Exercice II. Ondes acoustiques

A. Propagation

1. Considérons l'élément de volume compris au repos entre x et $x + \mathrm{d}x$, y et $y + a$, et z et $z + b$. Posons $S = a\,b$. La masse de cet élément de volume est $m = \rho_0\, S\, \mathrm{d}x$. Son accélération est
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\vec{u}_x \approx \frac{\partial v}{\partial t}\,\vec{u}_x.$$
Les seules forces extérieures exercées sur ce volume sont dues à la pression en $x + \psi(x,t)$ et à celle en $x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t)$. Elles valent respectivement
$$\Big(P_0 + p[x + \psi(x,t)]\Big)\, S\,\vec{u}_x$$
et
$$-\Big(P_0 + p[x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t)]\Big)\, S\,\vec{u}_x.$$
Leur résultante est
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \Big(p[x + \psi(x,t)] - p[x + \mathrm{d}x + \psi(x + \mathrm{d}x, t)]\Big)\, S\,\vec{u}_x \approx \Big(p[x] - p[x + \mathrm{d}x]\Big)\, S\,\vec{u}_x \\ &\approx -\frac{\partial p}{\partial x}\, S\,\mathrm{d}x\,\vec{u}_x.\end{aligned}$$
D'après le théorème du centre d'inertie, $m\,\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = \vec{F}$. En simplifiant par S et $\mathrm{d}x$, on obtient le résultat demandé.

2. En dérivant l'équation (2) par rapport à x et en insérant le résultat dans l'équation (1), on obtient
$$\rho_0\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,,$$
soit
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$
où
$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\,\chi}}$$
est la célérité de l'onde (bien définie car $\chi > 0$). En dérivant par rapport à t, on obtient la même équation pour v. De même pour p en dérivant par rapport à x et en utilisant l'équation (2).

3. La solution générale est de la forme $\psi(x,t) = \psi_+(x - c\,t) + \psi_-(x + c\,t)$, où les termes ψ_+ et ψ_- correspondent à des ondes se propageant respectivement selon les x croissants et les x décroissants.

4. (a) On a $\psi(x,t) = \psi_+(u)$ avec $u = x - c\,t$. Or
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}u}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}u}$$
et
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}u}\,\frac{\partial u}{\partial t} = -c\,\frac{\mathrm{d}\psi_+}{\mathrm{d}u}\,,$$
donc
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

et, d'après l'équation (2),

$$p = \frac{1}{\chi\, c}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = Z\, v$$

avec

$$Z = \frac{1}{\chi\, c} = \rho_0\, c.$$

(b) La puissance est celle de la force de pression $\mathrm{d}\vec{F} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$ exercée par les points en amont de $\mathrm{d}S$ sur ceux en aval. On a

$$\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}\cdot v\,\vec{u}_x = P\,\mathrm{d}S\,v\cos\theta$$

avec $P = P_0 + p$.

$$\langle \mathrm{d}w\rangle = \Big(\langle P_0\, v\rangle + \langle p\, v\rangle\Big)\,\mathrm{d}S\cos\theta = \langle p\, v\rangle\,\mathrm{d}S\cos\theta$$

car $\langle P_0\, v\rangle = P_0\,\langle v\rangle = 0$ (les points du milieu vibrent autour d'une position fixe, donc $\langle\psi\rangle = 0$ et de même pour $\langle v\rangle$). Comme $v = p/Z$, on obtient le résultat demandé.

B. Onde monochromatique

1. Il s'agit d'une onde plane se propageant dans la direction et le sens de $\vec{k}_1$.
   ω est la pulsation et $\vec{k}_1$ est le vecteur d'onde.
   On a $\omega = k_1\, c_1$.
2. Subtilité : l'équation (5) donne la représentation complexe de p_1, alors que c'est la surpression physique, réelle, qui intervient dans l'équation (4). On a donc

$$I_1 = \frac{\Big\langle (\mathrm{Re}[p_1])^2\Big\rangle\cos\theta_1}{Z_1}.$$

   Or $\Big\langle (\mathrm{Re}[p_1])^2\Big\rangle = |A_1|^2/2$, donc

$$I_1 = \frac{|A_1|^2\cos\theta_1}{2\, Z_1}.$$

C. Réflexion et transmission sous incidence oblique

1. La continuité de p est justifiée par le fait que l'interface est de masse nulle et n'est soumise qu'aux forces de pression exercées sur elle dans des sens opposés par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
   La continuité de v_z exprime le fait que les milieux restent collés (il n'y a pas de bulle de vide entre les deux).
   (Remarque : les frottements étant négligeables, il n'y a pas continuité de la vitesse tangentielle à l'interface.)
2. $\vec{k}_1 = k_1\,(\sin\theta_1\,\vec{u}_x - \cos\theta_1\,\vec{u}_z)$;
   $\vec{k}_1' = k_1\,(\sin\theta_1'\,\vec{u}_x + \cos\theta_1'\,\vec{u}_z)$, car $\|\vec{k}_1'\| = \omega/c_1 = k_1$ (même milieu) ;
   $\vec{k}_2 = k_2\,(\sin\theta_2\,\vec{u}_x - \cos\theta_2\,\vec{u}_z)$.
3. On a $(p_1 + p_1')(z = 0^+) = p_2(z = 0^-)$, d'où

$$A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - k_1\sin\theta_1\, x)} + A_1'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - k_1\sin\theta_1'\, x)} = A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t - k_2\sin\theta_2\, x)}. \qquad \text{(S1)}$$

