

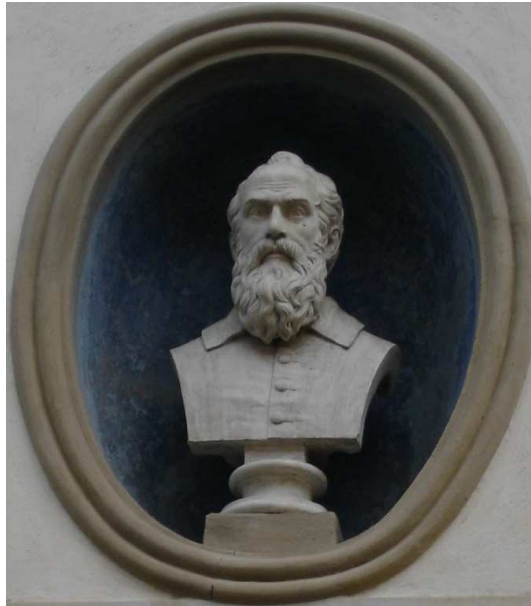
# Mathématiques pour physiciens I

LP206, année 2012/2013

Notes de cours

*Michel Fioc    Dan Israël    Jesper Lykke Jacobsen*

<http://www2.iap.fr/users/fioc/enseignement/LP206/>



« Nul ne peut lire le grand livre de l'Univers s'il n'en connaît la langue, qui est la langue mathématique. » (Galilée) <sup>※1</sup>

---

1. La citation complète est la suivante : « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur. » (Galilée, *Il Saggiatore*, Rome 1623.)

# Préface

Ces notes de cours reprennent largement celles rédigées par nos collègues Claude Aslangul et Jean-Bernard Zuber. Nous les remercions vivement de les avoir mises à notre disposition.

*Michel Fioc    Dan Israël    Jesper Lykke Jacobsen*

# Table des matières

<b>I. Généralités</b>	<b>6</b>
A. Logique, ensembles	6
1. Connecteurs logiques	6
<i>a.</i> Définitions	6
<i>b.</i> Propriétés	7
2. Quantificateurs	8
<i>a.</i> Définitions	8
<i>b.</i> Propriétés	8
3. Ensembles	9
<i>a.</i> Définitions	9
<i>b.</i> Propriétés	10
B. Ensembles de nombres	10
1. Notations	10
2. Intervalles	10
3. Droite réelle achevée	11
4. Nombres complexes	11
5. Représentation cartésienne	11
6. Représentation polaire	12
7. Racines d'un nombre complexe	13
8. Polynômes dans $\mathbb{C}$	13
C. Notions de topologie	13
D. Structures algébriques	16
E. Norme	17
<b>II. Suites</b>	<b>19</b>
A. Introduction	19
B. Limite d'une suite	20
1. Définitions	20
2. Calcul numérique des limites	21
3. Propriétés	21
C. Critères de convergence pour une suite de réels	22
D. Étude asymptotique	23
E. Suites récurrentes	25
F. Suites de Cauchy	26
1. Construction de $\mathbb{R}$ (notions)	26
2. Construction de $\overline{\mathbb{R}}$ (notions)	27
<b>III. Séries</b>	<b>28</b>
A. Introduction	28
1. Modification de la série	29
2. Divergence grossière	29
B. Séries à termes positifs	30
C. Convergence absolue, semi-convergence	32
1. Convergence commutative	32
2. Produit de Cauchy	33
D. Séries alternées. Théorème d'Abel	34

