Examen du 17 juin 2013

Deuxième session

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Toute réponse doit être justifiée.

I.

1. Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x > 0$ par les expressions ci-dessous. Quelles valeurs attribuer à $f(0)$ et $g(0)$ pour que f et g soient continues en $x = 0$?
   a. $f(x) = \sqrt{x}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
   b. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 3\,x^2}$.
2. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + 3\,n + n^3\right)^{1/3} - \sqrt{2 + n^2}}{1 - \mathrm{e}^{1/n^2}}.$$

II.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\ln[n+1] - \ln n\Big)\, x^n.$$
2. Cette série converge-t-elle en $\pm R$?

III.

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, avec $p > q$ et $p + q > 2$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définies par
$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{x}{n^p + x^2\, n^q}.$$

1. La série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?

2. *a.* Étudier f_n et établir son tableau de variation.
   b. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   c. La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

IV.

On veut calculer la primitive

$$I(x) = \int^x \frac{1}{t\ (t^2 + t + 1)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Écrire la fraction rationnelle sous la forme
$$\frac{1}{t\ (t^2+t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B\ t + C}{t^2+t+1},$$
où A, B et C sont des constantes réelles que l'on déterminera par identification.
2. Écrire le dernier terme sous la forme
$$\frac{B\ t + C}{t^2+t+1} = D\ \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{E}{t^2+t+1},$$
où D et E sont des constantes réelles à préciser.
3. En écrivant le trinôme $t^2 + t + 1$ sous la forme $K\ (1 + u^2)$, où K est une constante, calculer une primitive de $1/(t^2 + t + 1)$. (On rappelle que $\int \mathrm{d}u/(1 + u^2) = \arctan u$.)
4. En déduire $I(x)$.

V.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \max(0, \cos x).$$

1. Indiquer la période et la parité éventuelles de f. Représenter cette fonction sur l'intervalle $[-2\ \pi, 2\ \pi]$.
2. Calculer les coefficients du développement en série de Fourier trigonométrique de f (c'est-à-dire les a_n et b_n). On distinguera les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n > 1$.
   Vérifier que, pour tout $p \geqslant 1$, on a
$$a_{2\,p} = \frac{2\ (-1)^{p+1}}{\pi\ (4\ p^2 - 1)}.$$
3. *a.* En quels points f coïncide-t-elle avec son développement en série de Fourier $\widetilde{f}$?
   b. En déduire la limite de la série
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4\ p^2 - 1}.$$
4. *a.* Rappeler l'expression de l'égalité de Parseval (en termes des a_n et b_n), en précisant ses conditions d'applicabilité.
   b. En déduire la limite de la série
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4\ p^2 - 1)^2}.$$