

# Chapitre IX

## DYNAMIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

### IX.A. Généralités sur les systèmes linéaires. L'oscillateur harmonique

#### IX.A.1. Équations différentielles linéaires.

On va étudier des systèmes linéaires, c.-à-d. des systèmes dont la dynamique est déterminée par une équation différentielle linéaire dans la variable temps  $t$ , ou par un système de telles équations. Le cas le plus simple est celui d'une équation d'ordre 2,

$$\ddot{x}(t) + A(t) \dot{x}(t) + B(t) x(t) = C(t), \quad (1)$$

où les fonctions  $A, B, C$  sont données et indépendantes de la variable dynamique  $x$ .

Les théorèmes généraux que nous avons énoncés au chapitre VIII.c sur les équations différentielles linéaires vont nous être utiles dans l'étude de l'équation (1).

#### IX.A.2. Oscillateur harmonique

On va étudier de façon détaillée le cas où les coefficients  $A$  et  $B$  de l'équation (1) sont positifs et indépendants du temps. Après changement de notations, on écrit l'équation sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = C(t). \quad (2)$$

On parle d'un oscillateur harmonique amorti et excité. En général, l'oscillateur harmonique et ses généralisations à plusieurs degrés de liberté sont une bonne façon de décrire la dynamique d'un système au voisinage d'un point d'équilibre, comme on le verra plus bas.

On est familier avec l'oscillateur harmonique non-amorti et non excité, régi par l'équation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

Rappelons d'abord l'importance physique et les propriétés majeures de ce cas. Il décrit le mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel proportionnelle au déplacement par rapport à la position d'équilibre :

$$m \ddot{x} = -k x. \quad (4)$$

Dans le cas d'une force exercée par un ressort,  $k > 0$  est la « raideur » du ressort. L'équation différentielle s'intègre de diverses façons :

- On vérifie aisément que  $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$  et  $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$  sont deux solutions linéairement indépendantes. Une combinaison linéaire  $\lambda_1 \sin(\omega_0 t) + \lambda_2 \cos(\omega_0 t)$  de ces deux solutions peut se réécrire sous la forme

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (5)$$

en posant  $\lambda_1 = A \cos \phi$  et  $\lambda_2 = A \sin \phi$ . C'est bien la solution générale de (3), avec deux constantes  $A$  et  $\phi$  déterminées par les conditions initiales  $x_0$  et  $v_0$  : au temps  $t = 0$ ,  $x(0) = A \sin \phi = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = \omega_0 A \cos \phi = v_0$ . La position  $x(t)$  oscille avec une amplitude  $A$  et une phase  $\phi$ <sup>\*1</sup>. La période est  $2\pi/\omega_0$ , la fréquence est  $\omega_0/(2\pi)$ . La grandeur  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est appelée selon le contexte *pulsation* ou *fréquence angulaire*; par abus de langage, on l'appellera aussi parfois *fréquence* si cela ne risque pas de causer d'ambiguïté. L'indice 0 sur  $\omega_0$  se réfère au cas de l'oscillateur non amorti et non excité.

1. Noter que cette phase  $\phi$  n'a pas ici un sens intrinsèque : elle peut être absorbée dans un changement de l'origine des temps.

- On peut aussi intégrer (4) en la multipliant par  $\dot{x}$  et en reconnaissant dans  $\ddot{x} \dot{x}$  et  $\dot{x} x$  les dérivées par rapport à  $t$  de  $\frac{1}{2} \dot{x}^2$  et  $\frac{1}{2} x^2$  respectivement. On réécrit donc (4) comme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0, \quad (6)$$

qui s'intègre en

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E = \text{constante}. \quad (7)$$

Ce que cette « constante du mouvement » (ou « intégrale première ») de l'équation initiale exprime est bien sûr la conservation de l'énergie mécanique  $E$  du système, somme de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$  et de l'énergie potentielle du ressort  $\frac{1}{2} k x^2$ .  $E$  est déterminée par les conditions initiales :

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2. \quad (8)$$

On peut réécrire l'équation (7) comme

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 \sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}.$$

Cette équation s'intègre à son tour par changement de variable  $x = \sqrt{2E/k} \sin u$ , d'où

$$\frac{du}{dt} = \omega_0, \quad (9)$$

donc finalement

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega_0 t + \phi),$$

avec une constante d'intégration  $\phi$ . Le résultat est bien identique à ce qu'on a obtenu plus haut, compte tenu de ce que  $E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$ .

