Contrôle continu du 15 novembre 2010

Durée : 1 h 30

Exercice 1

1. On a
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff (\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \epsilon))$$
et
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \ell' \iff (\forall\, \epsilon' > 0, \exists\, N' \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N' \implies |v_n - \ell'| \leqslant \epsilon')).$$
Or, d'après l'inégalité triangulaire,
$$|(u_n - v_n) - (\ell - \ell')| = |(u_n - \ell) - (v_n - \ell')| \leqslant |(u_n - \ell)| + |(v_n - \ell')|,$$
donc, en posant $\epsilon = \epsilon' = \epsilon''/2$ et $N'' = \sup\{N, N'\}$, on obtient
$$\forall\, \epsilon'' > 0, \exists\, N'' \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N'' \implies |(u_n - v_n) - (\ell - \ell')| \leqslant \epsilon'')\ :$$
on a donc bien $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \ell - \ell'$.
2. On a $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = +\infty$.
En effet,
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \iff (\forall\, K \in \mathbb{R}, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \implies u_n \geqslant K))$$
et
$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty \iff (\forall\, K' \in \mathbb{R}, \exists\, N' \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N' \implies v_n \leqslant K')).$$
Pour tout $K'' \in \mathbb{R}$, posons $K = K''/2$ et $K' = -K''/2$.
$$v_n \leqslant K' = -K''/2 \iff -v_n \geqslant K''/2,$$
donc, avec $N'' = \sup\{N, N'\}$,
$$\forall\, K'' \in \mathbb{R}, \exists\, N'' \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N'' \implies u_n - v_n \geqslant K'')\ :$$
on a donc bien $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = +\infty$.

Exercice 2

$u_{n+2} - u_{n+1} = (u_{n+1} - u_n)/2$. Comme $u_1 - u_0 = 1 > 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n. La suite est donc croissante.

On a

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = u_0 + (u_1 - u_0) \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2},$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 + 2\,(u_1 - u_0) = 3$.

Remarque. — On peut aussi montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3. Comme elle est croissante, elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3 (mais ça ne prouve pas que la limite soit 3).

Exercice 3

1. Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2.
$$\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n \cdot \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right).$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(n+1)} &= \sqrt{\ln n}\,\sqrt{1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)} = \sqrt{\ln n}\cdot\left(1 + \frac{1}{2\,n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\\ &= \sqrt{\ln n} + \frac{1}{2\,n\,\sqrt{\ln n}} + o\left(\frac{1}{n\,\sqrt{\ln n}}\right),\end{aligned}$$

   donc

$$u_n = \frac{1}{2\,n\,\sqrt{\ln n}} + o\left(\frac{1}{n\,\sqrt{\ln n}}\right) \simeq \frac{1}{2\,n\,\sqrt{\ln n}}.$$

3. *a.* On pose $u = \ln t$, soit $t = \mathrm{e}^u$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_{t=2}^{x} \frac{1}{t\,\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{d}t &= \int_{u=\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{\mathrm{e}^u\,\sqrt{u}}\,\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int_{u=\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[2\,\sqrt{u}\right]_{u=\ln 2}^{\ln x}\\ &= 2\left(\sqrt{\ln x} - \sqrt{\ln 2}\right).\end{aligned}$$

   Quand $x \to \infty$, $\ln x \to \infty$: l'intégrale J est donc divergente.

   b. La réponse à la question 1 ne permet pas de conclure sur la convergence de J quand $t \to \infty$. En effet, il n'existe pas de α tel que, pour t suffisamment grand, on ait soit

$$f(t) \leqslant g_\alpha(t) \quad \text{avec } \alpha > 1,$$

   soit

$$g_\alpha(t) \leqslant f(t) \quad \text{avec } \alpha \leqslant 1.$$

   Dans le premier cas, J serait convergente car $0 \leqslant f \leqslant g_\alpha$ et $\int^\infty g_\alpha$ converge ; dans le second, elle serait divergente car $0 \leqslant g_\alpha \leqslant f$ et $\int^\infty g_\alpha$ diverge.
4. $u_n \simeq v_n/2$ avec $v_n = f(n)$.

   La fonction f est décroissante, positive et son intégrale jusqu'à $+\infty$ est divergente. D'après le théorème de comparaison série-intégrale, $\sum v_n$ est donc divergente.

Or $\sum v_n$ est une série à termes positifs et $u_n \simeq v_n/2$: la divergence de $\sum v_n$ entraîne donc celle de $\sum u_n$.

