Chapitre II

Suites

II.a. Introduction

Définition 21 (suite)

Une suite est une fonction (cf. déf. 35) u de $\mathbb{N}$ dans un ensemble E. ⌟

Notation

Pour mettre en évidence le fait que l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$, on note u_n (terme d'indice n) l'élément $u(n)$. La suite elle-même est notée $n \mapsto u_n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n), voire, de manière abusive, u_n tout court. ⌟

Remarque

On rencontre fréquemment des suites dont l'indice n_0 du premier terme n'est pas 0. On pourra noter une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z},\, n\geqslant n_0}$, $(u_n)_{n\geqslant n_0}$, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $n_0 = 1$.

Un simple décalage d'indice, $n \mapsto n' = n - n_0$, permet de construire une suite conforme à la définition, $(u'_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$, de terme général $u'_{n'} \coloneqq u_{n'+n_0}$. ⌟

Une suite peut être définie par l'expression explicite de son *terme général* u_n en fonction de n. Elle peut également l'être par une *relation de récurrence* du genre $u_n = f(u_{n-p}, \ldots, u_{n-1})$, complétée par la donnée des p premiers termes pour permettre de « démarrer » la récurrence.

Exemple 5

Suites données explicitement :

1. $u_n = a\, r^n$ (suite géométrique de raison r) ;
2. $u_n = \sin(n\, \pi/3)$;
3. $u_n = 1/n^2$. ⌟

Exemple 6

Suites données par une récurrence à un terme :

1. $u_{n+1} = u_n + r$ (suite arithmétique de raison r) ;
2. $u_{n+1} = r\, u_n$ (suite géométrique de raison r) ;
3. $u_{n+1} = a\, u_n\, (1 - u_n)$ (application logistique). ⌟

Exemple 7

Suite donnée par une récurrence à deux termes : la *suite de Fibonacci*,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \tag{1}$$

avec les conditions initiales $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$. Explicitement,

$$(u_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots). \tag{2}$$

Cette suite donne, entre autres, le nombre de spirales concentriques observées dans certains végétaux (marguerites, ananas, pommes de pin…). ⌟

En physique, les suites peuvent apparaître dans des contextes variés :

- Approximations de taille croissante (nombre de particules, dimensions géométriques, …) d'un système ;

- Résolution numérique par itération d'une équation algébrique ; les u_n sont les approximations successives d'une racine d'un polynôme, par exemple (méthode de Newton…) ;
- Résolution numérique par itération d'une équation différentielle ; les u_n décrivent par exemple les positions successives à des intervalles de temps réguliers, etc.

Dans tous ces cas, on souhaite savoir si la suite a une limite quand l'indice n tend vers l'infini et quelle est cette limite.

II.B. Limite d'une suite

II.B.1. Définitions

Le fait qu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ signifie intuitivement que *tous* les u_n sont arbitrairement près de ℓ (mais non nécessairement confondus avec ℓ) dès que n est suffisamment grand.

Définition 22 (limite d'une suite : définition générale)
Soient (E, d) un espace métrique, A une partie de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite *converge* dans (E, d) s'il existe un élément ℓ de E, appelé « limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans (E, d) », tel que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon. \tag{3}$$

On note ceci $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend ou converge vers ℓ (dans (E, d)). ⌟

Remarques
- La proposition (3) se lit mot à mot ainsi : « pour tout ϵ *strictement positif* (aussi petit qu'on veut), il existe un nombre N (dépendant a priori de ϵ) tel que pour tout n plus grand que N, la distance entre u_n et ℓ est inférieure à ϵ ». Pour démontrer, à l'aide de la définition, qu'une suite converge, il suffit donc de trouver une expression de $N(\epsilon)$, valable pour tout $\epsilon > 0$, satisfaisant la propriété $n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon$.
- Dans les expressions telles que $\forall\, \epsilon > 0$ ou $\exists\, \eta > 0$, ϵ et η seront supposés réels. Il serait plus correct, mais plus lourd, d'écrire $\forall\, \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\exists\, \eta \in \mathbb{R}^{+*}$.
- n étant manifestement un entier, on écrit souvent « $\forall\, n \geqslant N,\ d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon$ » au lieu de « $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon$ ».
- $u_n \to \ell$ dans (E, d) équivaut à $d(u_n, \ell) \to 0$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. ⌟