### Remarques

1. Il y avait un arbitraire de signe dans l'extraction de la racine carrée dans  $dx/dt = \omega_0 (2E/k - x^2)^{1/2}$ . Montrer que le signe opposé aurait conduit à la même expression finale, à une redéfinition de  $\phi$  près.
2. Les énergies cinétique et potentielle ont pour expressions

$$E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \quad \text{et} \quad E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi). \quad (10)$$

Considérons la *moyenne* de ces quantités sur un temps long par rapport à leur période (ou sur une période précisément, ce qui revient au même<sup>§2</sup>),

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{cin}}(t) dt. \quad (11)$$

Puisque

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2},$$

les énergies cinétique et potentielle moyennées sur une période sont égales. Cette *équipartition* de l'énergie moyenne entre énergie cinétique et énergie potentielle constitue une des particularités de l'oscillateur harmonique.  $\square$

La physique de l'oscillateur harmonique dépasse largement le cas du ressort évoqué plus haut. Considérons à nouveau l'équation obtenue pour un pendule simple au § VIII.E.1,

$$m \ell \ddot{\theta} = -m g \sin \theta. \quad (12)$$

Supposons les oscillations du pendule petites, donc  $|\theta| \ll 1$  rad : ceci nous permet de *linéariser* le problème en remplaçant  $\sin \theta$  par le premier terme de son développement limité, soit

$$m \ell \ddot{\theta} = -m g \theta. \quad (13)$$

---

2. Pourquoi ?

En posant  $\omega_0^2 = g/\ell$ , on retrouve l'équation (3).

Le pendule simple, dans l'approximation des petites oscillations ( $|\theta| \ll 1$  rad) que nous avons faite, a la propriété remarquable d'*isochronisme* : la période des oscillations est indépendante de leur amplitude,  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Cette propriété n'est vraie que dans l'approximation des petites oscillations, et on doit lui apporter des corrections dès que l'amplitude croît.

La discussion qui précède s'applique à une classe beaucoup plus large de systèmes mécaniques que le ressort ou le pendule simple. Considérons un point de masse  $m$  se déplaçant sur un axe  $x$  et soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle  $U(x)$ . Supposons que  $U(x)$  a un minimum en  $x = 0$  et développons  $U$  au deuxième ordre au voisinage de ce point :

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2} U''(0)x^2 + \dots$$

Puisque  $x = 0$  est un minimum,  $U'(0) = 0$  et  $U''(0) > 0$ . On peut donc poser  $U''(0) := m\omega_0^2$ , soit  $U(x) \approx U(0) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$ . En introduisant ce résultat dans la relation fondamentale de la dynamique,  $m\ddot{x} = -dU/dx$ , on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique, avec une pulsation propre  $\omega_0$  donnée par la courbure  $U''(0)$  du potentiel.

Un autre système physique décrit par l'équation (3) est le circuit électrique  $LC$ , déjà évoqué au § VIII.A.2, où nous avons trouvé pour la charge  $Q$  une équation du second ordre :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (14)$$

Cette équation s'identifie avec (4) si on fait les changements de variables  $Q \mapsto x$ ,  $L \mapsto m$  et  $1/C \mapsto k$ . La charge oscille donc selon (5) avec une fréquence  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Il en est de même de l'intensité  $I$  du courant ou de la tension aux bornes du condensateur.

On peut se demander comment prendre en compte la résistance, négligée dans ce qui précède, mais toujours présente dans un circuit électrique. Son rôle est d'introduire un terme dissipatif dans l'oscillateur harmonique. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

## IX.B. Amortissement

### IX.B.1. Frottement fluide

On imagine maintenant que le système mécanique étudié est soumis à une force de friction proportionnelle (et opposée) à sa vitesse. Il s'agit là d'une bonne description du « frottement fluide » auquel est soumis un corps solide en déplacement à faible vitesse dans un fluide. Par exemple, une sphère de rayon  $r$  se déplaçant dans un fluide subit une force  $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$  où  $\eta$  est la *viscosité* du fluide (loi de Stokes). D'une façon générale, il est utile d'écrire cette force de frottement sous la forme  $-(m/\tau) \vec{v}$ , avec un paramètre  $\tau$  qui a la dimension d'un temps et qui va fournir une échelle de temps importante dans les phénomènes étudiés par la suite.

Une autre situation physique décrite par un terme de « frottement fluide » est le circuit  $RLC$ , comme on l'a mentionné plus haut (cf. figure VIII.1b). Une résistance  $R$  introduit une différence de potentiel supplémentaire égale à  $R I$ , selon la loi d'Ohm, donc l'équation (14) devient

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (15)$$

### IX.B.2. Oscillateur harmonique amorti

Un oscillateur harmonique sujet à une force de frottement fluide obéit donc à l'équation (2), avec un membre de droite nul :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

On va chercher la solution générale de cette équation sous la forme d'une exponentielle  $x(t) = e^{\alpha t}$  avec  $\alpha$  éventuellement complexe. La dérivation d'une telle exponentielle revenant à sa multiplication par  $\alpha$ , on voit que (16) est satisfaite à condition que  $\alpha$  soit racine de

$$\alpha^2 + \frac{1}{\tau} \alpha + \omega_0^2 = 0, \quad (17)$$

une équation du second degré qui a deux solutions, soit réelles, soit complexes conjuguées. La solution générale de (16) est une combinaison linéaire des deux exponentielles correspondantes. Les deux cas décrivent deux situations physiques différentes.

