Chapitre IV

Fonctions

IV.a. Généralités

En termes vagues, une fonction f associe à tout élément x d'un ensemble A *au plus un* élément $f(x)$ d'un ensemble B. Plus formellement, on définit une fonction comme ceci :

Définition 35 (fonction)
Une fonction f de A dans B est un triplet (A, B, G), où A et B sont des ensembles et G est une partie de $A \times B$, tel que
$$\forall\ (x, y) \in G, \forall\ (x', y') \in G, \quad x = x' \Longrightarrow y = y'.$$
Les ensembles A, B et G sont respectivement appelés *ensemble de départ*, *ensemble d'arrivée* et *graphe* de f.

L'ensemble
$$\{x \in A \mid \exists\ y \in B, (x, y) \in G\}$$
s'appelle l'*ensemble de définition* (ou le *domaine de définition*) de f et sera noté $\operatorname{dom} f$.

On appelle *image* de $x \in A$ tout élément y de B tel que $(x, y) \in G$. Tout $x \in A$ a au plus une image, notée $f(x)$ si elle existe : une si $x \in \operatorname{dom} f$, aucune si $x \in A \setminus \operatorname{dom} f$. On note $f(A') := \{f(x) \mid x \in A' \cap \operatorname{dom} f\}$ l'image d'un ensemble $A' \subset A$.

Tout x tel que $y = f(x)$ est un *antécédent* de y. On note $f^{\langle -1 \rangle}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y ; pour un ensemble $B' \subset B$, $f^{\langle -1 \rangle}(B') := \{f^{\langle -1 \rangle}(\{y\}) \mid y \in B'\}$. Si l'antécédent de y existe et est unique, on peut le noter $f^{\langle -1 \rangle}(y)$. ⌟

Remarques

- On utilisera la notation
$$f \colon A \longrightarrow B, \quad x \longmapsto \text{expression}(x)$$
ou $f \colon x \in A \mapsto \text{expression}(x) \in B$ pour définir une fonction f de A dans B dont la valeur en x est expression(x), ou $f \colon A \to B$ si on ne s'intéresse qu'aux ensembles de départ et d'arrivée. Inversement, pour indiquer, sans les préciser, que les ensembles de départ et d'arrivée sont inclus dans des ensembles E et F, nous écrirons $f \colon \subset E \to \subset F$, par exemple $f \colon \subset \mathbb{R} \to \subset \mathbb{R}$ pour une fonction [à valeur] réelle d'une variable réelle. Pour faire référence à une fonction déjà définie, on écrira simplement « f ».

  Bien souvent, les ensembles de départ et d'arrivée seront implicitement $\mathbb{R}$. On pourra alors se contenter d'écrire $f \colon x \mapsto \text{expression}(x)$, voire $x \mapsto \text{expression}(x)$ si on ne veut pas donner de nom à la fonction. Même s'il nous arrivera de dire abusivement « la fonction $f(x) = \text{expression}(x)$ », attention à distinguer la fonction, f, de sa valeur en x, $f(x)$.
- Une fonction est donc le plus souvent définie par un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et, au lieu d'un graphe, par une procédure ou expression (une « formule » typiquement, ou plusieurs formules entre lesquelles on choisit selon la valeur de x) permettant de calculer $f(x)$ à partir de x. Une fonction ne se réduit cependant pas à une formule : une même formule appliquée à des ensembles de départ ou d'arrivée différents définit des fonctions différentes ; et même si elles ont le même graphe, elles n'ont pas nécessairement les mêmes propriétés et doivent être notées différemment.

  Par exemple,
$$f \colon [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1], \quad x \longmapsto \sin x,$$
  est bijective, mais pas
$$g \colon [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sin x.$$

L'appellation « sinus » et la notation « sin » sont donc génériques : le sinus est bien défini pour tout nombre complexe, mais il n'y a pas de fonction « sinus » tout court : il y a les fonctions f, g, $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C} \mapsto \sin x \in \mathbb{C}$, etc. Il est donc nécessaire de préciser les ensembles de départ et d'arrivée dès qu'il y a ambiguïté.

- Pour une fonction définie par une formule, l'ensemble de définition est l'ensemble des points de l'ensemble de départ pour lesquels la formule a un sens dans l'ensemble d'arrivée.

  Une fonction est *définie en un point* x si $x \in \operatorname{dom} f$; elle est *définie sur un ensemble* H si $H \subset \operatorname{dom} f$ (ce qui ne veut pas dire que $H = \operatorname{dom} f$) : bien distinguer « *un* ensemble où f est définie » de « *l*'ensemble de définition de f ».

- On note souvent en physique de la même manière une quantité et la fonction permettant de la calculer à partir de certaines variables, par exemple $U = U(S, V, n)$ au lieu de $U = f(S, V, n)$, où U est l'énergie interne, S l'entropie, V le volume et n le nombre de moles. Si S est une fonction de la température T, de V et de n, on notera encore $U = U(T, V, n)$ au lieu de $U = g(T, V, n)$, bien qu'il ne s'agisse pas de la même fonction. Cette notation est acceptable tant que les variables sont apparentes. En revanche, si x est la valeur de S ou T, il faut écrire $U(S = x, V, n)$ pour $f(x, V, n)$ et $U(T = x, V, n)$ pour $g(x, V, n)$, non $U(x, V, n)$.

  De même pour une dérivée partielle de U, l'expression $\partial U/\partial V$ est ambiguë et peut désigner soit $\partial f/\partial V$, soit $\partial g/\partial V$. Pour les distinguer, on met les autres variables en indice : $(\partial U/\partial V)_{S,\, n}$ pour $\partial f/\partial V$ et $(\partial U/\partial V)_{T,\, n}$ pour $\partial g/\partial V$.

  Prenons un autre exemple en mécanique : le vecteur position $\vec{r}$ d'un point M peut être exprimé en fonction de l'abscisse curviligne s le long de la trajectoire, $\vec{r} = \vec{f}(s)$, ou en fonction du temps t, $\vec{r} = \vec{f}(g[t])$ si $s = g(t)$. On écrit souvent
$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
  au lieu de
$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}(g[t])}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}s}(s[t])\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t).$$
⌟

Définition 36 (application)
Une *application* est une fonction qui associe à chaque élément de l'ensemble de départ *une et une seule* image dans l'ensemble d'arrivée. ⌟

Remarques
D'après la définition 35, une fonction associe *au plus* une image à tout élément de l'ensemble de départ.

Pour certains auteurs, une « fonction » (*partial function* en anglais) est en fait une application (*total function* ou simplement *function* en anglais). Même si l'étude d'une fonction hors de son domaine de définition n'a pas de sens, cette identification oblige à connaître le domaine de définition d'une fonction avant même sa définition…

D'autres écrivent « $f\colon A \to B$ » pour indiquer que $A \subset \operatorname{dom} f$ et non que A est l'ensemble de départ, ce qui est source de confusion quand on s'intéresse aux valeurs de f hors de A (par exemple pour calculer la limite de f en un point de l'adhérence de A). Nous utiliserons la notation $f \in \mathcal{F}(A, B)$ pour une fonction f telle que $A \subset \operatorname{dom} f$ et $f(A) \subset B$. ⌟

Définition 37 (bijection, fonction réciproque)
Une fonction $f\colon A \to B$ est *bijective* (ou *inversible*) si $\forall\, y \in B$, $\exists!\, x \in A$, $f(x) = y$. f admet alors une fonction *réciproque*※[1], $f^{\langle -1\rangle}\colon B \to A$, définie par $f^{\langle -1\rangle}(y) = x$ si $f(x) = y$.

