Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2009/2010

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Contrôle continu du 28 octobre 2009

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

Soit la suite de terme général

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n},$$

où $n \geqslant 1$.

1. On pose $u_1 = S_1$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
   Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right).$$

Or

$$\sqrt{n-1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1\right) = \sqrt{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\,n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - 1\right)$$

donc $u_n = O(1/n^{3/2})$ et la série $\sum u_n$ converge.
(On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} + 2\,\frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = -\frac{1}{\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)). \end{aligned}$$

2. La suite S_n converge-t-elle ?

$\sum_{k=1}^{n} u_n = (S_n - S_{n-1}) + \cdots (S_2 - S_1) + u_1 = S_n - S_1 + u_1 = S_n$. $\sum u_n$ converge, donc S_n aussi.

Exercice 2

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum_{n \geqslant 1} 1/n^{\alpha}$ converge.

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}/n^{\alpha}$ converge-t-elle ? Justifier.

Il s'agit d'une série alternée. La série est convergente si la suite $(1/n^{\alpha})$ est décroissante et de limite nulle, c.-à-d.si $\alpha > 0$.

Pour $\alpha \leqslant 0$, $(-1)^{n+1}/n^{\alpha}$ ne tend pas vers 0 : la série n'est donc pas convergente.

3. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, où

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha} + (-1)^n}.$$

a. Faire un développement limité de u_n au premier ordre pour n tendant vers l'infini.

On pose $u_n = (-1)^{n+1}/n^{\alpha} + v_n$. Donner l'expression de v_n.

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha} + (-1)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}\,\frac{1}{1 + (-1)^n/n^{\alpha}} = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}} + v_n$$

avec $v_n = 1/n^{2\,\alpha} + o(1/n^{2\,\alpha})$.

b. Discuter la convergence (simple) de $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, puis celle de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ selon la valeur de α.

$\sum v_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1/2$. $\sum(-1)^{n+1}/n^{\alpha}$ étant convergente ssi $\alpha > 0$, $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1/2$, divergente si $\alpha \in\,]0, 1/2]$. Si $\alpha = 0$, u_n n'est pas définie pour n impair. Si $\alpha < 0$, u_n tend vers -1, donc $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(\mathrm{e}^{a\,x} - 1)},$$

où $x \geqslant 0$ et a est une constante strictement positive (cette fonction intervient dans l'étude du corps noir).

1. Donner le domaine de définition de f. Est-elle continue sur ce domaine ? Préciser son allure (limite et tangente) au voisinage de $x = 0$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3.

f est définie pour $\mathrm{e}^{a\,x} \neq 1$, c.-à-d.pour $x \neq 0$. Son domaine de définition est donc $]0, +\infty[$.
x^3 et $\mathrm{e}^{a\,x} - 1$ sont des fonctions continues sur $]0, +\infty[$, donc leur quotient aussi puisque $\mathrm{e}^{a\,x} - 1 \neq 0$.
Au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + a\,x + a^2\,x^2/2 + o(x^2) - 1} = \frac{x^2/a}{1 + a\,x/2 + o(x)} = \frac{x^2}{a}\cdot\left(1 - \frac{a\,x}{2} + o(x)\right) = \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

On a donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2\,x/a - 3\,x^2/2 + o(x^2)) = 0$ (le développement de f à l'ordre 2 aurait suffi). Quand x tend vers 0, la courbe tend vers l'origine et sa tangente vers l'horizontale.

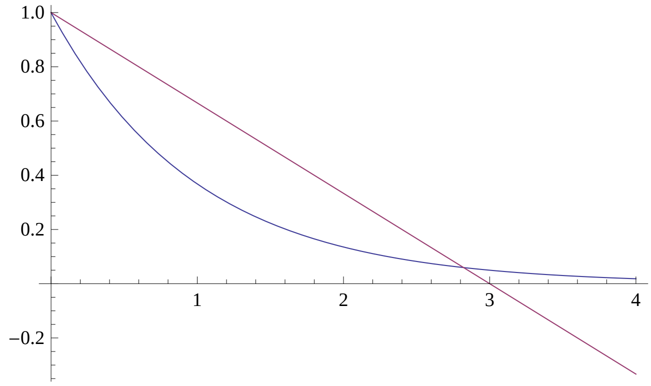
2. Calculer la dérivée de f et établir l'équation à laquelle obéissent le ou les extrémums de f pour $x > 0$ (on ne cherchera pas à la résoudre).

$$f'(x) = \frac{3\,x^2}{(\mathrm{e}^{a\,x} - 1)^2}\cdot\left(\mathrm{e}^{a\,x}\cdot\left(1 - \frac{a\,x}{3}\right) - 1\right).$$

Les extrémums éventuels obéissent à l'équation $\mathrm{e}^{-a\,x} = 1 - a\,x/3$.

3. Montrer, à l'aide d'un graphique représentant $e^{-a x}$ en fonction de x, que le seul extrémum pour $x > 0$ est un point $x_m \in]0, 3/a[$.