1. Si  $\omega_0 \tau > 1/2$ , le discriminant de l'équation est négatif et les deux racines sont complexes conjuguées :

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2\tau} \left( -1 \pm i \sqrt{4\omega_0^2 \tau^2 - 1} \right).$$

La solution générale de (16) est de la forme

$$x(t) = B_+ \exp \frac{-t}{2\tau} \exp \left( \frac{i t}{2\tau} \sqrt{4\omega_0^2 \tau^2 - 1} \right) + B_- \exp \frac{-t}{2\tau} \exp \left( \frac{-i t}{2\tau} \sqrt{4\omega_0^2 \tau^2 - 1} \right)$$

avec deux constantes  $B_+$  et  $B_-$  a priori complexes. La solution  $x(t)$  devant être réelle,  $B_+$  et  $B_-$  doivent en fait être des nombres complexes conjugués, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$B_{\pm} = e^{\pm i(\phi - \pi/2)} \frac{A}{2},$$

avec deux nouvelles constantes réelles  $A$  et  $\phi$  à déterminer en fonction des conditions initiales. On peut alors réécrire

$$x(t) = A \exp \frac{-t}{2\tau} \sin(\tilde{\omega}_0 t + \phi) \quad (18)$$

avec

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}. \quad (19)$$

Quand  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{\omega}_0 \rightarrow \omega_0$  et on retrouve bien sûr (5). Le mouvement décrit par (18) est un mouvement oscillant amorti, avec une pulsation  $\tilde{\omega}_0$  plus petite que  $\omega_0$  et une amplitude décroissant exponentiellement. Le régime est dit *pseudo-périodique* ou *sous-amorti*.

2. Si  $\omega_0 \tau < 1/2$ , le discriminant de l'équation est positif et les deux racines  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  de (17) sont réelles et négatives :

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2\tau} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \tau^2} \right).$$

La solution générale de (16) est donc

$$x(t) = A_+ \exp \frac{-t}{2\tau} \exp \left( \frac{t}{2\tau} \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \tau^2} \right) + A_- \exp \frac{-t}{2\tau} \exp \left( \frac{-t}{2\tau} \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \tau^2} \right), \quad (20)$$

somme de deux termes s'amortissant exponentiellement mais ne présentant plus de caractère oscillant.

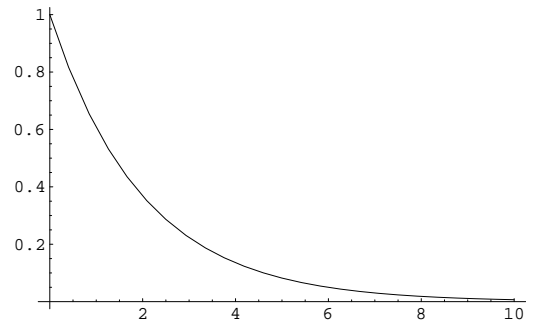
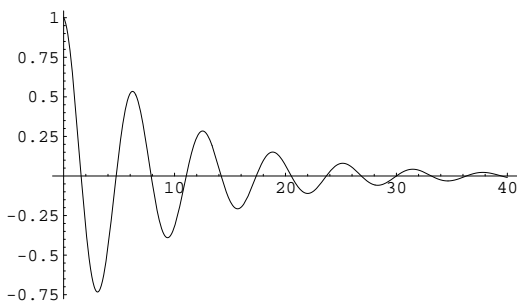
Si  $A_+ \neq 0$  et si  $\sqrt{1 - 4\omega_0^2 \tau^2}$  n'est pas petit, le premier terme s'amortit beaucoup moins vite que le second et domine donc rapidement. Dans tous les cas, l'amortissement fort ( $1/\tau > 2\omega_0$ ) a supprimé les oscillations. Ce régime est dit *apériodique* ou *suramorti*.

3. Pour être complet, discutons rapidement le cas limite où  $\omega_0 \tau = 1/2$  : le discriminant s'annule, les deux racines  $\alpha_{\pm} = -1/(2\tau)$  coïncident et les deux solutions qui leur sont attachées ne sont plus linéairement indépendantes. On sait toutefois que dans ce cas les fonctions  $e^{-t/(2\tau)}$  et  $t e^{-t/(2\tau)}$  sont deux solutions linéairement indépendantes. La solution  $x(t)$ , superposition linéaire de ces deux fonctions, présente donc à nouveau un amortissement sans oscillations. Le régime est dit *critique*.

Dans tous les cas, dès que  $\tau > 0$ , on voit que le système s'amortit, plus ou moins vite, mais inexorablement. Il est d'usage de définir le *temps de relaxation*  $\tau_r$  comme le temps au bout duquel les variables  $x^2$  ou  $\dot{x}^2$  (ou encore l'énergie, qui est quadratique en  $x$ ) ont déchu d'un facteur  $e$ . Dans les cas d'amortissement faible et très fort, on trouve que<sup>※3</sup>

$$\tau_r = \begin{cases} \tau & \text{si } \tau \omega_0 > \frac{1}{2} & \text{(sous-amorti),} \\ \frac{\tau}{1 - \sqrt{1 - 4\omega_0^2 \tau^2}} \approx \frac{1}{2\omega_0^2 \tau} & \text{si } \tau \omega_0 \ll \frac{1}{2} & \text{(très suramorti).} \end{cases}$$

3. Pour le régime sous-amorti, on ne considère que l'enveloppe des oscillations ; pour le régime très suramorti, on néglige le terme en facteur de  $A_-$ .