Une application bijective est appelée une *bijection*. ⌟

Théorème 44
Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.
Si f est strictement monotone, elle est inversible. ⌟

1. L'appellation *fonction inverse* et la notation f^{-1}, toutes deux usuelles, sont naturelles en algèbre linéaire. En effet, si f et g sont deux applications linéaires et Φ et Γ les matrices associées, la matrice correspondant à la *composition* $f \circ g$ est le *produit* matriciel $\Phi \times \Gamma$. En particulier, la matrice associée à la réciproque de f, si elle existe, est Φ^{-1} (inverse matriciel de Φ).

   Nous éviterons cependant cette appellation et cette notation dans ce cours en raison du risque de confusion avec la fonction $1/f\colon x \mapsto 1/f(x)$. En particulier, par cohérence avec la notation traditionnelle $\sin^2 x := (\sin x)^2 \neq \sin(\sin x)$, on ne notera pas $\sin^{-1}$ l'application réciproque de $x \in [-\pi/2, \pi/2] \mapsto \sin x \in [-1, 1]$, mais arcsin ; de même pour les autres fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques (avec « arg » au lieu de « arc » pour ces dernières : argsh, etc.).

Définition 38 (restriction)
Soient f une application de A dans B et H une partie de A. On appelle *restriction* de f à H et on note $f|_H$ l'application

$$\begin{aligned} f|_H \colon H &\longrightarrow B, \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

⌟

La restriction d'une fonction à son domaine de définition en fait ainsi une application. Chaque fois que l'on demande d'étudier les limites, la continuité ou la dérivabilité d'une fonction, on sous-entend l'étude de l'application obtenue en restreignant la fonction à son domaine de définition. Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ est bien continue, car elle est continue sur $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^*$.

Définition 39 (prolongement)
Soient f une application de A dans B et g une application de H dans B. g est un prolongement de f à H si et seulement si $A \subset H$ et $\forall\, x \in A,\ g(x) = f(x)$. ⌟

g est évidemment un prolongement de $g|_A$.

IV.B. Limite d'une fonction

IV.B.1. Définitions

La définition suivante généralise celle déjà donnée pour une suite.

Définition 40 (limite [pointée] d'une fonction : définition générale)
Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, A une partie de E, B une partie de F et f une application de A dans B.

f converge dans (F, δ) en un point a de $\operatorname{adh}_{(E,\, d)} A$ s'il existe un élément $\ell \in F$, appelé « limite de f en a dans (F, δ) », tel que

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in A,\ d(a, x) \leqslant \eta \Longrightarrow \delta(f[x], \ell) \leqslant \epsilon. \tag{1}$$

On note ceci $\lim_a f = \ell$, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. ⌟

Remarques

- Les inégalités larges dans $d(a, x) \leqslant \eta$ et $\delta(f[x], \ell) \leqslant \epsilon$ peuvent être remplacées par des inégalités strictes. En revanche, les inégalités dans $\forall\, \epsilon > 0$ et $\exists\, \eta > 0$ doivent être strictes.
- Il n'est pas nécessaire que f soit définie en a : il faut seulement que a appartienne à l'adhérence $\operatorname{adh} A$ d'une partie A sur laquelle f est définie. Par exemple, bien que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ ne soit pas définie en 0, sa limite en 0 existe ($\lim_{x \to 0}(\sin x/x) = 1$).
  En revanche, si $a \in A$ et que f admet une limite finie en a, on a nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La limite est unique, mais elle dépend de l'ensemble de départ de l'application. ⌟

Exemple 27
Soit l'application

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

On a $0 \in \operatorname{adh} \mathbb{Q} = \operatorname{adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. La limite de f en 0 n'est pas définie et

$$\lim_0 f|_{\mathbb{Q}} = 0 \neq \lim_0 f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = 1.$$

f, $f|_{\mathbb{Q}}$ et $f|_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ sont des applications différentes. ⌟

Définition 41

- La *limite épointée* est

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} f(x) := \lim_{x \to a} f|_H(x),$$

  où $H = A \setminus \{a\}$. Cette limite est qualifiée d'« épointée » par opposition à la limite, parfois dite « pointée », de la définition 40.

- Si $A \subset \mathbb{R}$, la *limite à gauche* en a est
$$\lim_{x \to a,\ x<a} f(x) := \lim_{x \to a} f|_H(x),$$
où $H = A \cap]-\infty, a[$. Elle est aussi notée $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $f(a^-)$.
- Si $A \subset \mathbb{R}$, la *limite à droite* en a est
$$\lim_{x \to a,\ x>a} f(x) := \lim_{x \to a} f|_H(x),$$
où $H = A \cap]a, +\infty[$. Elle est aussi notée $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $f(a^+)$.

Comme on doit avoir $a \in \operatorname{adh} H$, les limites épointées, à gauche et à droite, ne peuvent être définies si a est un point isolé de A. Par exemple, si $A = \{0\} \cup]1, +\infty[$, $a = 0$ et $H = A \setminus \{a\} =]1, +\infty[$, alors $a \notin \operatorname{adh} H = [1, +\infty[$ et $\lim_{x \to 0,\ x \neq 0}$ ne peut être définie.

- Si $B \subset \mathbb{R}$, on dit que f converge vers ℓ *par valeurs supérieures* en a, ce que l'on note $\lim_a f = \ell^+$, si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ d(x, a) \leqslant \eta \Longrightarrow \ell \leqslant f(x) \leqslant \ell + \epsilon.$$
- Si $B \subset \mathbb{R}$, on dit que f converge vers ℓ *par valeurs inférieures* en a, ce que l'on note $\lim_a f = \ell^-$, si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ d(x, a) \leqslant \eta \Longrightarrow \ell - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
⌟

Dans le cas où E et F sont des espaces vectoriels normés, la définition générale prend la forme suivante :

Définition 42

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, A une partie de E, B une partie de F et f une application de A dans B.

f admet une limite $\ell \in F$ en un point a de $\operatorname{adh}_{(E,\ \|\cdot\|_E)} A$ si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \epsilon. \tag{2}$$
⌟

Le cas que nous rencontrerons le plus souvent est celui où $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. Réécrivons donc la définition générale dans le cas où E et F sont l'espace vectoriel $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ou l'espace métrique $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$. Outre le cas d'une limite finie en un point à distance finie, application directe de la définition générale, on peut définir des limites infinies ou à l'infini.

Définition 43 (limite finie en un point à distance finie)

Soient A et B des parties de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans B.

f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en un point a de $\operatorname{adh}_{(\mathbb{R},\ |\cdot|)} A$ (donc à distance finie) si
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon. \tag{3}$$
⌟

Exemple 28

La fonction $x \mapsto x^2$ a pour limite 4 quand $x \to 2$. En effet, $|x^2 - 4| = \big|(x-2)\ (x+2)\big|$, qui est inférieur à $5\ |x - 2|$ dès que $|x + 2| \leqslant 5$ (comme $x \to 2$, il suffit de prendre x tel que $|x - 2| \leqslant 1$) : $5\ |x - 2|$ peut donc être rendu aussi petit que l'on veut quand $x \to 2$. ⌟

Exemple 29

$x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$ *n'a pas* de limite quand $x \to 0$: $f(x)$ oscille de plus en plus vite entre -1 et 1. ⌟

Définition 44 (limite infinie en un point à distance finie)

Soient A et B des parties de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans B.