Théorème 3
Toute suite convergente dans (E, d) est bornée dans (E, d). ⌟

Définition 23 (limite dans un espace vectoriel normé)
Si E est un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, on remplace « $d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon$ » par « $\|u_n - \ell\| \leqslant \epsilon$ » dans la définition générale. ⌟

Théorème 4
Si E est l'espace vectoriel normé $\mathbb{K}^p$, la suite $n \mapsto u_n = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,p}) \in \mathbb{K}^p$ converge vers la limite $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ si et seulement si les suites $n \mapsto (u_{n,j}) \in \mathbb{K}$ convergent pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ vers ℓ_j pour la norme $|\cdot|$. ⌟

Définition 24 (limite finie dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Si $E = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ ou $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, on remplace « $d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon$ » par « $|u_n - \ell| \leqslant \epsilon$ » dans la définition générale. ⌟

Comme $\ell \in E$ et que $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ceci ne permet d'exprimer la convergence que vers une limite *finie*.

Exemple 8
La suite $n \mapsto u_n = 1/n^2$ tend vers zéro. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, posons $N = \mathrm{E}(1/\sqrt{\epsilon}) + 1$, où « E » désigne la partie entière. En mettant $\ell = 0$, on a bien $|u_n - \ell| = 1/n^2 \leqslant 1/N^2 \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. ⌟

Théorème 5
Si $E = \mathbb{C}$,

$$u_n \to \ell \Longleftrightarrow \operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell \text{ et } \operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell.$$ ⌟

Définition 25 (convergence par valeurs supérieures ou inférieures)
Si (u_n) est une suite de réels, on dit que (u_n) converge vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures), ce qu'on note $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell^+$ (resp. $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell^-$), si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \epsilon \text{ (resp. } \ell - \epsilon \leqslant u_n \leqslant \ell).$$

Une suite peut ne pas converger, soit qu'elle ait un comportement oscillant, telle $n \mapsto \sin(n\,\pi/3)$, soit qu'elle tende vers l'infini, comme $n \mapsto \sqrt{n}$, soit qu'elle combine ces deux comportements, comme $n \mapsto \tan(n\,\pi/4 + 1/n)$. Pour définir une limite vers $+\infty$ ou $-\infty$ d'une suite de réels, on peut se placer dans $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$. En pratique, il est plus commode d'utiliser la définition équivalente suivante :

Définition 26 (limite infinie)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall\ M \in \mathbb{R},\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant M \text{ (resp. } u_n \leqslant M).$$

Remarques

- Ces définitions sont équivalentes à la définition générale dans $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$. Pour une limite égale à $+\infty$, par exemple,

$$(\forall\ M \in \mathbb{R}, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant M) \Longleftrightarrow (\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \bar{d}(u_n, +\infty) \leqslant \epsilon).$$

  Montrons la condition nécessaire. Il suffit de prouver que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ M(\epsilon) \in \mathbb{R},\ u_n \geqslant M \Longrightarrow \bar{d}(u_n, +\infty) \leqslant \epsilon.$$

  Prenons $M(\epsilon) = 1/\epsilon$. Comme $M > 0$ et $u_n \geqslant M$, on a $|u_n| = u_n \geqslant 0$. On obtient bien

$$\bar{d}(u_n, +\infty) = \left|\frac{u_n}{|u_n| + 1} - 1\right| = \frac{1}{u_n + 1} \leqslant \frac{1}{M} = \epsilon.$$

- Bien que la notation soit la même que pour une limite finie, on évitera de dire qu'une suite de réels tendant vers $\pm\infty$ « converge » (tout court), car l'espace dans lequel on se place implicitement est $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Elle converge en revanche dans $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$.
  On appliquera indifféremment les termes de « divergence » et de « non-convergence » au cas où il n'y a pas de limite et au cas où la limite existe mais est infinie. (Certains auteurs réservent le terme de « divergence » à ce dernier cas.)

