Contrôle continu du 28 octobre 2009

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

Soit la suite de terme général

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n},$$

où $n \geqslant 1$.

1. On pose $u_1 = S_1$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
   Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.
2. La suite S_n converge-t-elle ?

Exercice 2

1. Rappeler, sans démonstration, les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge.
2. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}/n^\alpha$ converge-t-elle ? Justifier.
3. On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, où

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

   a. Faire un développement limité de u_n au premier ordre pour n tendant vers l'infini.
   On pose $u_n = (-1)^{n+1}/n^\alpha + v_n$. Donner l'expression de v_n.

   b. Discuter la convergence (simple) de $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, puis celle de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ selon la valeur de α.

Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{(e^{a\,x} - 1)},$$

où $x \geqslant 0$ et a est une constante strictement positive (cette fonction intervient dans l'étude du corps noir).

1. Donner le domaine de définition de f. Est-elle continue sur ce domaine ? Préciser son allure (limite et tangente) au voisinage de $x = 0$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 3.
2. Calculer la dérivée de f et établir l'équation à laquelle obéissent le ou les extrémums de f pour $x > 0$ (on ne cherchera pas à la résoudre).
3. Montrer, à l'aide d'un graphique représentant $e^{-a\,x}$ en fonction de x, que le seul extrémum pour $x > 0$ est un point $x_m \in\ ]0,\ 3/a[$.
4. Étudier les variations de f et représenter sa courbe.

Exercice 4

Soit

$$I_n = \int_{x=0}^{\pi/2} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

1. On rappelle que

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \text{où} \quad u = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

   a. Réécrire I_n en fonction de u.
   b. Calculer I_0.

2. *a.* En intégrant par parties I_n en fonction de u, établir une relation entre I_n et I_{n-1}.
   b. En déduire par récurrence que

$$I_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

3. **Question hors-barême.**
   On admettra que

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_{x=0}^{1} g_n(x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{où} \quad g_n(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

   On décompose cette dernière intégrale de la manière suivante :

$$\int_{x=0}^{1} g_n(x) \, \mathrm{d}x = A_n + B_n, \quad \text{où} \quad A_n = \int_{x=0}^{c_n} g_n(x) \, \mathrm{d}x, \quad B_n = \int_{x=c_n}^{1} g_n(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad c_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^{3/4}}.$$

   a. Montrer que l'intégrale A_n est majorée par $M_n = c_n^{n+1}/(n+1)$.
   b. Donner, à l'aide d'un développement limité, un équivalent de M_n.
   c. Encadrer $1/(1+x)$ pour $x \in [c_n,\ 1]$.
   En déduire un équivalent de B_n, puis de I_n.