- f tend vers $+\infty$ en un point a de $\operatorname{adh}_{(\mathbb{R},\ |\cdot|)} A$ si
$$\forall\ M \in \mathbb{R},\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ |a - x| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant M. \tag{4}$$
On note ceci $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
- f tend vers $-\infty$ en un point a de $\operatorname{adh}_{(\mathbb{R},\ |\cdot|)} A$ si
$$\forall\ M \in \mathbb{R},\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ |a - x| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M. \tag{5}$$
⌟

Exemple 30

La fonction tangente est définie dans les intervalles ouverts $](2\,n-1)\,\pi/2, (2\,n+1)\,\pi/2[$; $\tan x \to +\infty$ quand $x \to (2\,n+1)\,\pi/2$ par valeurs inférieures ; $\tan x \to -\infty$ quand $x \to (2\,n+1)\,\pi/2$ par valeurs supérieures. ⌟

Définition 45 (limite finie en un point à l'infini)

Soient A une partie non majorée de $\mathbb{R}$, B une partie de R et f une application de A dans B.
f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ X \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in A,\ x \geqslant X \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon. \tag{6}$$

On note ceci $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. ⌟

Remarque. La condition « A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$ » équivaut à $+\infty \in \mathrm{adh}_{(\overline{\mathbb{R}},\ \bar{d})} A$.

Exercice

Définir de manière analogue les limites suivantes :

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. ⌟

Exemple 31

Nous avons $\lim_{x\to\infty}(2 + \mathrm{e}^{-x}) = 2$, tandis que $\lim_{x\to-\infty}(2 + \mathrm{e}^{-x}) = +\infty$. ⌟

IV.B.2. Propriétés des limites

Théorème 45 (limites finies)

Soient (E, d) un espace métrique, $(F, \|\cdot\|)$ un K-espace vectoriel normé, $A \subset E$, $B \subset F$ et $a \in \mathrm{adh}_{(E,\ d)} A$; soient également f et g deux applications de A dans B, de limites (finies) ℓ et ℓ' dans $(F, \|\cdot\|)$ quand $x \to a$, et $\lambda \in K$.

On a les propriétés suivantes :

$$\lambda\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda\ \ell\ ; \tag{7a}$$

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + \ell'\ ; \tag{7b}$$

$$\text{si } F = \mathbb{K},\quad f(x)\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ \ell'\ ; \tag{7c}$$

$$\text{si } F = \mathbb{K} \text{ et } \ell \neq 0,\quad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{\ell}\ ; \tag{7d}$$

$$\text{si } F = \mathbb{R} \text{ et } \ell = 0^+ \text{ (resp. } 0^-),\quad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \text{ (resp. } -\infty). \tag{7e}$$

⌟

Théorème 46 (limites infinies)

Si $F = \mathbb{R}$, les propriétés énoncées pour les limites finies sont encore valables si ℓ ou $\ell' = \pm\infty$ dans les cas où les opérations sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$ (cf. déf. 2). ⌟

Ces propriétés ne permettent pas de couvrir tous les cas et on rencontre parfois une « forme indéterminée » (voir section IV.E). Par exemple,

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{x+1} + \sin\left(\frac{\pi\ x}{2}\right)\right) = 1, \tag{8a}$$

$$\lim_{x\to1}\left(\sqrt{x+1}\ \tan\left(\frac{\pi\ x}{2}\right)\right) = \infty, \tag{8b}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x}}{\tan(\pi\ x/2)}\right) = \frac{0}{0}\ ??? \tag{8c}$$

IV.B.3. Encadrement

Théorème 47 (« théorème des gendarmes »)

Soient f, g et h des applications de A dans $B \subset \mathbb{R}$ telles que $\forall\ x \in A$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et $a \in \mathrm{adh}\, A$. Si g et h ont la même limite (finie ou infine) quand $x \to a$, alors f a aussi cette limite en a. ⌟

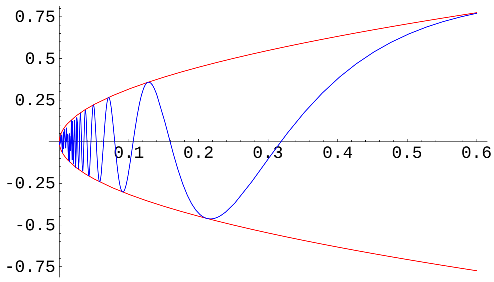

Figure IV.1. La fonction $\sqrt{x}\,\sin(1/x)$, encadrée par les fonctions $\pm\sqrt{x}$, tend vers 0 quand $x \to 0$.

Exemple 32

Soit $f(x) = \sqrt{x}\,\sin(1/x)$, $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in]0, 1]$. Le théorème nous dit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Voir figure IV.1. ⌟

Exemple 33

De même pour $x > 0$, $f(x) = \sin x/x$, $g(x) = -1/x$, $h(x) = 1/x$. Le théorème nous dit que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. ⌟

IV.c. Continuité d'une fonction

Définition 46 (continuité)

Soient E et F des espaces métriques et $f\colon A \subset E \to B \subset F$ une application.
f est *continue* en $a \in A$ si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Elle est continue sur A si elle l'est en chaque point a de A. ⌟

Exemple 34

Les fonctions usuelles, puissances, polynômes, trigonométriques, exponentielle, logarithme, etc., sont continues en tout point de leur ensemble de définition. ⌟

Définition 47 (continuité à droite, à gauche)

Soit $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset F$ une application.
f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) en $a \in A$ si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$). ⌟

Remarques

Une fonction continue à droite et à gauche en a est continue en a.
Bien distinguer « continuité à droite *en* a » et « continuité à droite *de* a ». ⌟

Exemple 35

La *partie entière* est l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\longmapsto \mathrm{E}(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$. La partie entière de x est également notée $\lfloor x \rfloor$. La fonction partie entière a une limite en tout point non entier et y est continue, mais est *discontinue* en tout point entier. En effet, si $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to n^-} \mathrm{E}(x) = n - 1$, mais $\lim_{x\to n^+} \mathrm{E}(x) = n$. La fonction E est continue à droite et discontinue à gauche. ⌟

Remarque

La continuité en un point dépend de l'ensemble de départ : la fonction $\mathrm{E}\,|_{[0,\,2[}$ n'est pas continue en 1, mais les fonctions $\mathrm{E}\,|_{[0,\,1[}$ et $\mathrm{E}\,|_{[1,\,2[}$ le sont. Sauf si A et H sont des ouverts,

$$f|_A \text{ continue et } f|_H \text{ continue} \not\Rightarrow f|_{A\cup H} \text{ continue.}$$ ⌟

Exemple 36

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en 0 mais ne l'est nulle part ailleurs. ⌟

