Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2011/2012

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Contrôle continu du 25 octobre 2011

Durée : 1 h 30

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

A.

On souhaite étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad n \geqslant 2.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Dans le cas $0 < \alpha \leq 1$, on pose $u_n = v_n + w_n$ avec $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par $v_n = (-1)^n/n^\alpha$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente quelque soit la valeur de $\alpha > 0$.
3. Discuter selon la valeur de α la convergence de $\sum w_n$ avec $w_n = u_n - v_n$. Conclure quant à la convergence de $\sum u_n$.

1. $|u_n| \simeq 1/n^\alpha$ car $\alpha > 0$.
2. Le critère de Leibniz s'applique (car $\alpha > 0$).
3. $\sum u_n$ est de même nature que $\sum w_n$, or $w_n \simeq -1/(2\, n^{2\,\alpha})$, donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

B.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs réelles, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ.

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$

On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots u_n).$$

On souhaite montrer que (v_n) converge vers ℓ à l'aide de la définition de la limite.

2. Majorer $|v_n - \ell|$ en introduisant la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$w_n = \frac{1}{n}\,(u_1 + u_2 + \cdots + u_{N-1} - (N-1)\ \ell)$$

pour un N fixé.

Pour $n \geqslant N$, on a

$$|v_n - \ell| = \frac{1}{n}\ |(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + (u_{N-1} - \ell) + (u_N - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)| \leqslant |w_n| + (1 - \frac{N-1}{n})\ \varepsilon \leqslant |w_n| + \varepsilon.$$

3. Quelle est la limite de (w_n) ? En déduire que la suite (v_n) converge vers ℓ.

w_n tend vers zéro donc $\exists\, N'$, $\forall\, n \geqslant N'$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$. On en déduit que $\forall\, n \geqslant \sup(N, N')$, $|v_n - \ell| \leqslant 2\,\varepsilon$.

C.

Soit (u_n) une suite de réels convergeant vers une limite ℓ non nulle.

1. Montrer qu'il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|u_n| \geqslant |\ell|/2$.
2. En déduire, à l'aide de la définition de la limite d'une suite en termes de $\forall\, \epsilon > 0$, etc., que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 1/\ell.$$

D.

On rappelle qu'il existe un réel C strictement positif tel que

$$n! \simeq C\, \frac{n^n\, \sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$$

quand n tend vers l'infini. L'objet de cet exercice est de déteminer la valeur de C. On utilise pour ceci les intégrales de Wallis,

$$I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \cos^n x\, \mathrm{d}x,$$

où $n \geqslant 0$.

1. Calculer I_0 et I_1.

$I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$.

2. En intégrant I_n par parties pour $n \geqslant 2$, établir une relation entre I_n et I_{n-2}.

$$I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \underbrace{\cos x}_{u'}\ \underbrace{\cos^{n-1} x}_{v}\ \mathrm{d}x = \underbrace{[\sin x\, \cos^{n-1} x]_{x=0}^{\pi/2}}_{0} - \int_{x=0}^{\pi/2} \sin x \times (n-1)\, \cos^{n-2} x\, (-\sin x)\, \mathrm{d}x$$

$$= (n-1) \int_{x=0}^{\pi/2} \cos^{n-2} x\, (1 - \cos^2 x)\, \mathrm{d}x = (n-1)\, (I_{n-2} - I_n),$$

d'où

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}.$$

3. *a.* En déduire l'expression de $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$I_{2\,p} = \frac{2\,p-1}{2\,p}\, I_{2\,p-2} = \ldots = \frac{2\,p-1}{2\,p} \cdots \frac{1}{2}\, I_0 = \frac{(2\,p-1)\,(2\,p-3)\cdots 3 \times 1}{(2\,p)\,(2\,p-2)\cdots 4 \times 2}\, \frac{\pi}{2}.$$

$$I_{2\,p+1} = \frac{2\,p}{2\,p+1}\, I_{2\,p} = \ldots = \frac{2\,p}{2\,p+1} \cdots \frac{2}{3}\, I_1 = \frac{(2\,p)\,(2\,p-2)\cdots 4 \times 2}{(2\,p+1)\,(2\,p-1)\cdots 3 \times 1}.$$

b. Que vaut le produit $I_{2\,p}\,I_{2\,p+1}$?

$$I_{2\,p}\,I_{2\,p+1} = \frac{\pi}{2\,(2\,p+1)}.$$

4. Montrer que

$$I_{2\,p} = \frac{(2\,p)!}{2^{2\,p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2\,p+1} = \frac{2^{2\,p}\,(p!)^2}{(2\,p+1)!}.$$

Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$ par $(2\,p)\,(2\,p-2)\cdots 4\times 2 = 2^p\,p!$.

