Contrôle continu du 15 novembre 2012

Exercice I

1. On a $1 + \mathrm{e}^{1/x} = 2 + 1/x + O(1/x^2)$ donc
$$\frac{x+1}{1+\mathrm{e}^{1/x}} = \frac{1}{2}\,(1+x)\left(1 - \frac{1}{2\,x} + O\left[\frac{1}{x^2}\right]\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$
La limite est donc 1/4.
2. On a
$$\ln u_n = n^{\mu}\,\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^{\mu}\,\ln\left(1 - \frac{1}{2\,n^2} + O\left[\frac{1}{n^4}\right]\right) = -\frac{n^{\mu-2}}{2} + O(n^{\mu-4}).$$
La limite est de (u_n) est donc $\ell = 1$ pour $\mu < 2$, $\ell = \mathrm{e}^{-1/2}$ pour $\mu = 2$ et $\ell = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$ pour $\mu > 2$.

Exercice II

1. $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Une série $\sum u_n$ est grossièrement divergente si la suite (u_n) ne tend pas vers 0. C'est le cas de la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^{\alpha}$ si $\alpha \leqslant 0$.
3. *a.* Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E,\,d)$ si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (n,\,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n,\,u_p) \leqslant \epsilon.$$
Un espace métrique $(E,\,d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy dans $(E,\,d)$ converge dans $(E,\,d)$.

   b. On a
$$S_{2\,N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2\,N}\frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2\,N}\frac{1}{2\,N} = \frac{1}{2}.$$
Il existe donc un $\epsilon \in\ ]0,\,1/2[$ (par exemple 1/4) tel que, pour tout N entier, on puisse trouver un couple $(n,\,p)$ (par exemple $(N,\,2\,N)$) tel que $|S_p - S_n| > \epsilon$.

   La suite (S_n) des sommes partielles n'étant pas de Cauchy, la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n$ diverge.

   Remarques

   Il s'agit de la contraposée du théorème « Si une suite converge, elle est de Cauchy ». Ce théorème ne requiert d'ailleurs pas que l'espace soit complet, contrairement à sa réciproque, « Si une suite de Cauchy et que l'espace est complet, alors elle converge ».

Au cas où vous ne seriez pas convaincu que la suite n'est pas de Cauchy, montrons-le pas à pas : la négation du critère de Cauchy est

$$\text{non}(\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow \|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \text{non}(\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow \|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \text{non}(\forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow \|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \text{non}(p \geqslant n \geqslant N \Longrightarrow \|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ \text{non}(\text{non}[p \geqslant n \geqslant N \text{ et non}(\|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)])$$

(car $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \text{non}(\mathcal{P} \text{ et non}\,\mathcal{Q})$)

$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \text{ et non}(\|u_p - u_n\| \leqslant \epsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\ \epsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ p \geqslant n \geqslant N \text{ et } \|u_p - u_n\| > \epsilon.)$$ ⌟

c. Si pour tout n (au moins à partir d'un certain rang), $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, alors $\sum v_n$ diverge si $\sum u_n$ diverge. En appliquant ce théorème à $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^\alpha$, on obtient que $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ diverge si $\alpha < 1$.

4. *a.* Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n\,(n-1)} \geqslant \frac{1}{n^2},$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leqslant 2.$$

b. $0 \leqslant 1/n^\alpha \leqslant 1/n^2$ et $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge (car c'est une série à termes positifs dont toutes les sommes partielles sont majorées par 2), donc $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge si $\alpha \geqslant 2$.

5. *a.* $S_{2^n} = \sum_{q=0}^{n} v_q$.

b. Si $q > 0$, pour tout $k \in [\![2^{q-1} + 1,\ 2^q]\!]$, $1/k^\alpha \leqslant 1/(2^{q-1})^\alpha$, donc

$$v_q \leqslant \frac{2^q - 2^{q-1}}{(2^{q-1})^\alpha} = \frac{2^{q-1}}{(2^{q-1})^\alpha} = (2^{1-\alpha})^{q-1}.$$

c.

$$S_{2^n} = v_0 + \sum_{q=1}^{n} v_q \leqslant 1 + \sum_{q=1}^{n} (2^{1-\alpha})^{q-1} = 1 + \sum_{q'=0}^{n-1} (2^{1-\alpha})^{q'} \quad \text{avec } q' = q - 1$$
$$= 1 + \frac{1 - (2^{1-\alpha})^n}{1 - 2^{1-\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}, \quad \text{car } 2^{1-\alpha} \in [0, 1[\text{ si } \alpha > 1.$$

Pour tout n, il existe un entier p tel que $n \leqslant 2^p$, donc $S_n \leqslant S_{2^p}$ puisque (S_n) est une suite croissante. Or S_{2^p} est majoré par un nombre indépendant de p, donc (S_n) est majorée. Comme elle est croissante, elle converge si $\alpha > 1$.