Théorème-définition 2 (prolongement par continuité)
Soit $f\colon A \subset E \to B \subset F$ une application continue sur A et H une partie de E telle que $A \subset H \subset \operatorname{adh} A$.
Si $\forall\, x \in H \setminus A$, f admet une limite en x dans F, alors la fonction

$$g\colon H \longrightarrow F,\qquad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A,\\ \lim_{\xi\to x} f(\xi) & \text{si } x \in H \setminus A\end{cases}$$

est continue sur H. On l'appelle le *prolongement par continuité* à H de f. ⌟

Exemple 37
La fonction $f\colon x \mapsto \sin x/x$ est définie et continue sur $A = \mathbb{R}^*$. Sa limite en 0 est finie et vaut 1. La fonction

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\qquad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0,\\ 1 & \text{si } x = 0\end{cases}$$

est donc le prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}$. ⌟

Théorème 48 (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue.
Si I est un intervalle, $f(I)$ est un intervalle.
Si I est un intervalle fermé, $f(I)$ est un intervalle fermé. ⌟

Si I est un intervalle fermé $[a, b]$, le maximum et le minimum de f sont atteints : $f([a, b]) = [c, d]$, où $c := \min_{[a,\,b]} f$ et $d := \max_{[a,\,b]} f$. Donc, pour tout $y \in [c, d]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Théorème 49
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
Alors l'application

$$g\colon I \longrightarrow f(I),\qquad x \longmapsto f(x)$$

est bijective et sa réciproque $g^{\langle -1\rangle}$ est continue, strictement monotone et de même sens de variation que f. ⌟

IV.D. Dérivation d'une fonction

Définition 48 (Dérivée d'une fonction d'une variable réelle)
Soient F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset F$ une application et $a \in A$ un point d'accumulation de A. f est dite *dérivable* en a si et seulement si

$$\lim_{x\to a,\ x\neq a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{9}$$

existe dans F.
Cette limite est appelée *dérivée (première)* de f en a et est notée $f'(a)$ ou

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}.$$

La fonction $f'\colon x \in A \mapsto f'(x) \in F$ est appelée *fonction dérivée* ou simplement *dérivée* de f. ⌟

Remarques

- Par commodité, on écrit souvent et abusivement des expressions telles que $\sin x$ au lieu de $x \mapsto \sin x$. Il est donc assez naturel d'utiliser la notation $(\sin x)'$ au lieu de $(x \mapsto \sin x)'$ pour désigner la fonction dérivée de $x \mapsto \sin x$, voire sa valeur en x, $(\mathrm{d}\sin t/\mathrm{d}t)(t = x)$. Pour une fonction admettant un symbole usuel, p. ex. sin, il est plus correct d'écrire sa dérivée $\sin' x$, mais attention : $(\sin(2\,x))' = (x \mapsto \sin(2\,x))' = 2\cos(2\,x)$ tandis que $\sin'(2\,x) = (\mathrm{d}\sin t/\mathrm{d}t)(t = 2\,x) = \cos(2\,x)$.

  S'il y a plusieurs variables, le symbole « ′ » désigne traditionnellement la dérivation par rapport à la variable x : on a ainsi $(\sin(a\,x))' = a\cos(a\,x)$. S'il n'y a pas de x dans l'expression, il y a ambiguïté : par exemple, les symboles a et t désignant généralement une constante et une variable respectivement, on peut supposer que $(\sin a)' = 0$ et $(\sin t)' = \cos t$, mais il vaudrait mieux écrire $(x \mapsto \sin a)'$ et $(t \mapsto \sin t)'$.

  Ne jamais écrire $(\sin 0)' = \cos 0$, car $\sin 0$ est un nombre, pas une fonction, donc $(\sin 0)' = 0$. En revanche, on a bien $\sin' 0 = (\sin x)'(x = 0) = \cos 0$.

- La limite doit être dans F. On ne dira donc pas que f est dérivable en a si la limite du taux d'accroissement $(f(x) - f(a))/(x - a)$ est $\pm\infty$.
- Si f est une fonction vectorielle de A dans $\mathbb{R}^p$, c.-à-d. si $f = (f_1, \ldots, f_p)$, où les f_i sont des fonctions de A dans $\mathbb{R}$, f est dérivable si et seulement si f_i est dérivable pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On a alors $f' = (f_1', \ldots, f_p')$.

  De même, si f est à valeurs complexes, $f' = (\operatorname{Re} f)' + \mathrm{i}\,(\operatorname{Im} f)'$.
- Comme $x - a \to 0$ quand $x \to a$, il est nécessaire (mais non suffisant) que $f(x) \to f(a)$ pour que la dérivée existe, c.-à-d. que f soit continue en a.
- La dérivabilité en un point dépend de l'ensemble de départ : la fonction

  $$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

  n'est pas dérivable en $x = 0$, mais $f|_{\mathbb{R}^+}$ et $f|_{\mathbb{R}^-}$ le sont.

  Remarquer que[2]

  $$f|_A \text{ dérivable et } f|_H \text{ dérivable} \not\Longrightarrow f|_{A\cup H} \text{ dérivable.}$$

  L'implication est en toutefois vraie si A et H sont des ouverts, raison pour laquelle on définit souvent la dérivée en un point appartenant à un ouvert inclus dans $\operatorname{dom} f$. La formulation plus génerale que nous avons adoptée nous permet de dériver aux bornes d'un intervalle fermé, ce dont nous aurons besoin pour définir les fonctions C^k par morceaux.
- Comme on peut diviser par un nombre complexe, cette définition est généralisable au cas d'une fonction d'une variable complexe : si A est un ouvert de $\mathbb{C}$, $f\colon A \to B \subset F$ une application de A et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé F, la dérivée de f en un point $z_0 \in A$ est le nombre

  $$\lim_{z\to z_0,\, z\neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

  si cette limite existe dans $\mathbb{C}$.

  Cette définition est bien plus contraignante que dans le cas d'une variable réelle : il faut que la limite existe et soit la même quelle que soit la direction du plan complexe selon laquelle z se rapproche de z_0. En contrepartie, si f' existe sur un ouvert de $\mathbb{C}$, f possède alors de nombreuses propriétés intéressantes : elle est infiniment dérivable, développable en série entière, etc.
- Si f est dérivable en a,

  $$f(a + h) = f(a) + f'(a)\, h + o(h).$$

  L'application

  $$\begin{aligned} (\mathrm{d}f)_a\colon \mathbb{R} &\longrightarrow F, \\ h &\longmapsto f'(a)\, h \end{aligned}$$

  est une application linéaire et porte le nom de *différentielle de f en a*.

  Ce concept peut être généralisé au cas où l'ensemble de départ de f n'est pas compris dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $f\colon A \subset E \to B \subset F$, où E et F sont des espaces vectoriels normés, est *différentiable* en $a \in A$ si il existe une application linéaire continue L de E dans F[3] telle que

  $$f(a + h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

  si $a + h \in A$. L'application L s'appelle la *différentielle de f en a* et est notée $(\mathrm{d}f)_a$.

  Si f est une fonction de n variables réelles ($x = (x_1, \ldots, x_n)$) et est différentiable en a, les dérivées partielles (voir *infra*) $(\partial f/\partial x_i)_{x=a}$ de f en a existent pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et

  $$(\mathrm{d}f)_a(h) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=a} h_i,$$

  où $h = (h_1, \ldots, h_n)$, ce que l'on note souvent

  $$(\mathrm{d}f)_a = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x=a} \mathrm{d}x_i,$$

  où $\mathrm{d}x_i$ est la fonction $\mathrm{d}x_i\colon h \mapsto h_i$. En revanche, il ne suffit pas que les dérivées partielles de f en a existent pour que f soit différentiable en a.