**Figure IX.1.** Régimes sous-amorti et suramorti. On a pris  $\omega_0 = 1$ ,  $\tau = 5$  dans le premier cas,  $\omega_0 = 1$ ,  $\tau = 0,4$  dans le deuxième, où on n'a gardé que la première exponentielle de (20).

### IX.B.3. Bilan d'énergie, facteur de qualité

#### IX.B.3.a. Bilan d'énergie

On a vu au § IX.A.2 que, pour un oscillateur non amorti, on avait équipartition de l'énergie entre énergie cinétique et énergie potentielle. Qu'en est-il en présence d'amortissement? Pour simplifier le calcul, supposons que les conditions initiales soient telles que  $A = x_0$  et  $\phi = 0$  dans (18), et bornons-nous au cas d'un amortissement faible,  $\omega_0 \tau \gg 1/2$ . Dans la solution (18), on a donc  $\tilde{\omega}_0 \approx \omega_0$ . On calcule alors

$$\dot{x}(t) = x_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \left( \tilde{\omega}_0 \cos[\tilde{\omega}_0 t] - \frac{1}{2\tau} \sin[\tilde{\omega}_0 t] \right).$$

Dans le calcul des moyennes de  $x^2(t)$  et de  $\dot{x}^2(t)$  sur une période apparaissent des termes  $e^{-t/\tau} \cos^2(\tilde{\omega}_0 t)$ , etc. Mais puisqu'on a supposé  $\omega_0 \gg 1/(2\tau)$ , l'exponentielle  $e^{-t/\tau}$  varie très peu sur une période, et on peut la sortir de l'intégrale. On se ramène de la sorte aux intégrales déjà considérées et on calcule aisément

$$\langle E_{\text{cin}}(t) \rangle \approx \frac{m x_0^2}{4} \left( \frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2 \right) e^{-t/\tau} \approx \frac{1}{4} m \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}, \quad (21)$$

$$\langle E_{\text{pot}}(t) \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle e^{-t/\tau} \sin^2(\tilde{\omega}_0 t) \rangle \approx \frac{1}{4} m \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau}. \quad (22)$$

On note que si on a bien encore (dans cette approximation) équipartition entre énergie cinétique et énergie potentielle, leur somme  $E(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$  dépend du temps : l'énergie du système n'est plus conservée mais *dissipée* en raison de l'amortissement. La puissance dissipée  $P$  est elle-même fonction du temps

$$P(t) := -\frac{d}{dt} \langle E(t) \rangle = \frac{1}{2\tau} \left( m \omega_0^2 x_0^2 e^{-t/\tau} \right) = \frac{\langle E(t) \rangle}{\tau}.$$

On vérifie que cette énergie dissipée est égale (au signe près) au travail de la force de frottement. Sur une période,

$$W_{\text{frott}} = \int_{t'=t}^{t'+T} \left( -\frac{m}{\tau} v \right) v dt' = -\frac{2}{\tau} \int_{t'=t}^{t'+T} \frac{m v^2}{2} dt' = -\frac{T}{\tau} \langle E \rangle = -T P(t).$$

#### IX.B.3.b. Facteur de qualité

Le *facteur de qualité* d'un système oscillant sujet à un amortissement est

$$Q := 2\pi \frac{\text{énergie emmagasinée}}{\text{énergie dissipée par période}}. \quad (23)$$

$Q$  est donc une mesure de l'amortissement, une valeur élevée de  $Q$  signalant un amortissement *faible*. Ici nous avons

$$Q = \frac{2\pi E}{P \times 2\pi/\tilde{\omega}_0} = \frac{E \tilde{\omega}_0}{P} \approx \omega_0 \tau.$$

(Dans l'approximation d'amortissement faible que nous avons faite,  $E$  ne varie pas de façon appréciable sur une période.) Noter que  $Q$  est aussi  $2\pi$  fois le nombre d'oscillations pendant le temps de relaxation  $\tau_r = \tau$ .

Pour fixer les idées, voici quelques valeurs typiques de  $Q$  :

- Terre (ondes sismiques) :  $Q \approx 250\text{--}1500$ ;
- corde de piano ou de violon :  $Q \approx 10^4$ ;
- atome excité :  $Q \approx 10^7$ .

## IX.c. Oscillateur excité par une source périodique

### IX.c.1. Solution particulière

On considère maintenant que l'oscillateur harmonique amorti est soumis à une force périodique dans le temps. Selon le principe de superposition linéaire, la solution générale de l'équation inhomogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation inhomogène. Le second membre étant périodique, on peut le décomposer en série de Fourier et faire de même pour la solution particulière. Il suffit donc de résoudre l'équation pour un second membre sinusoïdal<sup>\*4</sup> :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t). \quad (24)$$

Cette équation décrit par exemple le circuit *RLC* de la figure VIII.1c excité par une tension sinusoïdale de fréquence  $\omega$ .

