**Université Pierre et Marie Curie.**
**Année universitaire 2012/2013**

**Unité d'enseignement LP206.**
**Mathématiques pour physiciens I**

# Contrôle continu du 15 novembre 2012

**Durée : 1 h 30**

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

## Exercice I

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}-\frac{x}{2}\right)$ ;
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\mu}$, avec $\mu\in\mathbb{R}$. Discuter suivant la valeur de $\mu$.

## Exercice II

L'objet de l'exercice est de retrouver, sans utiliser le théorème de comparaison série-intégrale, les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ pour lesquelles les séries de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}1/n^\alpha$ convergent. On posera $S_n=\sum_{k=1}^{n}1/k^\alpha$.

1. Rappeler sans démonstration toutes les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles la série $\sum_{n\geqslant 1}1/n^\alpha$ converge.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la série $\sum_{n\geqslant 1}1/n^\alpha$ est-elle grossièrement divergente ?
3. *a.* Rappeler la définition d'une suite de Cauchy (on considérera une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace métrique $E$ muni d'une distance $d$).
   Qu'est-ce qu'un espace complet ?

   *b.* On s'intéresse ici au cas $\alpha=1$.
   Soit $N$ un entier quelconque. Trouver un minorant simple et indépendant de $N$ de $S_{2\,N}-S_N$. À l'aide de la réponse à la question 3.*a*, conclure sur la nature convergente ou divergente de la série $\sum_{n\geqslant 1}1/n$.

   *c.* Que peut-on en conclure pour $\sum_{n\geqslant 1}1/n^\alpha$ si $\alpha<1$ ?
4. *a.* En simplifiant
$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$
   déduire un majorant de la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1}1/n^2$.

   *b.* Que peut-on en déduire sur la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1}1/n^\alpha$ si $\alpha\geqslant 2$ ?
5. Le cas étudié à la question précédente ne permet de conclure que si $\alpha\geqslant 2$. On s'intéresse ici au cas plus général où $\alpha>1$.

   *a.* On pose $v_0=1$ et
$$v_q=\sum_{k=2^{q-1}+1}^{2^q}\frac{1}{k^\alpha}\quad\text{pour tout } q\geqslant 1.$$

Exprimer $S_{2^n}$ en fonction des éléments de la suite $(v_q)_{q\in\mathbb{N}}$.

*b.* Montrer que $v_q \leqslant (2^{1-\alpha})^{q-1}$ (on majorera d'abord chaque terme $1/k^\alpha$ dans $v_q$ par une quantité indépendante de $k$).

*c.* En déduire un majorant de $S_{2^n}$ indépendant de $n$. Que peut-on en conclure sur la nature de $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ quand $\alpha > 1$ ?

# Exercice III

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2\,n}{n^n}.$$

1. On rappelle la règle de Cauchy : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs et $k$ est un réel dans $[0, 1[$ tels que $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = k$, alors $\sum u_n$ converge.
   Démontrez cette règle.
2. D'après la formule de Stirling,

$$n! = \left(\sqrt{2\,\pi} + o[1]\right)\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad \text{quand } n \to \infty.$$

   En déduire la limite de $u_n^{1/n}$ et conclure sur la nature convergente ou divergente de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

# Exercice IV

Soient $a$ un réel strictement positif et $p$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{p-1}{p}\,x + \frac{a}{p\,x^{p-1}}.$$

1. Étudier et représenter la fonction $f$ (distinguer les cas « $p$ pair » et « $p$ impair ») : on précisera le domaine de définition, les symétries, les limites en $\pm\infty$ et aux éventuels points singuliers, les droites asymptotiques ; on dressera également le tableau de variation de la fonction et on précisera les positions (abscisse et ordonnée) des extrémums.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   *a.* Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant a^{1/p}$.
   *b.* En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $n \geqslant 1$.
   *c.* La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite $\ell$.
3. On rappelle l'inégalité des accroissements finis : si $f$ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles continue sur un intervalle $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, et s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in\, ]c, d[$, alors $|f(d) - f(c)| \leqslant k\,|d - c|$.
   En déduire un majorant de $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ et $p$ pour tout $n \geqslant 1$, puis un majorant de $|u_n - \ell|$ en fonction de $|u_1 - \ell|$, $p$ et $n$.