Université Pierre et Marie Curie. **Unité d'enseignement LP206.**
Année universitaire 2012/2013 **Mathématiques pour physiciens I**

Examen du 17 juin 2013

Deuxième session

I.

1. *a.* Il faut que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (idem pour g).
   Le sinus est borné et $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, donc $f(0) = 0$.
   b. Au voisinage de 0, $x^3 + 3\,x^2 \simeq 3\,x^2$, donc $g(0) = 1/3$.
2.

$$\left(1 + 3\,n + n^3\right)^{1/3} = n\left(1 + \left[\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]\right)^{1/3} = n\left(1 + \frac{1}{3}\left[\frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right] + O\left[\frac{1}{n^4}\right]\right)$$
$$= n + \frac{1}{n} + \frac{1}{3\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\sqrt{2 + n^2} = n\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = n\left(1 + \frac{1}{n^2} + O\left[\frac{1}{n^4}\right]\right) = n + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\left(1 + 3\,n + n^3\right)^{1/3} - \sqrt{2 + n^2} = \frac{1}{3\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \simeq \frac{1}{3\,n^2}.$$

$$1 - \mathrm{e}^{1/n^2} = 1 - \left(1 + \frac{1}{n^2} + O\left[\frac{1}{n^4}\right]\right) = -\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \simeq -\frac{1}{n^2}.$$

$$\frac{(1 + 3\,n + n^3)^{1/3} - \sqrt{2 + n^2}}{1 - \mathrm{e}^{1/n^2}} \simeq \frac{1/(3\,n^2)}{-1/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{3}.$$

II.

1. $a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \simeq_{n\to\infty} 1/n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\simeq} \frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell = 1.$$

   D'après la règle de d'Alembert, $R = 1/\ell = 1$.
2. Les théorèmes sur les séries entières permmettent d'affirmer que f converge sur $]-1, 1[$ et diverge sur $]-\infty, -1[\,\cup\,]1, \infty[$.
   En $x = 1$, $\sum_{n=1}^{N} (\ln[n+1] - \ln n)\, x^n = \ln(N+1)$: la série diverge.
   En $x = -1$, le théorème de Leibniz s'applique :
   - $\sum (-1)^n\, a_n$ est une série alternée car $a_n > 0$;
   - la suite (a_n) est décroissante ($\ln \nearrow$ et $1 + 1/n \searrow$) ;
   - (a_n) tend vers 0.

   La série entière converge donc en -1.

III.

1. $p > q$, donc

$$\frac{x}{n^p + x^2\, n^q} \simeq \frac{x}{n^p}$$

quand $n \to \infty$. Or $p > 1$ puisque $p + p > p + q > 2$, donc $\sum 1/n^p$ converge. La série $\sum x/n^p$ étant constituée de termes tous de même signe, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement.

2. *a.* f_n est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et continue. Elle est en outre impaire, donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. On a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}f_n(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{n^p - x^2\, n^q}{(n^p + x^2\, n^q)^2}.$$

f_n atteint un maximum en $x^{\max} = n^{(p-q)/2}$. Elle vaut alors $f_n^{\max} = n^{-(p+q)/2}/2$. Elle croît de 0 à $x^{\max}$ et décroît au-delà.

b. Il suffit de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\max}$ converge. Or

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\max} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

avec $\alpha = (p+q)/2 > 1$.

c. Oui, car la convergence normale entraîne la convergence uniforme si l'ensemble d'arrivée des fonctions est complet, ce qui est le cas de $\mathbb{R}$.

IV.

1.

$$\frac{A}{t} + \frac{B\, t + C}{t^2 + t + 1} = \frac{(A+B)\, t^2 + (A+C)\, t + A}{t\, (t^2 + t + 1)},$$

donc $A = 1$ et $A + B = A + C = 0$, d'où $B = C = -1$.

2.

$$D\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 + t + 1) + E = 2\, D\, t + D + E = B\, t + C,$$

donc $D = B/2 = -1/2$ et $D + E = C = -1$, soit $E = -1/2$.

3. On a

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left[t + \frac{1}{2}\right]^2 + 1\right),$$

donc

$$K = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

$$\int^x \frac{1}{t^2 + t + 1}\, \mathrm{d}t = \frac{4}{3} \int^{2\,(x+1/2)/\sqrt{3}} \frac{1}{1 + u^2}\, \mathrm{d}\!\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, u\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\!\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left[x + \frac{1}{2}\right]\right).$$

4. On a

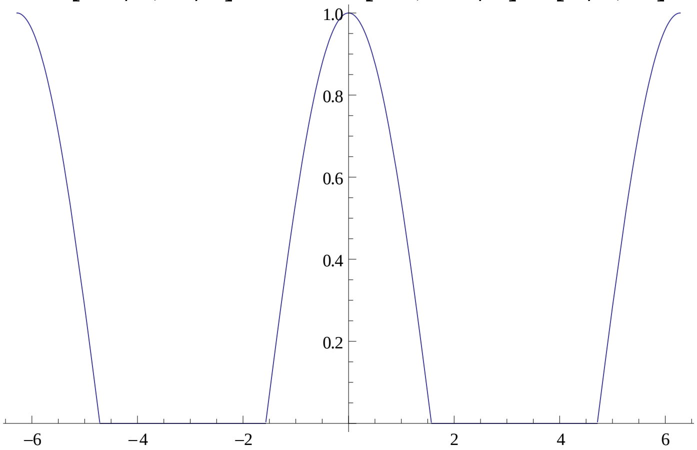
$$\frac{1}{t\, (t^2 + t + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\, \frac{2\, t + 1}{t^2 + t + 1} - \frac{1/2}{t^2 + t + 1},$$

donc

$$\int^x \frac{1}{t\, (t^2 + t + 1)}\, \mathrm{d}t = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + x + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\!\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left[x + \frac{1}{2}\right]\right).$$

V.

1. La fonction f est $2\,\pi$-périodique et paire.
   Elle vaut $\cos x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et 0 sur $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$.



2. La fonction étant paire, les b_n sont nuls.
   Pour $n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

Pour $n = 1$,

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\,x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\,x)}{2} \right]_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Pour $n > 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x\ \cos(n\ x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos[(n+1)\ x] + \cos[(n-1)\ x] \big)\ \mathrm{d}x,$$

donc

$$a_n = \frac{1}{\pi\ (n+1)} \sin \frac{(n+1)\ \pi}{2} + \frac{1}{\pi\ (n-1)} \sin \frac{(n-1)\ \pi}{2}.$$

Les coefficients a_n sont nuls pour n impair.
Pour n pair, posons $n = 2\,p$. On obtient

$$a_{2\,p} = (-1)^p \left(\frac{1}{\pi\ [2\,p+1]} - \frac{1}{\pi\ [2\,p-1]} \right) = -\frac{2\ (-1)^p}{\pi\ (4\,p^2 - 1)}.$$

3. *a.* f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet s'applique donc et on a $f = \widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. En évaluant l'égalité $f(x) = \widetilde{f}(x)$ en $x = 0$, on trouve

$$1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\ (-1)^p}{\pi\ (4\,p^2 - 1)}.$$

   On en déduit que

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4\,p^2 - 1} = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

4. *a*. Théorème de Parseval : pour toute fonction $2\,\pi$-périodique de carré sommable,

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\left|f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

b. On a (cf. calcul de a_1)

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\left|f(x)\right|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(4\,p^2-1)^2},$$

soit

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(4\,p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$