II.B.2. Calcul numérique des limites

L'usage d'une calculatrice permet souvent de deviner le comportement d'une suite, notamment récurrente, ainsi que son éventuelle limite. Si les résultats obtenus ainsi peuvent aider à étudier rigoureusement sa convergence (il est plus facile de démontrer qu'une suite converge quand on sait vers quoi elle peut tendre !), ils n'ont cependant pas valeur de preuve. Dans certains cas, cette méthode peut d'ailleurs conduire à des résultats incorrects en raison des erreurs d'arrondi.

Exemple 9
Soit la suite définie par $u_{n+1} = 100\,u_n - 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1/11$. On vérifie immédiatement que la suite est constante ($\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1/11$), tandis que le résultat fourni par une calculatrice diverge après un certain nombre d'itérations.

II.B.3. Propriétés

Théorème 6 (unicité de la limite)
Si une suite (u_n) admet une limite dans un espace métrique (E, d), cette limite est unique.

Preuve
Supposons qu'il existe une autre limite, ℓ'.

$$\forall\ \epsilon > 0,\ (\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon) \text{ et } (\exists\ N' \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N' \Longrightarrow d(u_n, \ell') \leqslant \epsilon),$$

donc

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N'' = \max\{N, N'\},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N'' \Longrightarrow d(u_n, \ell) + d(u_n, \ell') \leqslant 2\,\epsilon.$$

Or $d(\ell, \ell') \leqslant d(u_n, \ell) + d(u_n, \ell')$, donc $\forall\ \epsilon > 0$, $d(\ell, \ell') \leqslant 2\,\epsilon$, c.-à-d. $d(\ell, \ell') = 0$, soit $\ell' = \ell$.

Théorème 7 (limites finies)
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de E, de limites (finies) ℓ et ℓ' dans $(E, \|\cdot\|)$ quand $n \to \infty$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a les propriétés suivantes :

$$\lambda\ u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\ \ell\ ; \tag{4a}$$
$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell + \ell'\ ; \tag{4b}$$
$$\text{si } E = \mathbb{K},\quad u_n\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\ \ell'\ ; \tag{4c}$$
$$\text{si } E = \mathbb{K} \text{ et } \ell \neq 0,\quad \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\ell}\ ; \tag{4d}$$
$$\text{si } E = \mathbb{R} \text{ et } \ell = 0^+ \ \text{ (resp. } 0^-\text{)},\quad \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}. \tag{4e}$$

⌟

Théorème 8 (limites infinies)
Si $E = \mathbb{R}$, les propriétés énoncées pour les limites finies sont encore valables si ℓ ou $\ell' = \pm\infty$ dans les cas où les opérations sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$ (cf. déf. 2).
Si $\ell = +\infty$, $1/u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$; si $\ell = -\infty$, $1/u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$. ⌟

Les expressions du genre « $0 \times \infty$ », « $\infty - \infty$ », « $0/0$ », « ∞/∞ » sont en revanche des formes indéterminées et doivent être étudiées au cas par cas.

Théorème 9 (composition des limites)
Soient E et F des espaces métriques, $f : E \to F$ une application, (u_n) une suite d'éléments de E et (v_n) une suite d'éléments de F telle que $v_n = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $\ell := \lim_{n\to\infty} u_n$ existe (finie ou infinie) et si $\lim_{x\to\ell} f(x)$ existe (finie ou infinie), alors

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{x\to\ell} f(x)$$

(il s'agit d'une limite de suite à gauche et d'une limite de fonction à droite ; cf. déf. 40). ⌟

Ceci vaut en particulier si f est continue au voisinage de ℓ.

II.c. Critères de convergence pour une suite de réels

Plaçons-nous dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition 27
Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F si $\forall\ x \in F$, $x \leqslant M$.
- $M \in \mathbb{R}$ est un minorant de F si $\forall\ x \in F$, $M \leqslant x$.
- S'il existe, le plus petit majorant de F s'appelle la borne supérieure de F ($\sup F$).
- S'il existe, le plus grand minorant de F s'appelle la borne inférieure de F ($\inf F$). ⌟

Théorème 10
Une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée. ⌟

Théorème 11

- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure. ⌟

Remarque
Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$: l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Elle n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^p$ puisque ces ensembles ne sont pas bien ordonnés (c.-à-d. qu'on ne peut pas y définir de relation d'ordre satisfaisante). ⌟