On peut simplifier par $e^{i\omega t}$. La relation doit être vérifiée en tout point de l'interface, c'est-à-dire quel que soit x. Puisque A_1, A'_1 et A_2 ne dépendent pas de x, il faut que

$$k_1 \sin\theta_1 = k_1 \sin\theta'_1 = k_2 \sin\theta_2.$$

Comme $k_1 = \omega/c_1$ et $k_2 = \omega/c_2$, on obtient que

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}.$$

(On retrouve les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction des rayons lumineux.)

En reportant dans l'équation (S1), on obtient

$$A_1 + A'_1 = A_2. \tag{S2}$$

4. L'angle θ_2 n'est défini que si $c_2 \sin\theta_1/c_1 \leqslant 1$. Si $c_2 \leqslant c_1$, cette condition est toujours remplie. Si $c_2 > c_1$, l'angle θ_2 n'est défini que pour $\theta_1 \leqslant \arcsin(c_1/c_2) = \theta_c$ (« angle critique »). Il y a réflexion totale pour $\theta_1 > \theta_c$.
   A.N. $\theta_1 > 13{,}1°$.
5. On a $v_1 = p_1/Z_1$, $v'_1 = p'_1/Z_1$ et $v_2 = p_2/Z_2$. Par ailleurs, $(v_1)_z = -v_1 \cos\theta_1$, $(v'_1)_z = v'_1 \cos\theta'_1$ et $(v_2)_z = -v_2 \cos\theta_2$.
   L'équation (7) donne donc

$$\frac{A_1}{Z_1}\cos\theta_1 - \frac{A'_1}{Z_1}\cos\theta_1 = \frac{A_2}{Z_2}\cos\theta_2, \tag{S3}$$

   car $\theta'_1 = \theta_1$.
   En combinant (S2) et (S3), on obtient

$$r = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2\,Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1}$$

6. La normale à la surface fait un angle θ_1 avec la direction de l'onde progressive, donc

$$I_1 = \frac{|A_1|^2\cos\theta_1}{2\,Z_1}$$

   (cf. question B.2). De même,

$$I'_1 = \frac{|A'_1|^2\cos\theta_1}{2\,Z_1}$$

   puisque $\theta'_1 = \theta_1$. Enfin,

$$I_2 = \frac{|A_2|^2\cos\theta_2}{2\,Z_2}.$$

   On a

$$R = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = r^2$$

   et

$$T = \frac{|A_2|^2\cos\theta_2\,Z_1}{|A_1|^2\cos\theta_1\,Z_2} = \frac{\cos\theta_2\,Z_1}{\cos\theta_1\,Z_2}\,\tau^2.$$

   L'énergie est conservée. Pour le montrer, il suffit de vérifier que l'intensité quittant l'interface est égale à celle l'ayant frappée, c'est-à-dire $R + T = 1$. On a

$$\begin{aligned} R + T &= \frac{(Z_2^2\cos^2\theta_1 - 2\,Z_1\,Z_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + Z_1^2\cos^2\theta_2) + 4\,Z_1\,Z_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{(Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

7. L'onde réfléchie s'annule quand $Z_2 \cos\theta_1 = Z_1 \cos\theta_2$. En mettant au carré et en utilisant $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, on obtient $Z_2^2(1 - \sin^2\theta_1) = Z_1^2(1 - \sin^2\theta_2)$. Comme $\sin\theta_2 = c_2 \sin\theta_1 / c_1$, on a

$$Z_2^2(1 - \sin^2\theta_1) = Z_1^2\left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\sin^2\theta_1\right),$$

soit

$$\theta_{\mathrm{B}} = \arcsin\sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_2^2 - Z_1^2 c_2^2/c_1^2}} = \arcsin\sqrt{\frac{(\rho_2/\rho_1)^2 - (c_1/c_2)^2}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}}.$$

(L'indice « B » fait référence à l'angle de Brewster en optique.)
On a $\rho_2/\rho_1 = 800$ et $c_1/c_2 = 0{,}227$. On obtient donc que

$$\sqrt{\frac{(\rho_2/\rho_1)^2 - (c_1/c_2)^2}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}} > 1.$$

L'angle θ_{B} n'est donc pas défini et il n'y a jamais transmission totale.