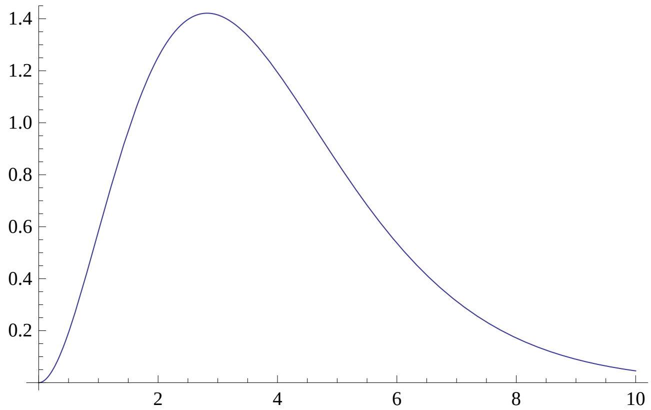
La dérivée de $e^{-a x}$ vaut $-a$ en 0, tandis que celle de $1 - a x/3$ vaut $-a/3$: $e^{-a x}$ décroit donc plus rapidement que $1 - a x/3$ au voisinage de 0. En revanche, $\forall x$, $e^{-a x} > 0$, tandis que $1 - a x/3 \geqslant 0$ pour $x \leqslant 3/a$ et est < 0 pour $x > 3/a$. Les courbes de $e^{-a x}$ et de $1 - a x/3$ se recoupent donc en un point $x_m \in]0, 3/a[$.



Courbes de $e^{-a x}$ et de $1 - a x/3$ en fonction de x pour $a = 1$.

4. Étudier les variations de f et représenter sa courbe.

$f'(x) \geqslant 0$ sur $]0, x_m]$, donc f est croissante sur cet intervalle. Elle décroit ensuite et tend vers 0 en $+\infty$.



Courbe de $f(x)$ en fonction de x pour $a = 1$.

Exercice 4

Soit

$$I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos^n x \, dx.$$

1. On rappelle que

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \text{où} \quad u = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

a. Réécrire I_n en fonction de u.

$$x = 2 \arctan u, \quad \text{donc} \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\, du \quad \text{et} \quad I_n = \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u}{1+u^2} \cdot \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^n du.$$

b. Calculer I_0.

$$I_0 = \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

2. *a.* En intégrant par parties I_n en fonction de u, établir une relation entre I_n et I_{n-1}.

Posons
$$f' = \frac{2\,u}{(1+u^2)^{n+1}} \quad \text{et} \quad g = \left(1-u^2\right)^n.$$
On a
$$f = \frac{-1}{n\cdot(1+u^2)^n} \quad \text{et} \quad g' = -2\,n\,u\cdot\left(1-u^2\right)^{n-1},$$
donc
$$I_n = \left[\frac{-1}{n}\,\frac{\left(1-u^2\right)^n}{(1+u^2)^n}\right]_0^1 - \int_{u=0}^{1} \frac{2\,u\cdot\left(1-u^2\right)^{n-1}}{(1+u^2)^n} = \frac{1}{n} - I_{n-1}.$$

b. En déduire par récurrence que
$$I_n = (-1)^n\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

On peut par exemple le démontrer par récurrence :

On a $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$, donc l'expression est vérifiée à l'ordre 1. Supposons qu'elle l'est à l'ordre $n-1$, c.-à-d.que
$$I_{n-1} = (-1)^{n-1}\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$
Comme $I_n = 1/n - I_n$, on a
$$I_n = \frac{1}{n} - (-1)^{n-1}\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = (-1)^n\cdot\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$
donc l'expression est vérifiée à l'ordre n, et, par récurrence, pour tout entier.

3. **Question hors-barême.**

On admettra que
$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n\int_{x=0}^{1} g_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{où} \quad g_n(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

On décompose cette dernière intégrale de la manière suivante :
$$\int_{x=0}^{1} g_n(x)\,\mathrm{d}x = A_n + B_n, \quad \text{où} \quad A_n = \int_{x=0}^{c_n} g_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad B_n = \int_{x=c_n}^{1} g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad c_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}.$$

a. Montrer que l'intégrale A_n est majorée par $M_n = c_n^{n+1}/(n+1)$.

$$\forall\, x \in [0,1],\ g_n(x) \leqslant x^n, \quad \text{donc} \quad A_n \leqslant \int_0^{c_n} x^n\,\mathrm{d}x = \frac{c_n^{n+1}}{n+1} = M_n.$$

b. Donner, à l'aide d'un développement limité, un équivalent de M_n.

$$c_n^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{3/4}}\right)\right) = \exp\left((n+1)\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^{3/4}}+O\left(\frac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-(n+1)^{1/4}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right).$$

On a donc
$$M_n \simeq \frac{\exp\left(-n^{1/4}\right)}{n}.$$

c. Encadrer $1/(1+x)$ pour $x \in [c_n, 1]$.
En déduire un équivalent de B_n, puis de I_n.

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+c_n},$$

donc
$$\frac{1}{2}\int_{x=c_n}^{1} x^n \, \mathrm{d}x \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{1+c_n}\int_{x=c_n}^{1} x^n \, \mathrm{d}x,$$

d'où
$$\frac{1}{2\cdot(n+1)}\cdot\left(1-c_n^{n+1}\right) \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{(1+c_n)\cdot(n+1)}\cdot\left(1-c_n^{n+1}\right).$$

Or $c_n \to 1$ et $c_n^{n+1} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc
$$B_n \simeq \frac{1}{2\,n}.$$

Par ailleurs, $I_n = A_n + B_n$, avec $0 \leqslant A_n \leqslant M_n$ et $M_n = o(B_n)$, donc
$$I_n \simeq \frac{1}{2\,n}.$$