Remarque. — On peut aussi écrire directement que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = (\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}) + (\sqrt{\ln n} - \sqrt{\ln(n-1)}) + \cdots + (\sqrt{\ln 2} - 0) = \sqrt{\ln(n+1)},$$

dont la divergence est évidente.

Exercice 4

1. $\deg P'(x) = n - 1$.
2. *a.* f est la composée de $x \mapsto -1/x$, dérivable sur $]0, \infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de l'exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier : f est donc dérivable.

   On a
   $$f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

   b. D'après ce qui précède, (1) est vraie pour $n = 1$ avec $N(1) = 2$ et $P_1(x) = 1$.

   Supposons maintenant que (1) soit vraie pour un $n \geqslant 1$ donné. Un calcul direct de la dérivée donne alors
   $$f^{(n+1)}(x) = x^{-N(n)-2} \cdot \Big((1 - N(n)\,x)\,P_n(x) + x^2\,P_n'(x)\Big)\,e^{-1/x}.$$

   Cette expression a la forme voulue pour $n + 1$, car les sommes, produits et dérivées des polynômes sont des polynômes. En outre, si $P_n(x)$ est de degré $n - 1$, les termes $x\,P_n(x)$ et $x^2\,P_n'(x)$ sont bien de degré n.
3. *a.* La question précédente montre que
   $$\begin{aligned} N(n+1) &= N(n) + 2, \\ P_{n+1}(x) &= (1 - N(n)\,x)\,P_n(x) + x^2\,P_n'(x) \end{aligned} \tag{R}$$

   avec $N(1) = 2$ et $P_1(x) = 1$ pour valeurs initiales.

   b. On a clairement $N(n) = 2\,n$.
4. On a montré la dérivabilité pour $x > 0$ à la question 2.*b*. Celle pour $x < 0$ est évidente. Il reste le point $x = 0$.

   On a $g^{(0)} = 0$. Supposons que $g^{(n)}(0)$ existe et vaille 0. Montrons alors que $g^{(n+1)}(0)$ existe et vaut 0.

   Pour tout $x < 0$, $g(x) = 0$, donc $g^{(n)}$ admet une dérivée à gauche nulle en 0.

   $g^{(n)}$ est dérivable en 0 si elle admet une dérivée à droite en 0 et que celle-ci est égale à sa dérivée à gauche, c.-à-d. est nulle. Pour $x > 0$,
   $$\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(n)}(x)}{x} = x^{-N(n)-1}\,P_n(x)\,e^{-1/x}.$$

   $\lim_{x\to 0^+} P_n(x) = P_n(0) \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer que $\lim_{n\to 0^+} x^{-N(n)-1}\,e^{-1/x} = 0$.
   $$x^{-N(n)-1}\,e^{-1/x} = \exp\!\left(-\frac{(N(n)+1)\,x\ln x + 1}{x}\right).$$

   $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} -1/x = -\infty$, donc $\lim_{x\to 0^+} x^{-N(n)-1}\,e^{-1/x} = 0$. $g^{(n)}$ admet donc une dérivée nulle à droite.

5. Il suffit de montrer que cette expression satisfait les mêmes relations de récurrence que trouvées dans la question 3.*a*. La condition initiale $P_1(x) = 1$ étant claire, il s'agit de prouver (R).

L'expression proposée (2) peut s'écrire

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,\,k}\, x^k \qquad \text{avec } a_{n+1,\,k} = (-1)^k \frac{n!\,(n+1)!}{(n-k)!\,k!\,(n+1-k)!}.$$

Les membres polynomiaux de (R) sont identiques si tous leurs coefficients coïncident. En prenant le coefficient de x^k dans (R), il s'agit donc de montrer que

$$a_{n+1,\,k} = a_{n,\,k} - 2\,n\,a_{n,\,k-1} + (k-1)\,a_{n,\,k-1},$$

ce qui s'écrit explicitement :

$$\frac{n!\,(n+1)!}{(n-k)!\,k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n-1)!\,n!}{(n-1-k)!\,k!\,(n-k)!} + \frac{\big(2\,n-(k-1)\big)\cdot(n-1)!\,n!}{(n-k)!\,(k-1)!\,(n+1-k)!}.$$

En divisant les deux cotés par $\frac{(n-1)!\,n!}{(n-k)!\,k!\,(n+1-k)!}$, ceci revient à montrer que

$$n\cdot(n+1) = (n-k)\cdot(n+1-k) + (2n-k+1)\,k.$$

Or, cette identité est clairement satisfaite, comme on le voit en développant les parenthèses.

Remarque réservée aux curieux. — À des changements de variables près, $P_{n+1}(x)$ est un polynôme de Laguerre généralisé de paramètre $a = 1$.