Théorème 12

Si une suite de réels (u_n) est *croissante* et *majorée* (resp. décroissante et minorée) par un réel M à partir d'un certain rang (c.-à-d. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant M$ (resp. $M \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$)), elle converge vers une limite finie $\ell \leqslant M$ (resp. $\ell \geqslant M$). ⌟

Preuve

L'ensemble majoré des nombres réels (u_n) admet une borne supérieure $B \leqslant M$, qui est le plus petit nombre tel que $u_n \leqslant B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ u_N \geqslant B - \epsilon$ (sans quoi B ne serait pas le plus petit majorant), et, par hypothèse de monotonicité, $\forall\ n \geqslant N,\ |u_n - B| = B - u_n \leqslant B - u_N \leqslant \epsilon$, donc $u_n \to \ell = B$. ⌟

Exemple 10

$u_n = 2^{1-1/n}$. On a $u_{n-1} < u_n < 2$. La suite converge vers une limite (qui est 2). ⌟

Théorème 13

Inversement, si une suite monotone croissante (resp. décroissante) de réels n'admet pas de majorant (resp. minorant), elle tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). ⌟

Théorème 14 (passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels admettant une limite (finie ou infinie).

Si $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. ⌟

Attention, ce résultat est faux avec des inégalités strictes : $(\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n) \not\Longrightarrow \lim u_n < \lim v_n$.

Théorème 15 (théorème des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n), (w_n) des suites de réels.

Si $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si les suites (v_n) et (w_n) tendent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, (u_n) converge aussi vers ℓ. ⌟

Exemple 11

Quelles sont les limites de $n \mapsto \sin(\sqrt{2}\ n)/n^2$ et de $n \mapsto 1/(n^2 + \sin(n\ \pi/4))$? ⌟

Théorème 16 (suites adjacentes)

Si, à partir d'un certain rang n_0, (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, et si $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune ℓ, et $\forall\ n \geqslant n_0,\ \forall\ p \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_p$. ⌟

Théorème 17 (règles de Cauchy et d'Alembert)

Soit une suite $(u_n) > 0$.

- Si $u_n^{1/n} \to k \in [0, 1[$, $u_n \to 0$ (règle de Cauchy).
- Si $u_{n+1}/u_n \to k \in \mathbb{R}$, $u_n^{1/n} \to k$; par application de la règle de Cauchy, si $k \in [0, 1[$, $u_n \to 0$ (règle de d'Alembert). ⌟

II.D. Étude asymptotique

Définition 28 (notations de Landau)

Soient (u_n) et (v_n) des suites d'éléments appartenant respectivement à des espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ et définies pour tout n entier.

- $u_n = o(v_n)$ (se dit « u_n est un petit "o" de v_n » ou « u_n est négligeable devant v_n ») au voisinage de l'infini si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \|u_n\|_E \leqslant \epsilon\ \|v_n\|_F.$$
- $u_n = O(v_n)$ (se dit « u_n est un grand "o" de v_n » ou « u_n est dominée par v_n ») au voisinage de l'infini si
$$\exists\ M > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow \|u_n\|_E \leqslant M\ \|v_n\|_F.$$
- Si $E = F$, on dit que $u_n \simeq v_n$ (se dit « u_n est asymptotiquement égale (ou "équivalente") à v_n ») au voisinage de l'infini si $u_n - v_n = o(v_n)$. ⌟

Remarques

- Les notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ sont abusives : en effet,
$$(u_n = o(v_n) \text{ et } w_n = o(v_n)) \not\Longrightarrow u_n = w_n.$$

On note parfois plus correctement $u_n \in o(v_n)$ et $u_n \in O(v_n)$, mais ceci oblige à écrire $u_n - v_n \in o(w_n)$ plutôt que $u_n = v_n + o(w_n)$, ce qui est malcommode.