5. *a.* Quel est le sens de variation de la suite (I_n) et le signe de ses termes ? (On admettra que si f et g sont deux fonctions définies et intégrables sur un intervalle $[a,\,b]$ et que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,\,b]$, alors $\int_{x=a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x=a}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$.)

Pour tout $x \in [0,\,\pi/2]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x$. On a donc $0 \leqslant I_{n-1} \leqslant I_n$: I_n est une suite décroissante positive.

b. En déduire que $I_{2\,p+2}/I_{2\,p} \leqslant I_{2\,p+1}/I_{2\,p} \leqslant 1$, puis $\lim_{p\to\infty} I_{2\,p+1}/I_{2\,p}$.

$0 \leqslant I_{2\,p+2} \leqslant I_{2\,p+1} \leqslant I_{2\,p}$, donc

$$\frac{I_{2\,p+2}}{I_{2\,p}} \leqslant \frac{I_{2\,p+1}}{I_{2\,p}} \leqslant 1.$$

$I_{2\,p+2}/I_{2\,p} = (2\,p+1)/(2\,p+2)$, donc $\lim_{p\to\infty} I_{2\,p+2}/I_{2\,p} = 1$ et $\lim_{p\to\infty} I_{2\,p+1}/I_{2\,p}$ aussi, par le théorème des gendarmes.

6. *a.* À l'aide des réponses aux questions 3.*b* et 5.*b*, donner un équivalent asymptotique de $I_{2\,p}$.

$$I_{2\,p}\,I_{2\,p+1} = \frac{\pi}{2\,(2\,p+1)} \quad \text{et} \quad I_{2\,p} \simeq I_{2\,p+1}, \quad \text{donc} \quad I_{2\,p} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{4\,p}}.$$

b. En déduire la valeur de C.

$$I_{2\,p} = \frac{(2\,p)!}{2^{2\,p}\,(p!)^2}\,\frac{\pi}{2} \simeq \frac{C\,(2\,p)^{2\,p}\,\sqrt{2\,p}\,/\mathrm{e}^{2\,p}}{2^{2\,p}\,(C\,p^p\,\sqrt{p}\,/\mathrm{e}^p)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\,\sqrt{2\,p}}.$$

En comparant les deux expressions précédentes, on obtient $C = \sqrt{2\,\pi}$.

E.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \geqslant 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 1/(n+1)}.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n dans les cas où $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$ (on pourra calculer les premiers termes pour s'aider). La suite (u_n) converge-t-elle, et, si oui, vers quelle limite ?

   - Si $u_0 = 0$, $u_{2\,n+1} = 1$ et $u_{2\,n} = 2\,n/(2\,n+1)$. On peut le deviner en calculant les premiers termes et le prouver pa récurrence. On a bien $u_{2\times 0} = 0$. Supposons que $u_{2\,n} = 2\,n/(2\,n+1)$. On a bien

   $$u_{2\,n+1} = \frac{1}{u_{2\,n} + 1/(2\,n+1)} = 1.$$

   De même, supposons que $u_{2\,n-1} = 1$. On a bien

   $$u_{2\,n} = \frac{1}{u_{2\,n-1} + 1/(2\,n)} = \frac{2\,n}{2\,n+1}.$$

   - Si $u_0 = 1$, $u_{2\,n} = 1$ et $u_{2\,n+1} = (2\,n+1)/(2\,n+2)$.

   Dans les deux cas, (u_n) tend vers 1.

2. Exprimer $u_{n+2} - 1$ en fonction de $u_n - 1$ et montrer que $u_{n+2} \leqslant 1$ si et seulement si $u_n \leqslant 1$.

   $$u_{n+2} = \frac{1}{\dfrac{1}{u_n + 1/(n+1)} + \dfrac{1}{n+2}} = \frac{(n+1)\,(n+2)\,u_n + n + 2}{(n+1)\,(n+2) + (n+1)\,u_n + 1}.$$

   $$u_{n+2} - 1 = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2) + (n+1)\,u_n + 1}\,(u_n - 1).$$

   La fraction devant $(u_n - 1)$ est toujours positive, d'où le résultat demandé.