<b>IV. Fonctions</b>	<b>36</b>
A. Généralités . . . . .	36
B. Limite d'une fonction . . . . .	38
1. Définitions . . . . .	38
2. Propriétés des limites . . . . .	40
3. Encadrement . . . . .	41
C. Continuité d'une fonction . . . . .	41
D. Dérivation d'une fonction . . . . .	42
E. Formes indéterminées . . . . .	45
F. Fonctions élémentaires . . . . .	48
1. Fonctions trigonométriques . . . . .	48
2. Fonctions trigonométriques réciproques . . . . .	48
3. Fonctions exponentielles et logarithmes . . . . .	48
4. Fonctions hyperboliques . . . . .	49
G. Développements limités et asymptotiques . . . . .	49
1. Développements de Taylor . . . . .	50
2. Développements limités en 0 de fonctions classiques . . . . .	50
3. Opérations sur les développements limités . . . . .	50
4. Développements limités en $a \neq 0$ ou asymptotiques à l'infini . . . . .	51
Annexe 1. Identités trigonométriques . . . . .	51
A. Décalage de l'argument . . . . .	52
B. Formules d'addition . . . . .	52
C. Formules de doublement . . . . .	52
Annexe 2. Dérivées des fonctions élémentaires . . . . .	53
<b>V. Intégrales</b>	<b>54</b>
A. Intégrale de Riemann . . . . .	54
B. Propriétés de l'intégrale définie . . . . .	55
Inégalité de (Cauchy-)Schwarz . . . . .	56
C. Méthodes d'intégration . . . . .	56
1. Intégration par parties . . . . .	56
2. Changement de variable . . . . .	57
3. Changement de variable pour une intégrale multiple . . . . .	58
D. Intégrales impropres . . . . .	59
1. Intégrales impropres avec une singularité sur un intervalle fini . . . . .	61
Singularité logarithmique . . . . .	62
2. Intégrales impropres avec intervalle d'intégration infini . . . . .	62
<b>VI. Suites et séries de fonctions</b>	<b>64</b>
A. Suites de fonctions . . . . .	64
1. Convergence simple, convergence uniforme . . . . .	64
2. Intersersion d'opérations . . . . .	66
B. Séries de fonctions . . . . .	67
C. Séries entières . . . . .	68
1. Convergence d'une série entière . . . . .	68
2. Séries de Taylor . . . . .	69
3. Séries entières usuelles . . . . .	70
<b>VII. Séries de Fourier</b>	<b>71</b>
A. Préambule sur les fonctions périodiques . . . . .	71
B. Séries trigonométriques . . . . .	72
C. Développement en série de Fourier . . . . .	73
1. Distances sur un espace de fonctions . . . . .	73
2. Fonction $2\pi$ -périodique . . . . .	74
3. Fonction $T$ -périodique . . . . .	75
4. Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier . . . . .	76
D. Convergence en moyenne quadratique . . . . .	77
E. Convergence ponctuelle . . . . .	78
1. Théorèmes de convergence . . . . .	78
2. Phénomène de Gibbs . . . . .	80
F. Analyse d'un système périodique avec une bande passante finie . . . . .	80

Annexe 1. Espaces préhilbertiens . . . . .	81
Annexe 2. Espaces hermitiens et euclidiens . . . . .	83
Annexe 3. Espaces de Hilbert . . . . .	84
<b>VIII. Équations différentielles</b>	<b>86</b>
A. Généralités sur les équations différentielles . . . . .	86
1. Définitions . . . . .	86
2. Systèmes d'équations différentielles . . . . .	86
B. Conditions initiales. Théorème de Cauchy. Conditions aux limites . . . . .	87
1. Existence et unicité des solutions . . . . .	87
2. Conditions initiales et conditions aux bords . . . . .	88
C. Équations différentielles linéaires . . . . .	89
1. Propriétés générales . . . . .	89
2. Équations linéaires homogènes, équations linéaires inhomogènes . . . . .	89
a. Indépendance linéaire de $n$ fonctions . . . . .	89
b. Théorèmes . . . . .	90
3. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients variables . . . . .	91
a. Équation homogène . . . . .	91
b. Équation inhomogène . . . . .	91
4. Équations linéaires homogènes à coefficients constants . . . . .	92
a. Résolution de l'équation homogène . . . . .	92
b. Équation du second ordre à coefficients constants . . . . .	92
5. Équations linéaires inhomogènes à coefficients constants . . . . .	93
a. Second membre constant . . . . .	93
b. Second membre périodique . . . . .	93
i. Découplage des modes de Fourier . . . . .	93
ii. Filtre R-C . . . . .	95
$\alpha$ . Signal d'entrée en créneaux : solution particulière pour $\omega \gg \omega_0$ . . . . .	95
$\beta$ . Signal d'entrée en créneaux : solution générale . . . . .	96
D. Systèmes d'équations différentielles linéaires . . . . .	97
E. Autres méthodes de résolution d'équations différentielles . . . . .	99
1. Intégrales premières . . . . .	99
2. Équations à variables séparées . . . . .	100
3. Changement de variable . . . . .	101
4. Changement de la fonction inconnue . . . . .	101
5. Résolution d'une équation différentielle par une série entière . . . . .	101
<b>IX. Dynamique des systèmes linéaires</b>	<b>103</b>
A. Généralités sur les systèmes linéaires. L'oscillateur harmonique . . . . .	103
1. Équations différentielles linéaires. . . . .	103
2. Oscillateur harmonique . . . . .	103
B. Amortissement . . . . .	105
1. Frottement fluide . . . . .	105
2. Oscillateur harmonique amorti . . . . .	105
3. Bilan d'énergie, facteur de qualité . . . . .	107
a. Bilan d'énergie . . . . .	107
b. Facteur de qualité . . . . .	107
C. Oscillateur excité par une source périodique . . . . .	108
1. Solution particulière . . . . .	108
2. Résonance . . . . .	109
D. Susceptibilité . . . . .	109
E. Oscillateurs couplés . . . . .	111
1. Cas de deux oscillateurs couplés . . . . .	111
2. Modes propres . . . . .	113
3. Chaîne de boules et de ressorts . . . . .	113