Pour trouver une solution particulière de (24), on complexifie le problème : on cherche une solution  $\tilde{x}$  de  $\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = A e^{i \omega t}$ . L'équation (24) étant la partie réelle de cette équation complexe, il suffira de prendre  $x = \text{Re } \tilde{x}$  à la fin du calcul. Cherchons une solution de la forme  $\tilde{x}(t) = B e^{i(\omega t - \theta)}$  (avec  $B, \theta$  réels). On trouve que  $\theta$  et  $B$  doivent satisfaire

$$B e^{-i \theta} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega / \tau}. \quad (25)$$

On peut choisir  $B$  de même signe que  $A$ . Le déphasage  $\theta$  est alors l'argument du nombre complexe au dénominateur. On a

$$\tan \theta = \frac{\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

et  $\sin \theta \geq 0$ , ce qui détermine  $\theta$  à  $2 \pi$  près<sup>\*5</sup> :

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{\omega / \tau}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{si } \omega_0 > \omega, \\ \pi / 2 & \text{si } \omega_0 = \omega, \\ \pi - \arctan \frac{\omega / \tau}{\omega^2 - \omega_0^2} & \text{si } \omega_0 < \omega. \end{cases} \quad (26)$$

Finalement, en revenant à des valeurs réelles,

$$x(t) = B \cos(\omega t - \theta[\omega]) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 / \tau^2}} \cos(\omega t - \theta[\omega]) \quad (27)$$

est une solution particulière de l'équation.

La solution générale de (24) est donc la somme de (27) et de l'une ou l'autre des solutions (18) ou (20) de l'équation sans second membre, selon la valeur de l'amortissement. Comme cette dernière s'atténue au bout d'un temps d'ordre  $\tau_r$ , on va négliger ce régime *transitoire* et se concentrer sur le régime *permanent* décrit par (27) : en effet, après un régime transitoire d'une durée d'ordre  $\tau_r$ , le système entre dans un régime permanent où il est couplé à la source extérieure, subit des *oscillations forcées* et a oublié son état initial.

Examinons donc de plus près ce régime permanent. Tout d'abord, notons que l'angle  $\theta$  a maintenant un sens physique intrinsèque (au contraire de ce qui se passait dans le cas non excité, où il pouvait être absorbé dans une redéfinition de l'origine du temps  $t$ ). Cet angle décrit en effet le déphasage entre la force excitatrice et la réponse du système. Comme on a noté que  $\sin \theta \geq 0$ , donc  $\theta \in [0, \pi]$ , on voit que la réponse est toujours en *retard* sur l'excitation. Ce déphasage est entre 0 et  $\pi/2$  pour  $\omega < \omega_0$ ; il est entre  $\pi/2$  et  $\pi$  pour  $\omega > \omega_0$  (voir la figure IX.2 pour les courbes du rapport des amplitudes  $B/A$  et du déphasage  $\theta$ ).

On peut également s'intéresser à la vitesse  $v(t) = \dot{x}(t)$ . À une constante positive près,  $v(t) \propto -\sin(\omega t - \theta) = \cos(\omega t - \theta + \pi/2)$ . Son déphasage par rapport à la source excitatrice est donc  $\pi/2 - \theta$  : la vitesse est en avance sur la source pour  $\omega < \omega_0$ , et en retard pour  $\omega > \omega_0$ .

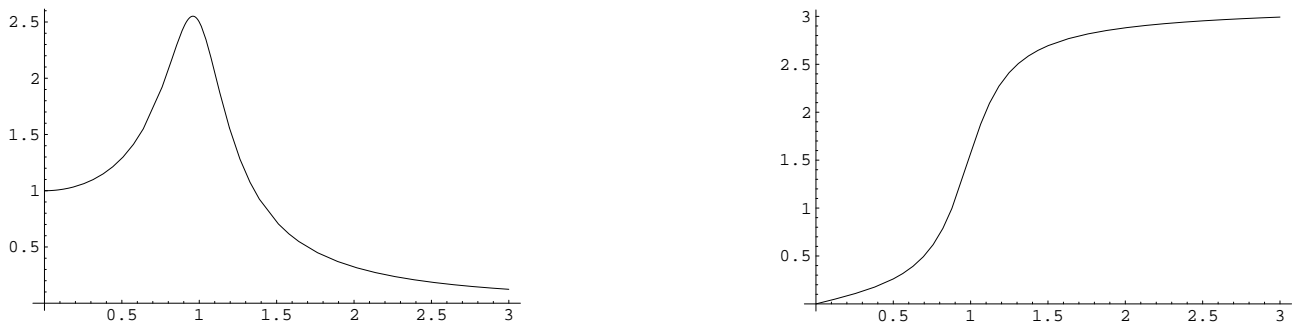
### IX.c.2. Résonance

Revenons au rapport des amplitudes de la réponse et de la source,

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 / \tau^2}}. \quad (28)$$

4. Attention aux notations :  $\omega > 0$  désigne la pulsation de la source externe et est a priori différente de  $\omega_0$ .