3. En déduire que $u_{n+2} - u_n \geqslant 0$ si et seulement si $u_n \leqslant 1$.

   $$u_{n+2} - u_n = \frac{n + 2 - (n+1)\,u_n^2 - u_n}{(n+1)\,(n+2) + (n+1)\,u_n + 1}.$$

   Le dénominateur est positif. Le numérateur est positif si et seulement si $u_n \leqslant 1$ (sachant que $u_n \geqslant 0$).

4. *a.* Montrer que les suites (v_n) et (w_n), où $v_n = u_{2\,n}$ et $w_n = u_{2\,n+1}$, sont convergentes.

   Considérons la suite (v_n). Si $v_0 \leqslant 1$, $v_n \leqslant 1$ pour tout n d'après le 2. D'après le 3, v_n est donc croissante. Comme elle est en outre majorée (par 1), (v_n) converge.

   Si $v_0 \geqslant 1$, (v_n) est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc également.

   Le même raisonnement s'applique à (w_n).

   b. Quelle relation a-t-on entre les limites λ et μ des suites (v_n) et (w_n) ?

   On a

   $$w_n = \frac{1}{v_n + 1/(2\,n+1)}.$$

   En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $\mu = 1/\lambda$. (Remarque : $\lambda \neq 0$ puisque soit v_n croît (si $v_0 \in [0, 1]$), soit $v_n \geqslant 1$.)

5. On suppose que $u_0 \leqslant 1$. Montrer que $\forall\ n$, $u_n \leqslant 1$, puis que $u_n \geqslant 1/(1+1/n)$. La suite (u_n) converge-t-elle, et, si oui, vers quelle limite ?

Il suffit de montrer que $u_1 \leqslant 1$. $u_1 = 1/(u_0+1) \leqslant 1$ puisque $u_0 \geqslant 0$. Comme $u_0 \leqslant 1$, $u_1 \leqslant 1$ et que $(u_n \leqslant 1) \Rightarrow (u_{n+2} \leqslant 1)$, on obtient par récurrence que $u_n \leqslant 1$ pour tout n.

$$u_n = \frac{1}{u_{n-1}+1/n} \geqslant \frac{1}{1+1/n}, \quad \text{puisque} \quad u_{n-1} \leqslant 1.$$

La suite (u_n) est donc encadrée par les suites $(1/(1+1/n))$ et (1), qui tendent toutes deux vers 1. D'après le théorème des gendarmes, $(u_n) \to 1$.

6. On suppose que $u_0 \geqslant 1$. Montrer que $\forall\ n$, $v_n = u_{2\,n} \geqslant 1$. Montrer que

$$v_{n+1} - 1 \leqslant \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,(v_n - 1).$$

En déduire la limite de v_n, puis celle de w_n et de u_n.

$u_0 \geqslant 1$, donc $u_{2\,n} \geqslant 1$ d'après le 2.
Toujours d'après 2,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - 1 &= \frac{(2\,n+1)^2}{(2\,n+1)\,(2\,n+2) + (2\,n+1)\,v_n + 1}\,(v_n - 1) \leqslant \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,(v_n-1) \\ &\leqslant \frac{2\,n+1}{2\,n+3}\,\frac{2\,n-1}{2\,n+1}\cdots\frac{1}{3}\,(v_0-1) = \frac{1}{2\,n+3}\,(v_0-1) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

donc $\lambda = \lim_{n\to\infty} v_n = 1$. $\mu = 1/\lambda$, donc $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$. Comme $\lim_{n\to\infty} u_{2\,n} = \lim_{n\to\infty} u_{2\,n+1}$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

F.

On veut calculer la primitive

$$I(x) = \int^x \frac{1}{t\,(t^2+t+1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Écrire la fraction rationnelle sous la forme

$$\frac{1}{t\,(t^2+t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B\,t+C}{t^2+t+1},$$

où A, B et C sont des constantes réelles à préciser.

$$\frac{A}{t} + \frac{B\,t+C}{t^2+t+1} = \frac{(A+B)\,t^2 + (A+C)\,t + A}{t\,(t^2+t+1)},$$

donc $A = 1$ et $B = C = -1$.