2. En revanche,

$$f \text{ dérivable sur } A \text{ et } f \text{ dérivable sur } H \Longrightarrow f \text{ dérivable sur } A \cup H.$$

3. Si E est de dimension finie, une application linéaire de E dans F est nécessairement continue.

La fonction

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\colon E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F),\\ a &\longmapsto (\mathrm{d}f)_a, \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F, s'appelle la *différentielle de* f (tout court). ⌟

Si f est une fonction d'une variable réelle, on peut parfois définir des dérivées à droite et à gauche en a, même quand $f'(a)$ n'existe pas.

Définition 49 (Dérivées à droite et à gauche)
Soient F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $f\colon A \subset \mathbb{R} \to B \subset F$ une application et $a \in A$.
f est dérivable à droite en a si la quantité

$$f'_{\mathrm{d}}(a) := (f|_{A\cap[a,\,+\infty[})'(a)$$

existe et est finie ; $f'_{\mathrm{d}}(a)$ porte le nom de dérivée à droite.
On définit de même la dérivée à gauche, $f'_{\mathrm{g}}(a)$, en remplaçant $[a, +\infty[$ par $]-\infty, a]$. ⌟

Théorème 50
Une fonction f d'une variable réelle est dérivable en un point a appartenant à l'intérieur de son domaine de définition si ses dérivées à droite et à gauche en a existent et sont égales. On a alors $f'(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$ $(= f'_{\mathrm{g}}(a))$. ⌟

Notations
Les dérivées successives (si elles existent) se notent

$$f''(a) = \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=a}, \quad \ldots \quad, \quad f^{(k)}(a) = \left.\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\right|_{x=a}, \quad \ldots. \tag{10}$$

En physique, la notation f' est souvent réservée à une dérivation par rapport à une coordonnée d'espace, tandis qu'une dérivée par rapport au temps est notée par un point suscrit :

$$\dot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}, \quad \text{etc.} \tag{11}$$

S'il y a plusieurs variables (par exemple des coordonnées d'espace et de temps, ou des variables de pression et de température), on utilise les notations de *dérivée partielle*. Par exemple, pour une fonction f dépendant des variables u et v,

$$f'_u(u, v) \equiv \frac{\partial f}{\partial u} := \lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(u+h, v) - f(u, v)}{h}, \quad f'_v(u, v) \equiv \frac{\partial f}{\partial v}, \quad f''_{u,\,v}(u, v) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} := \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right). \tag{12}$$

⌟

Théorème 51
Si f et g sont toutes deux dérivables en x, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les règles suivantes :

$$(\lambda\, f)' = \lambda\, f' \;; \tag{13a}$$

$$(f+g)' = f' + g' \;; \tag{13b}$$

$$\text{si } f \text{ et } g \text{ sont à valeurs dans } \mathbb{K},\ (f\, g)' = f'\, g + f\, g' \;; \tag{13c}$$

$$\text{si } f \text{ et } g \text{ sont à valeurs dans } \mathbb{K} \text{ et } g(x) \neq 0,\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\, g - f\, g'}{g^2}. \tag{13d}$$

⌟

Théorème 52
Si g est dérivable en x et f est dérivable en $y = g(x)$, alors $f \circ g$ est dérivable en x et

$$(f\circ g)' = g' \times f' \circ g, \quad \text{c.-à-d.} \quad (x \mapsto f[g(x)])'(x) = g'(x)\, f'(g[x]). \tag{14}$$

⌟

Théorème 53
Si f est bijective, dérivable en $y = f^{\langle -1\rangle}(x)$ et que $f'(y) \neq 0$, alors $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en x et

$$\left(f^{\langle -1\rangle}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{\langle -1\rangle}}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \left(x \mapsto f^{\langle -1\rangle}(x)\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{\langle -1\rangle}[x])}. \tag{15}$$

⌟

Ces règles découlent de la définition 48.

Les dérivées de quelques fonctions élémentaires sont données à l'appendice IV.2.

Définition 50 (fonction C^k)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Une fonction $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset F$ est dite (de classe) C^k sur un intervalle $I \subset A$ (ce qu'on notera $f \in C^k(I \to B)$) si elle est continue sur I et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k inclus existent et sont continues sur I.

Si elle est indéfiniment dérivable, on dit qu'elle est C^∞. ⌟

Une fonction C^0 est donc simplement une fonction continue.

Définition 51 (subdivision finie)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$(x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision finie de $[a, b]$ si et seulement si $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. ⌟

Définition 52 (fonction C^k par morceaux)

Une fonction f est dite C^k par morceaux sur un intervalle I (ce qu'on notera $f \in C^k_{\mathrm{m}}(I \to B)$) si pour tout intervalle $[a, b]$ inclus dans I, il existe une subdivision finie $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall\, i \in [\![0, n-1]\!]$, $f\big|_{]x_i,\, x_{i+1}[}$ soit prolongeable en une fonction C^k sur $[x_i, x_{i+1}]$ [※4]. ⌟

Une fonction C^0_{m} (continue par morceaux) sur un intervalle $[a, b]$ est donc une fonction continue sur $[a, b]$, sauf en un nombre fini de points, et dont les discontinuités en ces points sont finies.

IV.E. Formes indéterminées

On rencontre souvent des situations où la limite se présente sous une *forme indéterminée*. On appelle ainsi des expressions de la forme « $0/0$ », « ∞/∞ », « $0 \times \infty$ », « $\infty - \infty$ », « 1^∞ », « 0^0 », « ∞^0 », etc.

Exemple 38

Quelles sont les limites pour $x \to 0$ de $\sin x/x$, $x \ln x$, $\ln x + 1/x$, $(1+x)^{1/x}$, x^x ? ⌟

On va montrer plus bas qu'on peut se ramener au cas « $0/0$ ». Considérons donc un rapport $f(x)/g(x)$ où $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers 0 quand $x \to a$. Il existe plusieurs procédés d'analyse d'une telle forme indéterminée.

Tout d'abord, d'après la définition de la dérivée d'une fonction f en a comme $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a))/(x - a)$, on a le théorème suivant :

Théorème 54 (règle de l'Hospital)

Si $f(a) = g(a) = 0$, si les dérivées de f et g existent en a et si leur rapport est fini, on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \tag{16}$$

⌟

Preuve

En effet,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,\frac{x - a}{g(x) - g(a)}\right). \tag{17}$$

⌟

Si le rapport $f'(a)/g'(a)$ est toujours indéterminé et si les dérivées d'ordre supérieur existent, on a le droit d'itérer la règle de l'Hospital, c.-à-d. examiner $f^{(n)}(a)/g^{(n)}(a)$ pour $n = 2, 3, \ldots$, jusqu'à l'obtention d'une forme déterminée.

