Contrôle continu du 25 octobre 2011

Durée : 1 h 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

On souhaite étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ et } n \geqslant 2.$$

1. Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Riemann soit convergente.
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
3. On pose $u_n = v_n + w_n$, où $(v_n)_{n\geq 2}$ est la suite définie par

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

   Pour quelles valeurs de α la série $\sum v_n$ est-elle convergente ?
4. Discuter selon la valeur de α la convergence de $\sum w_n$.
   Conclure quant à la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 2

On rappelle qu'il existe un réel C strictement positif tel que

$$n! \simeq C\, \frac{n^n \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$$

quand n tend vers l'infini. L'objet de cet exercice est de déterminer la valeur de C. On utilise pour ceci les intégrales de Wallis,

$$I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x, \quad \text{où } n \geqslant 0.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant I_n par parties pour $n \geqslant 2$, établir une relation entre I_n et I_{n-2}.
3. En déduire l'expression de I_{2p} et I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4. *a.* Montrer que
$$I_{2\,p} = \frac{(2\,p)!}{2^{2\,p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$
et
$$I_{2\,p+1} = \frac{2^{2\,p}\,(p!)^2}{(2\,p+1)!}.$$
b. Que vaut le produit $I_{2\,p}\,I_{2\,p+1}$?

5. *a.* Quel est le sens de variation de la suite (I_n) et le signe de ses termes ? (On admettra que si f et g sont deux fonctions définies et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ et que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x=a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$.)
b. En déduire que
$$\frac{I_{2\,p+2}}{I_{2\,p}} \leqslant \frac{I_{2\,p+1}}{I_{2\,p}} \leqslant 1,$$
puis la valeur de
$$\lim_{p\to\infty} \frac{I_{2\,p+1}}{I_{2\,p}}.$$

6. *a.* À l'aide des réponses aux questions 4.*b* et 5.*b*, donner un équivalent asymptotique de $I_{2\,p}$.
b. En déduire la valeur de C.

Exercice 3

On considère la fonction
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \frac{1}{x^4 - a^4},$$
où a est un réel positif.

1. Donner le domaine de définition de f. Est-elle continue et dérivable sur ce domaine ?
Préciser les symétries de la fonction, ses limites en $\pm\infty$ et aux éventuels points singuliers.
Construire son tableau de variation et tracer f.
2. Décomposer $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{x^2+a^2},$$
où A, B et C sont des constantes réelles.
En déduire la valeur de
$$\int_{2\,a}^{3\,a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

On considère les fonctions f et g de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous. Peut-on les prolonger en fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 ? Si oui, que valent $\widetilde{f}(0)$ et $\widetilde{g}(0)$?

1. $f(x) = (x^x)^x$;
2. $g(x) = x^{(x^x)}$.