Exercice III

1. $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = k$, donc

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n^{1/n} - k| \leqslant \epsilon,$$

c'est-à-dire $k - \epsilon \leqslant u_n^{1/n} \leqslant k + \epsilon$. Soit ϵ tel que $k + \epsilon = (1 + k)/2$ (c.-à-d. $\epsilon = (1 - k)/2$, qui est bien > 0). Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\ n \geqslant N, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n = \left(\frac{1+k}{2}\right)^n.$$

La série $\sum v_n$ est une série géométrique de raison $(1 + k)/2 \in [1/2, 1[$, donc elle converge. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, $\sum u_n$ converge aussi.

2. $u_n = (2/n)^n\ n!$, donc

$$u_n^{1/n} = \frac{2}{n} \left(\left[\sqrt{2\ \pi} + o(1)\right]\ \sqrt{n}\right)^{1/n}\ \frac{n}{\mathrm{e}}.$$

$$\left(\left[\sqrt{2\ \pi} + o(1)\right]\ \sqrt{n}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln\left[\sqrt{2\ \pi} + o(1)\right] + \ln \sqrt{n}}{n}\right) = \exp\left(\frac{\ln\left[\sqrt{2\ \pi} + o(1)\right]}{n} + \frac{\ln n}{2\ n}\right).$$

Tant $\ln(\sqrt{2\ \pi} + o[1])/n$ que $\ln n/(2\ n)$ tendent vers 0 quand $n \to \infty$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 2/\mathrm{e}$.

Or $2/\mathrm{e} < 1$, donc $\sum u_n$ converge.

Exercice IV

1. **Domaine de définition** : dom $f = \mathbb{R}^*$.

Symétries : Si p est pair, f est impaire.
Si p est impair, f n'admet pas de symétrie.

Limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } p \text{ est pair,} \\ +\infty & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

Asymptotes : Asymptote verticale en $x = 0$.
Asymptote d'équation $y = ([p - 1]/p)\ x$ quand $x \to \pm\infty$.

Tableau de variation : La dérivée de f vaut

$$f'(x) = \frac{p-1}{p} - \frac{(p-1)\,(1-(p-1)/p)\,a}{x^p} = \frac{p-1}{p}\left(1 - \frac{a}{x^p}\right).$$

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, f' s'annule en $a^{1/p}$. On a

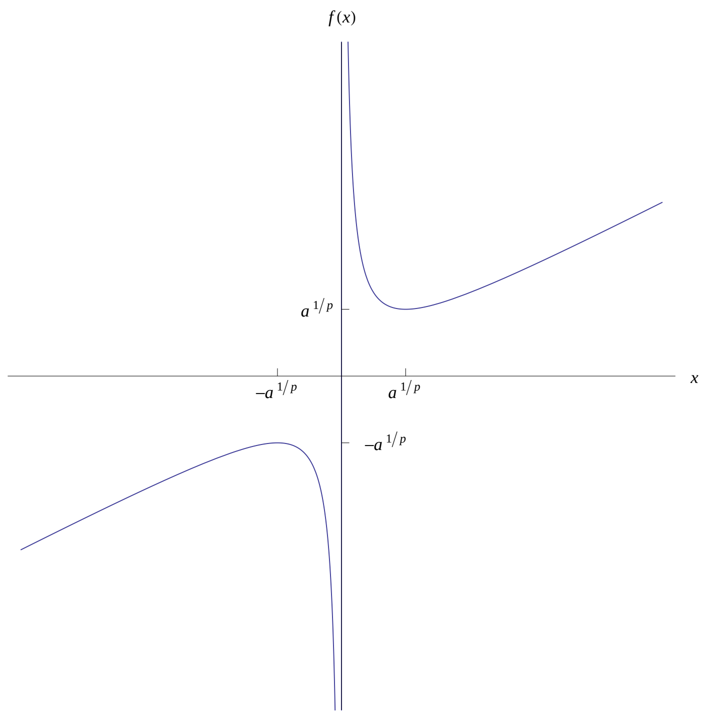
$$f(a^{1/p}) = \frac{p-1}{p}\,a^{1/p} + \frac{a}{p\,a^{(p-1)/p}} = a^{1/p}.$$

$f'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant a^{1/p}$ et $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant a^{1/p}$. Le point $(a^{1/p}, a^{1/p})$ est donc un minimum local de f.

