$ pour alléger les notations ;
   – continuité de la composante normale à l'interface de la vitesse des milieux :

$$\textbf{en tout point au voisinage de l'interface,} \quad v_z(z = 0^+) = v_z(z = 0^-) \tag{7}$$

   (même convention de notation).
   Justifier brièvement ces conditions.

2. En représentation complexe, la surpression due à l'onde réfléchie vaut
$$p_1'(M,t) = A_1'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}_1'\cdot\overrightarrow{OM})} \tag{8}$$
et celle due à l'onde transmise vaut
$$p_2(M,t) = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}_2\cdot\overrightarrow{OM})}, \tag{9}$$
où les quantités A_1' et A_2 sont des constantes complexes et les composantes de $\vec{k}_1'$ et $\vec{k}_2$ sont des réels constants. Les directions de propagation des ondes incidente, réfléchie et transmise sont dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_z)$.
Quelle relation a-t-on entre $\|\vec{k}_1'\|$ et k_1 ? Écrire les vecteurs $\vec{k}_1$, $\vec{k}_1'$ et $\vec{k}_2$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en fonction de k_1, de la norme k_2 de $\vec{k}_2$ et des angles (non orientés) $\theta_1 = (+\vec{u}_z, \vec{k}_1)$, $\theta_1' = (+\vec{u}_z, \vec{k}_1')$ et $\theta_2 = (-\vec{u}_z, \vec{k}_2)$.
3. En utilisant l'équation (6), établir des relations entre
   - A_1, A_1' et A_2 ;
   - θ_1 et θ_1' ;
   - θ_1, θ_2, c_1 et la célérité c_2 des ondes dans $\mathcal{E}_2$.
4. À quelle condition sur c_1 et c_2 y a-t-il toujours une onde transmise, quelle que soit la valeur de θ_1 ? Si cette condition n'est pas remplie, donner en fonction de c_1 et c_2 l'intervalle des valeurs de θ_1 à l'intérieur duquel il y a réflexion totale (c'est-à-dire pas d'onde transmise).
Application numérique. Le milieu $\mathcal{E}_1$ est l'air et le milieu $\mathcal{E}_2$ l'eau. On a $c_1 = 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $c_2 = 1500\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Calculer numériquement les bornes de l'intervalle défini ci-dessus.
5. Soient v_1, v_1' et v_2 les vitesses vibrationnelles des milieux (comptées positivement dans le sens de propagation de l'onde correspondante, par définition) dues aux ondes incidente, réfléchie et transmise. Exprimer les composantes $(v_1)_z$, $(v_1')_z$ et $(v_2)_z$ selon z de ces vitesses en fonction de v_1, v_1', v_2, θ_1 et θ_2.
En appliquant la relation (3) à chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise et en utilisant l'équation (7), déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la surpression, $r = A_1'/A_1$ et $\tau = A_2/A_1$, en fonction de θ_1, θ_2 et des impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 des milieux $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Montrer en particulier que
$$r = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1}.$$
6. En utilisant le résultat de la question B.2, calculer l'intensité I_1 de l'onde incidente frappant l'interface. Calculer de même les intensités I_1' et I_2 de l'onde réfléchie par l'interface et de l'onde transmise à travers celle-ci. On exprimera ces intensités en fonction de A_1, A_1', A_2, θ_1, θ_2, Z_1 et Z_2.
En déduire les coefficients de réflexion et de transmission en intensité, $R = I_1'/I_1$ et $T = I_2/I_1$, en fonction de r, τ, θ_1, θ_2, Z_1 et Z_2. L'énergie est-elle conservée ?
7. Montrer que l'onde réfléchie disparaît pour un angle d'incidence θ_B que l'on précisera en fonction de ρ_2/ρ_1 et c_1/c_2.
Application numérique. Les milieux sont les mêmes qu'à la question C.4. On a $\rho_1 = 1{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Calculer θ_B. Qu'en concluez-vous ?