- On note parfois $u_n = \varepsilon(v_n)$ au lieu de $u_n = o(v_n)$.
  Les notations de Hardy, $u_n \lll v_n$ et $u_n \preccurlyeq v_n$, sont parfois utilisées au lieu de $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$.
- L'équivalence entre suites est notée ici $\simeq$, conformément à la norme ISO 31-11 ; la notation $\sim$ est souvent utilisée. ⌟

Théorème 18
Si $E = F = \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang (c.-à-d. pour tout n plus grand qu'un certain entier),

$$u_n = o(v_n) \iff \lim(u_n/v_n) = 0,$$

$$u_n = O(v_n) \iff \text{le rapport } |u_n/v_n| \text{ est majoré}$$

et

$$u_n \simeq v_n \iff \lim(u_n/v_n) = 1.$$ ⌟

Théorème 19
$\simeq$ est une relation d'équivalence :

- $u_n \simeq u_n$ (réflexivité) ;
- $u_n \simeq v_n \Longrightarrow v_n \simeq u_n$ (symétrie) ;
- $u_n \simeq v_n$ et $v_n \simeq w_n \Longrightarrow u_n \simeq w_n$ (transitivité). ⌟

Théorème 20
Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (z_n) des suites et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

- Pour des suites (u_n) et (v_n) dans un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda\, u_n + \mu\, v_n = o(w_n)$;
- Pour des suites dans $\mathbb{K}$, si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(z_n)$, alors $u_n\, v_n = o(w_n\, z_n)$;
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, ou si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Ces règles restent valables si l'on remplace o par O. ⌟

Théorème 21

- Si $u_n \simeq v_n \in E$ et si $v_n \to \ell \in E$ (limite finie), alors $u_n \to \ell$.
- Si $u_n \simeq v_n \in \mathbb{R}$ et si $v_n \to \ell = \pm\infty$, alors $u_n \to \ell$.
- Si $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \to \ell \in F$ (limite finie), alors $u_n \to 0$ (le 0 de E).
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \to \ell \in F$ (limite finie), alors (u_n) est bornée.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \to 0$, $u_n \to 0$. ⌟

Théorème 22

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, si $u_n \simeq v_n$, alors $\lambda\, u_n \simeq \lambda\, v_n$;
- Si $u_n \simeq w_n$ et $v_n \simeq z_n$, alors $u_n\, v_n \simeq w_n\, z_n$;
- Si (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang et si $un \simeq v_n$, alors $1/u_n \simeq v_n$. ⌟

Remarques
Ne pas additionner ou soustraire d'équivalents :

$$(u_n \simeq w_n \text{ et } v_n \simeq z_n) \not\Longrightarrow u_n + v_n \simeq w_n + z_n.$$

De même, pour des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$$u_n \simeq v_n \not\Longrightarrow \mathrm{e}^{u_n} \simeq \mathrm{e}^{v_n},$$

sauf si $\lim(u_n - v_n) = 0$.
Si $\lim v_n$ existe et est différente de 1,

$$u_n \simeq v_n \Longrightarrow \ln u_n \simeq \ln v_n,$$

mais ce n'est pas toujours vrai sinon.
Dans tous ces cas, il est préférable de faire appel aux « o » et « O ». ⌟

Exemple 12

La suite $n \mapsto v_n = 1/n^2$ converge vers 0 ; la suite $n \mapsto u_n = 1/(n^2 + \sin(n\,\pi/4))$ est asymptotiquement égale à (v_n) (pourquoi ?), donc converge aussi vers 0. Noter que la suite $n \mapsto u_n = 2^{1-1/n}$ relève aussi de ce cas : elle est équivalente à la suite constante $n \mapsto v_n = 2$. ⌟

Exemple 13

Un autre exemple important est $u_n = (1 + a/n)^n$, qui tend vers e^a. En effet, pour n grand, $u_n = \mathrm{e}^{n\,\ln(1+a/n)} \simeq \mathrm{e}^a$ en développant le logarithme au premier ordre. ⌟

Les notations de Landau serviront notamment pour les séries et les développements limités.

II.e. Suites récurrentes

Théorème 23 (points fixes)

Soit $f : \subset \mathbb{R}^p \to \subset \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite obéissant à la relation de récurrence $u_n = f(u_{n-p}, \ldots, u_{n-1})$.