Sur $\mathbb{R}^{-*}$, il faut distinguer les cas « p pair » et « p impair ».

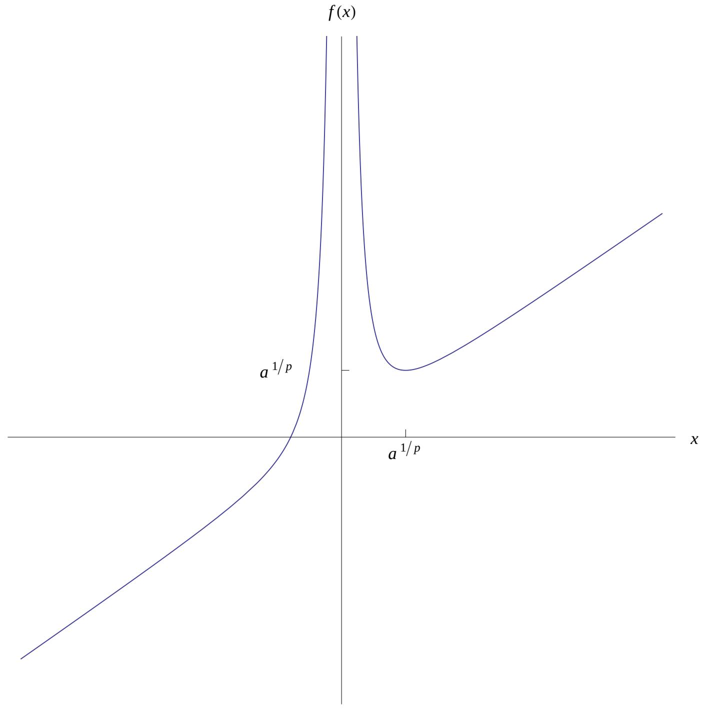
Cas « p pair » : f est alors impaire et le point $(-a^{1/p}, -a^{1/p})$ est un maximum local.

x	$-\infty$		$-a^{1/p}$		0		$a^{1/p}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-a^{1/p}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	$a^{1/p}$	$\nearrow$	$+\infty$



Cas « p impair » : $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.

x	$-\infty$		0		$a^{1/p}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$a^{1/p}$	$\nearrow$	$+\infty$



2. *a.* Le minimum de f sur $\mathbb{R}^{+}$ est $a^{1/p}$: même si $u_0 < a^{1/p}$, comme $u_0 > 0$, $u_1 = f(u_0) \geqslant a^{1/p} > 0$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant a^{1/p}$.

   b. Si $u_n \geqslant a^{1/p}$, alors
$$\frac{a}{u_n^{p-1}} \leqslant \frac{a}{a^{(p-1)/p}} = a^{1/p},$$
   donc
$$u_{n+1} = \frac{p-1}{p}\,u_n + \frac{a}{p\,u_n^{p-1}} \leqslant \frac{p-1}{p}\,u_n + \frac{a^{1/p}}{p} \leqslant \frac{p-1}{p}\,u_n + \frac{u_n}{p} = u_n :$$
   (u_n) est décroissante dès que $u_n \geqslant a^{1/p}$, donc au plus tard quand $n = 1$.

   c. (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et minorée par $a^{1/p}$: elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant a^{1/p}$.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la seule solution de l'équation $\ell = f(\ell)$ sur cet intervalle est $\ell = a^{1/p}$: (u_n) converge donc vers $a^{1/p}$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \ell = a^{1/p}$.
$$|f(u_n) - f(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leqslant \sup_{x \geqslant a^{1/p}} |f'(x)|\;|u_n - \ell| = \frac{p-1}{p}\,|u_n - \ell|.$$
   On en déduit que
$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|.$$