2. Écrire le dernier terme sous la forme

$$\frac{B\,t+C}{t^2+t+1} = D\,\frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)/\mathrm{d}t}{t^2+t+1} + \frac{E}{t^2+t+1},$$

où D et E sont des constantes réelles à préciser.

$$-\frac{t+1}{t^2+t+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,t+1}{t^2+t+1} - \frac{1/2}{t^2+t+1},$$

3. Calculer une primitive de $1/(t^2+t+1)$ à l'aide d'un changement de variable (on rappelle que $\int \mathrm{d}u/(1+u^2) = \arctan u$).

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int^x \frac{4}{3}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(changement de variable } t \mapsto u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\text{)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\!\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right),$$

4. En déduire $I(x)$.

On a

$$\frac{1}{t\,(t^2+t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{2\,t+1}{t^2+t+1} - \frac{1/2}{t^2+t+1},$$

donc

$$\int^x \frac{1}{t\,(t^2+t+1)}\,\mathrm{d}t = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\!\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

G.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ pour $n \geqslant 2$.

1. La série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge-t-elle ?

Oui d'après le théorème de Leibniz.

2. On pose $v_n = \ln(1+u_n)$. La série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge-t-elle ?

On a

$$v_n = u_n - \frac{u_n^2}{2} + O(u_n^3) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\,n} + O\!\left(\frac{1}{n\,\sqrt{n}}\right).$$

$\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après la question précédente.

$\sum_{n\geqslant 2} 1/(n\,\sqrt{n})$ aussi (règle de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$). Si $f_n = O(g_n)$ et que $\sum g_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum f_n$ converge.

En revanche, $\sum_{n\geqslant 2} 1/(2\,n)$ diverge (règle de Riemann avec $\alpha = 1$).

$\sum_{n\geqslant 2} (u_n + O(u_n^3))$ converge et $\sum_{n\geqslant 2} (-u_n^2)/2$ diverge, donc $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ diverge.

H.

On considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\qquad x \longmapsto \frac{1}{x^4-a^4},$$

où a est un réel positif.

1. Donner le domaine de définition de f. Est-elle continue et dérivable sur ce domaine ? Préciser son sens de variation et tracer la fonction.
2. Donner le comportement de f pour x au voisinage de a. La fonction est-elle intégrable sur $[a, 2\,a]$?
3. Décomposez f comme une combinaison linéaire de $1/(x^2-a^2)$ et $1/(x^2+a^2)$.

   En déduire la valeur de $\int_{2\,a}^{3\,a} f(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra décomposer $1/(x^2-a^2)$ en combinaison linéaire de fractions plus simples).

1. Fonction paire, définie, continue et dérivable pour $x \neq \pm a$. La fonction est décroissante pour x positif. Elle tend vers $\pm\infty$ pour $x \to a^{\pm}$.
2. $f(x) \simeq 1/[4\,a^3\,(x-a)]$. La fonction n'est pas intégrable en a.
3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\,a^2}\left(\frac{1}{x^2-a^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right) \\ &= \frac{1}{4\,a^3}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)-\frac{1}{2\,a^2}\,\frac{1}{x^2+a^2} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,a^3}\,[\ln(x-a)-\ln(x+a)] - \frac{1}{2\,a^3}\,\arctan(x/a)$$

Au final,

$$\int_{2\,a}^{3\,a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\,a^3}\,[\ln(3/2)+2\,(\arctan 2-\arctan 3)].$$

I.

On considère les fonctions $f_i\colon\,]0,\infty[\,\to \mathbb{R}$ (avec $i \in [\![1,4]\!]$) suivantes. Peut-on les prolonger en fonctions $g_i\colon [0,\infty[\,\to \mathbb{R}$ continues en 0 ? Si oui, que vaut $g_i(0)$ dans chaque cas ?

1. $f_1(x) = \sqrt{x}\,\sin\!\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
2. $f_2(x) = \dfrac{x^2}{x^3+3\,x^2}$;
3. $f_3(x) = (x^x)^x$;
4. $f_4(x) = x^{(x^x)}$.

Oui pour chacun des i avec $g_1(0) = 0$, $g_2(0) = 1/3$, $g_3(0) = 1$ et $g_4(0) = 0$.