5. Rappelons que, par définition de la fonction réciproque  $\arctan x$ ,  $-\pi/2 \leq \arctan x \leq \pi/2$ , et donc que la résolution de  $\tan \alpha = \tan \beta$  ne donne  $\alpha = \beta$  qu'à un multiple entier de  $\pi$  près, au lieu d'un multiple entier de  $2 \pi$ .



**Figure IX.2.** Amplitude  $B/A$  et déphasage  $\theta$  d'un oscillateur excité, en fonction de  $\omega$ . On a pris  $\omega_0 = 1$ ,  $\tau = 2,5$ .

Quand  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\theta \approx 0$  et  $B/A \approx 1/\omega_0^2$ ; quand  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\theta \approx \pi$  et  $B/A \approx 1/\omega^2$ ; entre ces deux comportements limites, le rapport  $B/A$  peut être élevé, c.-à-d. que la réponse du système peut être forte. On vérifie aisément que le rapport d'amplitudes  $B/A$  a un maximum pour

$$\omega = \omega_m := \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}, \quad (29)$$

à condition que  $2 \omega_0^2 \tau^2 > 1$ , c.-à-d. pour un amortissement pas trop grand. Dans le cas contraire, si  $2 \omega_0^2 \tau^2 \leq 1$ , le rapport  $B/A$  est maximum en  $\omega = 0$ .

On note que la valeur de  $\omega_m$  qu'on vient de calculer en (29) est toujours inférieure à  $\omega_0$  et qu'elle est d'autant plus proche de  $\omega_0$  que  $\tau$  est grand (amortissement faible). Le maximum de  $B/A$  est

$$\left(\frac{B}{A}\right)_m = \frac{2 \tau^2}{\sqrt{4 \omega_0^2 \tau^2 - 1}}.$$

Il est d'autant plus élevé que  $\tau$  (ou le facteur de qualité  $Q$ ) est plus grand, puisque  $(B/A)_m \approx \tau/\omega_0$  pour  $\tau \gg 1/\omega_0$ , c.-à-d.  $Q \gg 1$ . On vérifie aussi que quand  $\tau$  est grand, le pic de  $B/A$  est étroit (voir figure IX.3). Ce pic très marqué (haut et étroit) de la réponse du système pour  $\tau$  grand et  $\omega \approx \omega_0$  correspond au phénomène de *résonance*. L'effet de  $Q$  se manifeste aussi sur le déphasage, dont la pente  $d\theta/d\omega$  en  $\omega_m$  est de plus en plus raide quand  $Q$  croît.

Rappelons l'importance pratique du phénomène de résonance : il est utile au sonneur de cloche, à l'enfant sur sa balançoire ; il permet une amplification importante d'un signal électrique par un circuit  $RLC$ , dans une étroite bande de fréquence autour de la fréquence propre. En revanche, il peut occasionner des vibrations ou oscillations d'amplitude croissante auxquelles le système ne peut résister : on peut ainsi exciter un verre de cristal jusqu'à la cassure.