4. $f\big|_{]x_i,\, x_{i+1}[}$ est prolongeable de manière continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ si les limites de f en x_i^+ et x_{i+1}^- sont finies. Le prolongement de $f\big|_{]x_i,\, x_{i+1}[}$ est alors la fonction f_i définie par
   - $\forall\, x \in\,]x_i, x_{i+1}[$, $f_i(x) = f(x)$;
   - $f_i(x_i) = \lim_{x_i^+} f$;
   - $f_i(x_{i+1}) = \lim_{x_{i+1}^-} f$.

   f est donc C^k_{m} si $\forall\, i \in [\![0, n-1]\!]$, f_i est C^k sur $[x_i, x_{i+1}]$.

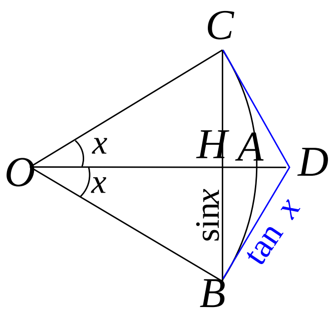

Figure IV.2. Interprétation géométrique de (21) : $OB = OC = 1$; $BH = HC = \sin x$; $BD = DC = \tan x$. On a $BC \leqslant \mathrm{arc}(BC) \leqslant BD + DC$, donc $2\,\sin x \leqslant 2\,x \leqslant 2\,\tan x$.

Exemple 39

Que vaut $\lim_{x\to 0}((\sqrt{2+x} - \sqrt{2})/x)$?

Première méthode. — On multiplie et divise par la « quantité conjuguée », c.-à-d. qu'on écrit

$$\frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \frac{2+x-2}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})\,x} = \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2\,\sqrt{2}}. \tag{18}$$

Seconde méthode. — On utilise la définition de la dérivée :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right)\bigg|_{x=2} = \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\bigg|_{x=2} = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Troisième méthode. — On utilise la règle de l'Hospital. On pose $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2}$ et $g(x) = x$, soit $f'(x) = 1/(2\,\sqrt{2+x})$ et $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}. \tag{20}$$

$\lrcorner$

Exemple 40

Un résultat important est que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{21}$$

En effet, la limite est par définition la dérivée de $x \mapsto \sin x$ en 0, soit $\cos x$ évalué en 0, c.-à-d. 1. L'interprétation géométrique de ce résultat est aussi importante à garder en tête : sur un cercle de rayon unité, $2\,\sin x$ est la longueur de la corde correspondant à un angle de $2\,x$ radians. Pour de petits angles, la longueur de la corde vaut approximativement celle de l'arc : rigoureusement, $2\,\sin x \simeq 2\,x$ quand $x \to 0$ (voir figure IV.2). $\lrcorner$

Une autre idée est d'utiliser des majorations ou minorations (comme dans le théorème des gendarmes) pour se ramener à d'autres formes indéterminées dont la limite est plus aisément calculable. Ainsi, dans l'exemple précédent de $\sin x/x$, on a $2\,\sin x \leqslant 2\,x \leqslant 2\,\tan x$ (la corde BC est plus courte que celle de l'arc BAC, lui-même plus court que la ligne brisée BDC), d'où l'encadrement $\cos x \leqslant \sin x/x \leqslant 1$.

Exemple 41

Quand $x \to \infty$, $\ln x$ tend vers ∞ *plus lentement* que x^α, pour tout $\alpha > 0$. Quand $x \to 0$, $|\ln x|$ tend vers ∞ *plus lentement* que $x^{-\alpha}$, pour tout $\alpha > 0$.

Pour voir cela, partons de l'inégalité $\ln x < \sqrt{x}$.

Pour démontrer cette inégalité, étudions la fonction $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$. Sa dérivée, $f'(x) = (2 - \sqrt{x})/(2\,x)$, est négative pour $x > 4$, positive pour $0 < x < 4$. La fonction f est donc maximale en $x = 4$ et son maximum vaut $f(4) = 2\,(\ln 2 - 1) = 2\,\ln(2/e) < 0$. La fonction f est donc toujours négative.

On en déduit que $0 < \ln x/x < \sqrt{x}/x$, donc que $\lim_{+\infty}(\ln x/x) = 0$ et, plus généralement, par changement de variable, que

$$\forall\ \alpha > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}(x^\alpha\,\ln x) = 0, \tag{22}$$

où l'on passe de la première assertion à la seconde par le changement de variable $x \mapsto 1/x$. $\lrcorner$

Exemple 42

En utilisant le résultat précédent, on démontre que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Il suffit de prendre le logarithme :

$$\ln(x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x}) = -x + \alpha \ln x = -x \left(1 + \alpha \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) \simeq -x \to -\infty.$$

Quand toutes les méthodes précédentes ont échoué, parce que la dérivée de f ou de g n'existe pas, ou que f'/g' est encore du type $0/0$, et qu'aucun encadrement n'a pu être trouvé, une discussion plus serrée s'impose. Si on a deux fonctions f et g dont le rapport $f(x)/g(x) \to 0/0$ quand $x \to a$ (fini), on peut remplacer chacune d'elles par un équivalent asymptotique (on parle aussi de *partie principale*).

En particulier, si $f(x) \simeq a_p \, (x-a)^p$ (on dit alors que f est un *infiniment petit d'ordre p*) et $g(x) \simeq b_q \, (x-a)^q$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a^+}{\simeq} \frac{a_p}{b_q} \, (x-a)^{p-q} \xrightarrow[x\to a^+]{} \begin{cases} 0 & \text{si } p > q, \\ a_p/b_q & \text{si } p = q, \\ \operatorname{sgn}(a_p/b_q) \times \infty \, {}^{※5} & \text{si } p < q. \end{cases}$$

De même, si $x \to +\infty$ et que $f(x) \simeq a_p \, x^p$ (on dit alors que f est un *infiniment grand d'ordre p*) et $g(x) \simeq b_q \, x^q$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to +\infty}{\simeq} \frac{a_p}{b_q} \, x^{p-q} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_p/b_q) \times \infty & \text{si } p > q, \\ a_p/b_q & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{si } p < q. \end{cases}$$

Exemple 43

Trouver la limite de $(x - \sin x)/(x - \tan x)$ quand $x \to 0$. En utilisant les développements limités (cf. § IV.G), on calcule $x - \sin x \simeq x^3/3!$, $x - \tan x \simeq -x^3/3$, donc le rapport tend vers $-1/2$.

Exercice

Calculer de même la limite de $(1 - x + \ln x)/(1 - \cos(1-x))$ quand $x \to 1$.

Finalement, des formes indéterminées de la forme $0 \times \infty$, ∞/∞, 1^∞, etc., peuvent se ramener au cas $0/0$ par passage à l'inverse, exponentiation, etc. Ainsi, si $f \to 0$ et $g \to \infty$, le produit $f\,g$ a une forme indéterminée $0 \times \infty$ mais $f/(1/g)$ est de la forme $0/0$. De même, si $f \to 1$, $g \to \infty$, $f^g = \exp(\ln f/(1/g))$ et l'argument de l'exponentielle est à nouveau de la forme $0/0$.

Exemple 44

Calculons $\lim_{x\to 0}((1+x)^{1/x})$. Cette limite est de la forme 1^∞.

On a $(1+x)^{1/x} = \exp(\ln(1+x)/x)$. Comme $\lim_{x\to 0}(\ln(1+x)/x) = 1$ et que $\exp x$ est une fonction continue, on a $\lim_{x\to 0}((1+x)^{1/x}) = \mathrm{e}$.