Si (u_n) admet une limite ℓ et si f est continue (cf. déf. 46) au point $(\ell, \ldots, \ell)$, alors $\ell = f(\ell, \ldots, \ell)$. On dit que ℓ est un *point fixe* de f. ⌟

Exemple 14

La suite définie par $v_n = u_n/u_{n-1}$, où (u_n) est la suite de Fibonacci (2), satisfait $v_n = 1 + 1/v_{n-1}$. Son éventuelle limite est donc l'une des racines de l'équation $x^2 = x + 1$, soit $x' = (1 + \sqrt{5})/2$ ou $x'' = (1 - \sqrt{5})/2$, et ce ne peut être que celle des deux qui est positive, soit x' ※[1]. Il reste à démontrer qu'effectivement $v_n \to v = x'$. ⌟

Noter que pour une suite définie par $u_n = f(u_{n-p}, \ldots, u_{n-1})$, l'existence d'une racine de l'équation $\ell = f(\ell, \ldots, \ell)$ ne garantit en rien la convergence de u_n vers ℓ. C'était le cas ci-dessus pour la deuxième racine, x''.

Exemple 15 (suite arithmético-géométrique)

La recherche de points fixes peut être utile même lorsque la suite ne converge pas. Considérons la suite définie par $u_{n+1} = a\,u_n + b$ (avec $a \neq 1$). Un point fixe est défini par $\ell = a\,\ell + b$, soit $\ell = b/(1-a)$. La suite $(v_n := u_n - \ell)$ est une suite géométrique de raison a (on a $v_{n+1} = a\,v_n$), donc si $|a| \leqslant 1$, $v_n \to 0$, soit $u_n \to \ell$.

Si $|a| \geqslant 1$, (v_n) est une suite divergente, donc (u_n) aussi. L'expression $u_n = a^n\,(u_0 - \ell) + \ell$ reste néanmoins vraie et permet de calculer directement n'importe quel terme de la suite, sans utiliser la relation de récurrence. ⌟

Pour une suite définie par une récurrence à un terme, la méthode suivante permet souvent de déterminer son sens de variation, ce qui est utile pour étudier sa convergence si on sait qu'elle est bornée.

Méthode d'analyse d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est monotone

Soient f une application monotone sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, de premier terme $u_0 \in I$, obéissant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

- **Cas où f est croissante.**
  - Si $u_1 \geqslant u_0$, (u_n) est croissante.

    Montrons ceci par récurrence. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \leqslant u_{n+1}$.

    $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n \text{ et } f \text{ croissante}) \Longrightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \text{ (propriété } \mathcal{P}_{n+1}).$$

    Comme $\mathcal{P}_0$ est vraie, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - Si $u_1 \leqslant u_0$, (u_n) est décroissante (même raisonnement).
- **Cas où f est décroissante.**

  $f \circ f$ est alors croissante. En effet,

  $$x \leqslant y \Longrightarrow f(y) \leqslant f(x) \Longrightarrow f(f[x]) \leqslant f(f[y]).$$

  On revient donc au cas précédent en considérant séparément les suites $(v_n := u_{2\,n})$ et $(w_n := u_{2\,n+1})$: (v_n) est croissante si $u_0\ (= v_0) \leqslant u_2\ (= v_1)$ et décroissante sinon ; (w_n) est croissante si $u_1\ (= w_0) \leqslant u_3\ (= w_1)$ et décroissante sinon.

Remarquer également que si f est croissante, que M est un point fixe de f et que $u_0 \leqslant M$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant f(M) = M$. Une récurrence immédiate montre que (u_n) est majorée par M. ⌟

1. Le nombre x', le fameux « nombre d'or », était déjà connu des Grecs pour ses propriétés remarquables, notamment en architecture.

II.F. Suites de Cauchy

Définition 29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d).
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* dans (E, d) si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ (n \geqslant N \text{ et } m \geqslant N) \Longrightarrow d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon. \tag{5}$$

Remarque

Les définitions et théorèmes énoncés dans cette section pour un espace métrique s'appliquent a fortiori au cas d'un espace vectoriel normé en prenant la distance associée à la norme.

Théorème 24

Toute suite convergeant dans (E, d) est une suite de Cauchy dans (E, d).

Preuve

Si (u_n) converge vers ℓ, on a

$$\forall\ \epsilon' > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geqslant N,\ \forall\ m \geqslant N,\ d(u_n, \ell) \leqslant \epsilon' \text{ et } d(u_m, \ell) \leqslant \epsilon'.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(u_n, u_m) \leqslant d(u_n, \ell) + d(\ell, u_m) \leqslant 2\ \epsilon'.$$

Il suffit donc de prendre $\epsilon' = \epsilon/2$.