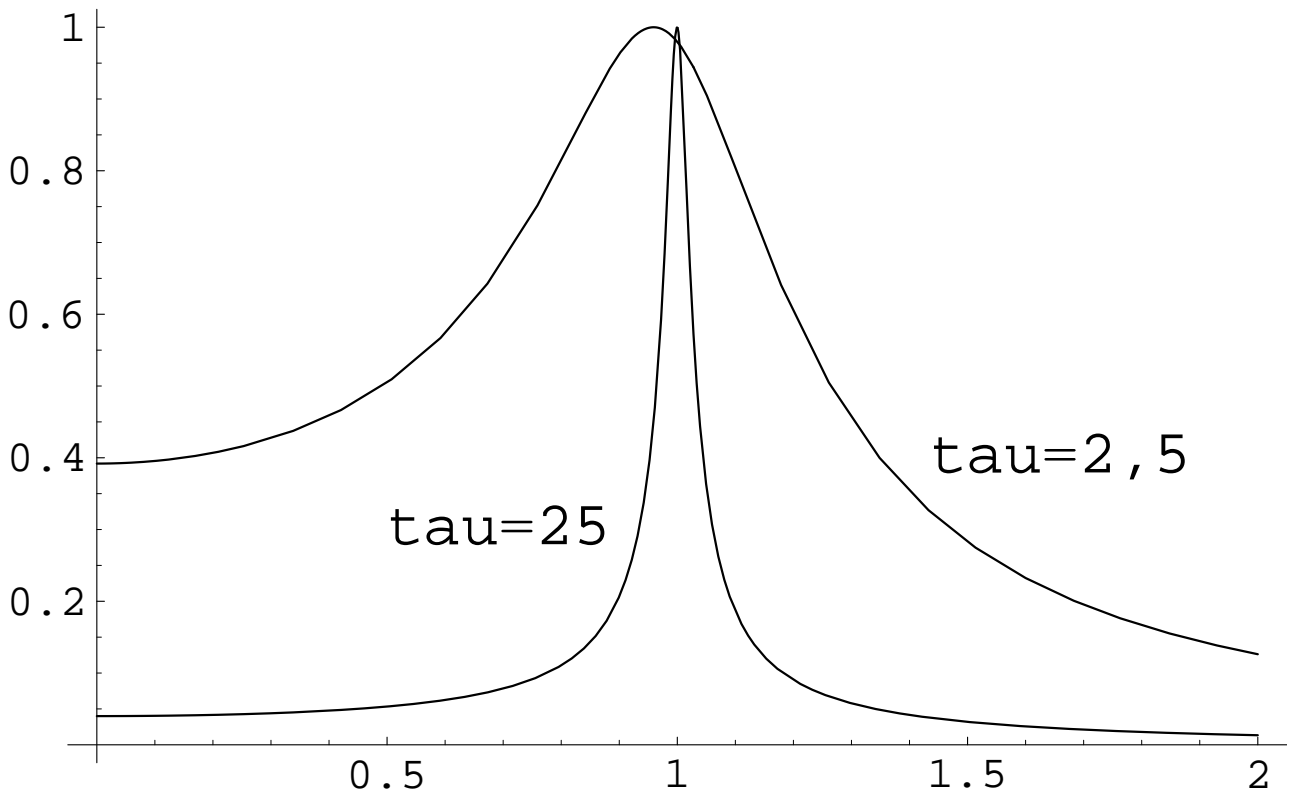
Plus dramatique est l'effondrement de ponts sous l'effet d'une excitation résonante. Chaque pays semble avoir son folklore en la matière. Les Anglo-Saxons se réfèrent au pont de Tacoma (État de Washington, États-Unis), qui s'est effondré en 1940, suite à des oscillations provoquées par le vent (voir les images spectaculaires sur le site <http://www.ketchum.org/bridgecollapse.html>). Quant aux Français, ils citent encore l'épisode suivant : « Le 1<sup>er</sup> avril 1850, par grand vent, une troupe de 500 soldats marchait au pas cadencé sur un pont suspendu au-dessus de la Maine, à Angers. Par résonance entre la période propre d'oscillation du pont et celle du pas, le pont prit une telle amplitude de vibration qu'il céda, et les militaires furent précipités dans le fleuve. Près de la moitié périrent. ». Cet événement jeta une grande suspicion (injustifiée !) sur la toute nouvelle technique des ponts suspendus...

On appelle *bande passante* l'intervalle de  $\omega$  à l'intérieur duquel  $(B/A)(\omega) \geq (B/A)_m/\sqrt{2}$ .

### Couleur bleue du ciel

Les considérations qui précèdent expliquent la couleur bleue du ciel. La lumière du Soleil est diffusée par les molécules de l'atmosphère, et une modélisation simple consiste à considérer chacune de ces molécules comme un petit oscillateur excité par cette lumière. Un tel oscillateur a une fréquence propre  $\omega_0$  dans l'ultraviolet lointain. En lumière visible, il est donc excité à une fréquence  $\omega \ll \omega_0$  et vibre selon la loi (27). Selon les calculs qui précèdent, le rapport  $B/A$  dépend faiblement de  $\omega$  pour  $\omega \ll \omega_0$ . Cependant, selon la théorie électromagnétique, l'oscillateur réémet lui-même une onde lumineuse d'amplitude proportionnelle à son *accélération*. L'amplitude de l'onde émise est donc proportionnelle à  $\omega^2$ , et l'*intensité* diffusée proportionnelle à  $\omega^4$ , c.-à-d. à  $1/\lambda^4$  : le bleu ( $\lambda \approx 4000 \text{ \AA}$ ) l'emporte donc sur le rouge ( $\lambda \approx 8000 \text{ \AA}$ )<sup>\*6</sup>, du moins si le ciel est pur.

6. On rappelle la définition de l'angström :  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .



**Figure IX.3.** Courbes de  $B(\omega)/B(\omega_m)$ , c.-à-d. de l'amplitude de l'oscillation forcée normalisée par sa valeur au maximum  $\omega_m$ , en fonction de  $\omega$ ; on a pris  $\omega_0 = 1$ , donc les courbes pour  $\tau = 2,5$  et 25 correspondent respectivement à  $Q = 2,5$  et 25.

### IX.D. Susceptibilité

Pour une fréquence donnée  $\omega$ , on appelle *susceptibilité*  $\chi(\omega)$  le coefficient de proportionnalité complexe entre les amplitudes  $A$  et  $B e^{-i\theta}$ , tel qu'il apparaissait dans (25),

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \omega / \tau}. \quad (30)$$

On note traditionnellement  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$  les parties réelle et imaginaire de  $\chi^{*7}$  :

$$\chi'(\omega) = \text{Re } \chi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 / \tau^2}, \quad (31)$$

$$\chi''(\omega) = \text{Im } \chi(\omega) = \frac{-\omega / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 / \tau^2}. \quad (32)$$

La variable physique  $\omega$  (pulsation) est par définition réelle et positive. Nous observons cependant que la fonction  $\chi(\omega)$  satisfait la propriété suivante

$$(\chi[\omega])^* = \chi(-\omega) \quad (33)$$

si on considère que  $\omega$  peut prendre aussi des valeurs négatives. Donc  $\chi'(\omega)$  se prolonge en une fonction paire et  $\chi''(\omega)$  en une fonction impaire de  $\omega$ .

