Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2012/2013

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen de première session

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

I.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$I_n = \int_0^1 \mathrm{d}x\ x^n \sin(\pi\ x).$$

1. Calculer explicitement I_0 et I_1.
2. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n ; en déduire la valeur de I_4.
3. Déterminer le sens d'évolution de la suite (I_n).
4. Obtenir la limite de la suite lorsque $n \to \infty$; on pourra utiliser un majorant simple de $x^n \sin(\pi\ x)$ sur $[0, 1]$.
5. À l'aide de la relation de récurrence trouvée précédemment, trouver un équivalent simple de I_n quand $n \to \infty$.

II.

On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où u_n est la fonction

$$\begin{aligned} u_n \colon [-\pi/2,\ \pi/2] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } n = 0, \\ \sin u_{n-1}(x) & \text{si } n > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Déterminer la parité de la fonction u_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On pourra en conséquence restreindre l'étude de la convergence de (u_n) à l'intervalle $[0, \pi/2]$.)

Soit x fixé dans $[0, \pi/2]$. On considère la suite *numérique* récurrente définie par $u_0(x) = x$ et $u_n(x) = \sin u_{n-1}(x)$, pour cette valeur de x.

2. Établir que $\sin x \leqslant x$. (On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange.)
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \pi/2$.
4. En utilisant les théorèmes du cours concernant les suites récurrentes, montrer que la suite $n \mapsto u_n(x)$ converge lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$.

5. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$, pour tout $x \in [0, \pi/2]$ en justifiant soigneusement.

On cherche maintenant à déterminer si la convergence de la suite *de fonctions* (u_n) est uniforme.

6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est croissante sur $[0, \pi/2]$.
7. En déduire la borne supérieure des $u_n(x)$ sur $[0, \pi/2]$, notée $U_n = \sup_{x\in[0,\, \pi/2]} u_n(x)$.
8. Conclure sur la convergence uniforme de la suite de fonctions u_n sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

III.

1. Donner le développement en série entière de $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. Calculer le rayon de convergence de cette série.
3. Indiquer à quelle(s) condition(s) il est possible de l'intégrer terme à terme.
4. En déduire un développement de la fonction arc tangente sur un intervalle qu'on indiquera.
5. Obtenir une majoration indépendante de x de la valeur absolue du reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\, x^k$, où les $\{c_n\}$ sont les coefficients de la série entière de la fonction arc tangente.
6. En déduire que la série de fonctions définie par cette série entière converge uniformément sur $[-1, 1]$.
7. Obtenir, en évaluant cette série en $x = 1$ et en le justifiant, une formule permettant le calcul approché du nombre π (formule obtenue par Madhava de Sangamagrama vers l'an 1400).
8. Combien de termes de la somme faut-il prendre en compte pour être assurés d'obtenir la valeur correcte des 5 premières décimales de π ? Commenter sur l'efficacité de la méthode. (On considérera que la majoration de l'erreur obtenue par les résultats du cours est la meilleure possible.)

IV.

On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi\colon t \mapsto t - \lfloor t \rfloor\,, \tag{1}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de $t \in \mathbb{R}$ (souvent aussi notée $E(t)$).

1. La fonction ϕ est-elle périodique ? Donner sa période le cas échéant.
2. Tracer la fonction ϕ et indiquer sa parité éventuelle.
3. Calculer le développement en série de Fourier de $\phi(t)$; on utilisera le développement en $\{\exp(2\,\mathrm{i}\,\pi\, n\, t)\}$ et on notera $\{d_n, n \in \mathbb{Z}\}$ les coefficients. On n'oubliera pas de calculer à part le coefficient d_0.
4. Indiquer pour quelles valeurs de t (si elles existent) ϕ coïncide avec son développement en série de Fourier $\tilde{\phi}$. On justifiera soigneusement la réponse.
5. Retrouver la valeur de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *(résultat non utilisé par la suite).*

On considère maintenant l'équation différentielle suivante :

$$f'(t) + a\ f(t) = \phi(t)\,, \tag{2}$$

où $a > 0$ et ϕ est la fonction étudiée précédemment, définie par l'éq. (1).

6. Donner la solution générale de l'équation homogène (c.-à-d. sans second membre).

On veut chercher une solution particulière f_p de l'équation différentielle inhomogène sous la forme d'une série de Fourier :

$$f_\mathrm{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi\,n\,t}.$$

7. Rappeler la relation entre les coefficients de Fourier de f_p et ceux de sa dérivée f_p'.
8. Trouver la relation entre les coefficients $\{c_n\}$ du développement de f_p et les coefficients $\{d_n\}$ du développement de ϕ, en utilisant le fait que f_p est solution de l'équation inhomogène (2).
9. En déduire la solution générale de l'équation (2).
10. Est-elle solution pour toute valeur de t ? Expliquer.
11. On cherche la solution satisfaisant la condition $f(1/2) = 0$. Est-elle unique ? Donner son expression le cas échéant.