Exemple 45

Calculons $\lim_{x\to 0}(|x|^{\ln(1+x)})$. Cette limite est de la forme 0^0.

On a $|x|^{\ln(1+x)} = \exp(\ln(1+x) \ln|x|)$. Quand $x \to 0$, $\ln(1+x) \simeq x$ et $x \ln|x| \to 0$, donc $\lim_{x\to 0}(|x|^{\ln(1+x)}) = 1$.

IV.F. Fonctions élémentaires

IV.F.1. Fonctions trigonométriques

L'interprétation géométrique de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ est donnée sur la figure I.1. Le rapport $\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ (anciennement noté $\operatorname{tg}\theta$) représente la *pente* de la droite (OM). On utilise parfois $\cot\theta = 1/\tan\theta$.

5. La fonction sgn (« signe » de x) est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ de la manière suivante :
   - $\operatorname{sgn} 0 = 0$;
   - $\operatorname{sgn} x = x/|x|$ si $x \in$ *Cont** (donc $\operatorname{sgn} x = +1$ si $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\operatorname{sgn} x = -1$ si $x \in \mathbb{R}^{*-}$) ;
   - $\operatorname{sgn}(+\infty) = +1$ et $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$.

Les *identités trigonométriques* découlent toutes de

$$\sin(-a) = -\sin a, \tag{23a}$$
$$\cos(-a) = \cos a, \tag{23b}$$
$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tag{23c}$$
$$\sin(\pi/2 - a) = \cos a, \tag{23d}$$
$$\cos(a - b) = \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b, \tag{23e}$$

dont l'interprétation géométrique doit être claire (la dernière, par exemple, est obtenue en calculant le produit scalaire de deux vecteurs unitaires faisant respectivement un angle a et un angle b avec l'axe des abscisses). À partir de ces identités, on peut retrouver les identités de l'appendice IV.1.

IV.F.2. Fonctions trigonométriques réciproques

Dans un intervalle où elles sont monotones, on peut « inverser » les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$.

On définit la fonction $\arcsin x$ comme la fonction réciproque de $\sin x$ dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$: $\arcsin x$ est définie pour $x \in [-1, 1]$; elle y est croissante et prend ses valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$:

x	-1		0		1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

La solution générale de $x = \sin y$ est $y = \arcsin x + 2\,k\,\pi$ ou $y = \pi - \arcsin x + 2\,k\,\pi$, où k est un entier arbitraire.

De même, $\arccos x$ est définie pour $x \in [-1, 1]$; elle y est décroissante et prend ses valeurs dans $[0, \pi]$:

x	-1		0		1
$\arccos x$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

La solution générale de $x = \cos y$ est $y = \pm\arccos x + 2\,k\,\pi$. On a $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, ce que l'on peut déduire soit de l'inversion de $x = \cos y = \sin(\pi/2 - y)$, soit du calcul de la dérivée de $\arcsin x + \arccos x$.

Enfin, la fonction $\arctan x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$; elle est croissante et prend ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

La solution générale de $x = \tan y$ est $y = \arctan x + k\,\pi$.

Les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques sont

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

IV.F.3. Fonctions exponentielles et logarithmes

Il s'agit de e^x, ou plus généralement a^x pour $a > 0$. Leur propriété caractéristique est

$$a^x\, a^y = a^{x+y} \tag{24}$$

(et donc aussi $(a^x)^y = a^{x\,y}$).

La fonction réciproque de a^x est le logarithme de base a, $\log_a x$. La fonction $\log_{\mathrm{e}} x$ est notée $\ln x$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$y = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow x = \ln y, \tag{25a}$$
$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y, \tag{25b}$$
$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} \tag{25c}$$
$$\text{et} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \tag{25d}$$

On a en outre

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i}\,\sin x. \tag{26}$$

IV.F.4. Fonctions hyperboliques

Les cosinus, sinus et tangente hyperboliques, notés $\operatorname{ch} x$ ou $\cosh x$, $\operatorname{sh} x$ ou $\sinh x$, et $\operatorname{th} x$ ou $\tanh x$, sont définis de la manière suivante :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \tag{27}$$

Ces fonctions obéissent aux relations

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x. \tag{28}$$

Les fonctions hyperboliques sont reliées aux fonctions trigonométriques par

$$\operatorname{ch}(i\, x) = \cos x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(i\, x) = i\, \sin x. \tag{29}$$

Les propriétés de symétrie et le comportement à l'infini des fonctions hyperboliques sont illustrées sur la figure IV.3.

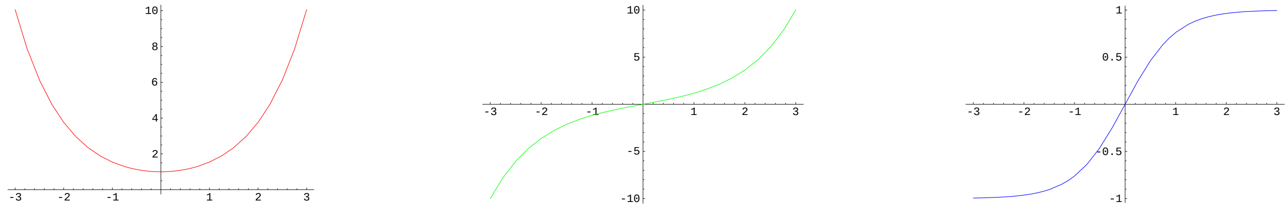

Figure IV.3. Graphes des fonctions hyperboliques $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$.

Les fonctions réciproques de $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ sont respectivement $\operatorname{argsh} x$, $\operatorname{argch} x$ et $\operatorname{argth} x$. Comme

$$x = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = \frac{e^{\operatorname{argsh} x} - e^{-\operatorname{argsh} x}}{2} \Longrightarrow y^2 - 2\, x\, y - 1 = 0, \text{ avec } y = e^{\operatorname{argsh} x},$$

on a

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

On obtient de même que

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{et} \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\!\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

On a

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \qquad (\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad (\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

IV.G. Développements limités et asymptotiques

Un développement limité d'ordre p d'une fonction f au voisinage de 0 est un développement dans lequel les termes successifs sont des infiniment petits d'ordre entier croissant :

$$f(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_p\, x^p + o(x^p), \tag{30}$$

où l'on rappelle que le dernier terme signifie que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \cdots + c_p\, x^p)}{x^p} = 0$$

(on trouve aussi dans les livres la notation $\varepsilon(x^p)$). Plus généralement, un développement limité de f au voisinage d'un point a est un développement de la forme

$$f(x) = c_0 + c_1\, (x - a) + c_2\, (x - a)^2 + \cdots + c_p\, (x - a)^p + o((x - a)^p). \tag{31}$$

IV.G.1. Développements de Taylor

Une façon pratique de construire de tels développements limités est d'utiliser la formule de Taylor. Celle-ci est une généralisation d'une propriété connue des fonctions continues et dérivables sur un intervalle $[a, b]$: on peut écrire, pour $x \in [a, b]$, $f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(a) + o(x - a)$ (et on dit que $f(a) + (x - a)\, f'(a)$ est *la meilleure approximation affine de* $f(x)$). Le théorème suivant généralise ceci :