En particulier, si (u_n) converge, $d(u_n, u_{n+1})$ peut être rendue aussi petite qu'on veut : c'est une condition *nécessaire* de convergence. Si elle est satisfaite, nous ne sommes pas sûrs que la suite converge. Mais si elle n'est pas satisfaite, nous sommes sûrs que la suite (u_n) ne converge pas !

Théorème 25

Si $d(u_n, u_{n+1})$ ne tend pas vers zéro, la suite (u_n) ne converge pas.

L'utilisation de la condition (3) pour prouver la convergence d'une suite suppose que la limite ℓ de celle-ci est connue. Dans certains espaces, toute suite de Cauchy est convergente, ce qui permet de nous affranchir de cette contrainte.

Définition 30 (espace complet)

Un espace métrique (E, d) est dit complet ※[2] si et seulement si toute suite de Cauchy dans (E, d) converge dans (E, d).

Théorème 26

Les espaces vectoriels normés $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{K}^p$ sont complets pour toute norme, de même que tout espace vectoriel normé de dimension finie sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ils sont complets pour toute *norme*, mais pas forcément pour les *distances* qui ne sont pas associées à une norme (par exemple $\overline{d}$).

En revanche, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas complet : la suite définie par $u_{n+1} = 1 + 1/(1 + u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$ est une suite de Cauchy de rationnels. Elle ne converge toutefois pas dans $\mathbb{Q}$, puisque sa limite dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}$, un nombre irrationnel.

II.F.1. Construction de $\mathbb{R}$ (notions)

Les suites de Cauchy permettent justement de définir l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. On dit que deux suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ pour la norme $|\cdot|$, (u_n) et (v_n), sont équivalentes, ce que l'on note $(u_n)\ \mathcal{R}\ (v_n)$, si $\lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$ ※[3], c.-à-d. si $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. La relation $\mathcal{R}$ est ce qu'on appelle une relation d'équivalence. La classe d'équivalence $\underline{(u_n)}$ de (u_n) est l'ensemble des suites équivalentes à (u_n). L'ensemble de ces classes d'équivalence constitue $\mathbb{R}$.

2. Un espace vectoriel normé complet est aussi appelé *espace de Banach*.
3. Il faut prendre ϵ dans $\mathbb{Q}$ dans la définition 22.

À titre d'exemple, la classe d'équivalence de $\sqrt{2}$ contient entre autres la suite $(u_0 = 1, \ldots, u_{n+1} = 1 + 1/(1 + u_n), \ldots)$ et la suite $(v_0 = 1,\ v_1 = 1{,}4,\ v_2 = 1{,}41,\ v_3 = 1{,}414, \ldots)$ définie par le développement décimal de $\sqrt{2}$.

Tout rationnel q peut être associé à la classe d'équivalence de la suite constante $(u_n = q)_{n\in\mathbb{N}}$; $\mathbb{Q}$ est ainsi identifié au sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par ces classes d'équivalence.

Les opérations définies sur $\mathbb{Q}$ sont prolongeables à $\mathbb{R}$: par exemple, pour toutes suites $(u'_n) \in \overline{(u_n)}$ et $(v'_n) \in \overline{(v_n)}$, $(u'_n) + (v'_n) \in \overline{(u_n + v_n)}$; le résultat ne dépendant pas des représentants (u'_n) et (v'_n) des classes $\overline{(u_n)}$ et $\overline{(v_n)}$, on peut définir l'addition dans $\mathbb{R}$ par $\overline{(u_n)} + \overline{(v_n)} \coloneqq \overline{(u_n + v_n)}$.

II.F.2. Construction de $\overline{\mathbb{R}}$ (notions)

On peut construire $\overline{\mathbb{R}}$ de la même manière : on définit une relation d'équivalence $\overline{\mathcal{R}}$ entre des suites de réels (u_n) et (v_n) par $(u_n)\,\overline{\mathcal{R}}\,(v_n) \iff \lim \overline{d}(u_n, v_n) = 0$; $\overline{\mathbb{R}}$ est alors l'ensemble des classes d'équivalence de suites de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \overline{d})$. Les éléments $+\infty$ et $-\infty$ correspondent aux classes de suites telles que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{1+|u_n|} - 1\right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{1+|u_n|} + 1\right| = 0,$$

respectivement.