Théorème 55 (Taylor-Young)

Si la fonction $f(x)$ est de classe C^{n-1} sur $[a, b]$ et si $f^{(n)}(a)$ existe en a, on peut, pour tout $x \in [a, b]$, écrire le développement de Taylor-Young

$$f(x) = f(a) + (x-a)\ f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\ f^{(n)}(a) + o((x-a)^n). \tag{32}$$

┘

Preuve (ébauche)

La formule de Taylor-Young se démontre par récurrence, en l'appliquant à l'ordre $n-1$ à la fonction f' et en intégrant le développement limité obtenu, ce qu'on montre être légitime. ┘

Il existe une autre formule de Taylor (Taylor-Lagrange) qui donne une autre forme du reste :

Théorème 56 (Taylor-Lagrange)

Si la fonction $f(x)$ est de classe C^n sur $[a, b]$ et si $f^{(n+1)}$ existe dans $]a, b[$, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi(x) \in\ ]a, x[$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)\ f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\ f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi). \tag{33}$$

┘

En pratique, la formule de Taylor-Lagrange avec son reste explicite est utile pour trouver des majorations ou minorations d'une fonction (si on connaît le signe du reste). La formule (32) est utile pour fournir des développements limités.

IV.G.2. Développements limités en 0 de fonctions classiques

Les fonctions classiques qu'on va considérer sont indéfiniment dérivables en 0 ; on déduit donc aisément de la formule de Taylor les développements suivants en 0 :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ ; \tag{34a}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + o(x^{2\,n+1})\ ; \tag{34b}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\ \frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!} + o(x^{2\,n})\ ; \tag{34c}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\ ; \tag{34d}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\ x + \frac{\alpha\ (\alpha-1)}{2!}\ x^2 + \cdots + \frac{\alpha\ (\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ x^n + o(x^n)\ ; \tag{34e}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\ \frac{x^n}{n} + o(x^n). \tag{34f}$$

Exercice

Calculer en particulier les développements de $\sqrt{1+x}$ et de $(1-x)^{-1}$. Ce dernier est particulièment simple et pouvait être deviné a priori. Pourquoi ? ┘

IV.G.3. Opérations sur les développements limités

On peut effectuer des opérations d'addition, de multiplication et de division, de composition et d'intégration de développements limités, à condition d'effectuer ces développements à des ordres cohérents avec l'ordre désiré pour le résultat final. Ces manipulations sont d'usage très courant pour le physicien !

Exemple 46

Calculons le développement de $\tan x$ à l'ordre 3 en 0. On écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \tag{35a}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \tag{35b}$$

qu'on inverse en utilisant le développement de $1/(1-u)$, avec $u = x^2/2 - o(x^2)$, d'où

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^2)} = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\\ &= x\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$ ⌟

IV.G.4. Développements limités en $a \neq 0$ ou asymptotiques à l'infini

On peut obtenir le développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point $a \neq 0$ grâce à la formule de Taylor (32), mais au prix du calcul des dérivées successives en a de la fonction f. Pour les fonctions usuelles, un changement de variable permet souvent se ramener aux développements connus au voisinage de 0.

Exemple 47
Développons $\sin x$ au voisinage de a. Posons $u = x - a$. On a

$$\sin x = \sin(a + (x - a)) = \sin a\, \cos u + \cos a\, \sin u$$

et on utilise les développements vus précédemment de $\sin u$ et $\cos u$ au voisinage de 0. ⌟

Exemple 48
Calculons de même un développement limité de $\ln x$ au voisinage de $a > 0$. On a

$$\ln x = \ln(a + x - a) = \ln(a\,[1 + (x - a)/a]) = \ln a + \ln(1 + u)$$

avec $u = (x - a)/a$. Il suffit donc d'utiliser le développement de $\ln(1 + u)$ au voisinage de 0. ⌟

On peut aussi calculer des développements asymptotiques quand $x \to \pm\infty$: on se ramène au cas d'un développement limité en 0 par un changement de variable tel que $x \mapsto u = 1/x$.

Exemple 49
Calculons le développement asymptotique※[6] de $(1 + x^2)^{1/2}$ quand $x \to \infty$. On a

$$(1 + x^2)^{1/2} = |x|\ (1 + x^{-2})^{1/2} = |x|\ (1 + u)^{1/2}$$

avec $u = x^{-2}$. Il suffit donc de connaître le développement limité de $(1 + u)^{1/2}$ au voisinage de 0. ⌟

Annexe IV.1. Identités trigonométriques

Elles découlent toutes de cinq identités fondamentales :

$$\sin(-x) = -\sin x, \tag{36a}$$
$$\cos(-x) = \cos x, \tag{36b}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{36c}$$
$$\cos x = \sin\!\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tag{36d}$$
$$\cos(x - y) = \cos x\, \cos y + \sin x\, \sin y. \tag{36e}$$

Par exemple, (36c) implique pour $\tan x = \sin x/\cos x$ et $\cot x = 1/\tan x$ que

$$1 + \tan^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{37a}$$
$$\text{et}\quad 1 + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}. \tag{37b}$$

IV.1.A. Décalage de l'argument

Les propriétés fondamentales de périodicité sont

$$\sin(x + 2\,\pi) = \sin x, \tag{38a}$$
$$\cos(x + 2\,\pi) = \cos x, \tag{38b}$$
$$\tan(x + \pi) = \tan x. \tag{38c}$$

6. Il ne s'agit pas d'un développement limité car on n'obtient pas un polynôme.

On a également

$$\sin(x+\pi) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \tag{39a}$$

$$\cos(x+\pi) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \tag{39b}$$

et

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \cos(-x) = \cos x, \tag{40a}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x, \tag{40b}$$

$$\tan\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x. \tag{40c}$$

IV.1.B. Formules d'addition

$$\cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y. \tag{41a}$$

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y. \tag{41b}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y}{\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\,\tan y}. \tag{41c}$$

Inversement,

$$\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}\,(\cos(x+y)+\cos(x-y)), \tag{42a}$$

$$\sin x\,\sin y = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y)-\cos(x+y)), \tag{42b}$$

$$\sin x\,\cos y = \frac{1}{2}\,(\sin(x+y)+\sin(x-y)), \tag{42c}$$

ou encore

$$\cos a + \cos b = 2\,\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \text{ etc.} \tag{43}$$

IV.1.C. Formules de doublement

$$\begin{aligned}\cos(2\,x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\,\cos^2 x - 1\\ &= 1-2\,\sin^2 x = \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.\end{aligned} \tag{44a}$$

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x\,\cos x = 2\,\tan x\,\cos^2 x = \frac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}. \tag{44b}$$

$$\tan(2\,x) = \frac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x}. \tag{44c}$$

Noter que $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ sont des fractions rationnelles de $\tan(x/2)$.

Annexe IV.2. Dérivées des fonctions élémentaires

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\alpha} = \alpha\ x^{\alpha-1}. \tag{45a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}. \tag{45b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^{x} = \ln a\ a^{x}. \tag{45c}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{45d}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x. \tag{45e}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x. \tag{45f}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = 1 + \tan^2 x. \tag{45g}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{45h}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{45i}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{45j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x. \tag{45k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x. \tag{45l}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{th}\, x = 1 - \mathrm{th}^2 x. \tag{45m}$$