#### Signe de $\chi''$ , relation avec la puissance absorbée ou dissipée

Dans l'esprit des calculs de bilan énergétique effectués au § IX.B.3.a, calculons le travail de la force extérieure pendant

7. Attention :  $\chi'$  et  $\chi''$  ne sont pas les dérivées première et seconde de la fonction  $\chi$ .



une période, entre les instants  $t$  et  $t + T$ . La force est  $m A \cos(\omega t)$ , la vitesse  $-B \omega \sin(\omega t - \theta)$ , donc

$$W = - \int_{t'=t}^{t'+T} m A B \omega \cos(\omega t') \sin(\omega t' - \theta) dt' \quad (34)$$

$$= - \frac{m A B \omega}{2} \int_{t'=t}^{t'+T} (\sin[\omega t' + \omega t' - \theta] + \sin[-\omega t' + \omega t' - \theta]) dt' \quad (35)$$

$$= - \frac{m A B \omega}{2} \int_{t'=t}^{t'+T} (\sin[2 \omega t' - \theta] - \sin \theta) dt' \quad (36)$$

$$= \frac{m A B \omega T}{2} \sin \theta, \quad (37)$$

travail qui est *positif*, puisqu'on a vu que  $\sin \theta \geq 0$  (et que  $A B > 0$ ). L'interprétation de ce signe est que le système *pompe* de l'énergie dans la source pour compenser (dans le régime permanent qu'on étudie) l'énergie dissipée par la force de frottement.

Reprenons le calcul en notations complexes en n'utilisant que la forme générale de proportionnalité entre force et vitesse. La force est

$$\text{Re}(A m e^{i \omega t}) = \frac{m A}{2} (e^{i \omega t} + e^{-i \omega t}),$$

la vitesse

$$\text{Re}(i \omega A \chi[\omega] e^{i \omega t}) = \frac{\omega A}{2} (i \chi[\omega] e^{i \omega t} - i \chi^*[\omega] e^{-i \omega t}),$$

et, dans le calcul de l'intégrale sur une période, les termes du produit en  $e^{\pm 2i \omega t}$  ne contribuent pas. Seuls les « termes croisés » en  $e^{i \omega t} \times e^{-i \omega t}$  subsistent. Finalement

$$W = - \frac{T m}{2} \omega \chi''(\omega) A^2. \quad (38)$$

Le mérite de ce dernier calcul est qu'il n'utilise pas les formules explicites trouvées pour l'oscillateur harmonique. Néanmoins, on s'attend toujours à ce que ce travail de la force extérieure soit positif (sans quoi le système fournirait « gratuitement » du travail à l'extérieur!), donc en toute généralité, pour un système linéaire qui dissipe de l'énergie,

$$\omega \chi''(\omega) < 0. \quad (39)$$

Il est utile de considérer  $\chi$  comme une fonction de la variable complexifiée  $\omega = \omega' + i \omega''$  : il faut penser à la partie imaginaire de  $\omega$  comme décrivant l'atténuation ou la croissance d'une onde excitatrice de la forme  $\text{Re}(e^{i \omega t}) = e^{-\omega'' t} \cos(\omega' t)$ . On constate sur l'expression explicite de (30) que  $\chi$  a deux *pôles*, c.-à-d. que son dénominateur a deux zéros dans le plan complexe,

$$\omega_{\pm} = \frac{i}{2 \tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4 \tau^2}}. \quad (40)$$

Ces pôles  $\omega_+$  et  $\omega_-$  se situent toujours dans le demi-plan supérieur ( $\text{Im } \omega > 0$ ), que le système soit sous-amorti ou suramorti. Cette remarque d'apparence anodine cache en fait une propriété importante, générale pour tout système linéaire : en vertu du **principe de causalité**, fondamental en physique, selon lequel les effets ne peuvent précéder leur cause, on peut montrer en effet que la fonction  $\chi(\omega)$  ne peut avoir de singularité (comme un pôle) dans le demi-plan inférieur.

Ces deux pôles sont d'autant plus proches de l'axe réel que  $\tau$  (ou  $Q$ ) est plus grand. Ainsi, on comprend mieux l'apparition de la résonance : la susceptibilité

$$\chi(\omega) = \frac{-1}{(\omega - \omega_+) (\omega - \omega_-)}$$

a un dénominateur petit quand  $\omega$  réel passe au voisinage de l'une des valeurs  $\omega_{\pm}$ , et l'amplitude, proportionnelle au module de  $\chi$ , a un maximum marqué.

## IX.E. Oscillateurs couplés

### IX.E.1. Cas de deux oscillateurs couplés

Considérons maintenant le cas d'un système à deux degrés de liberté constitué de deux points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$ , et intéressons-nous à leur mouvement près d'une position d'équilibre stable. Notons  $x_1$  et  $x_2$  l'écart de ces points par rapport à leurs positions d'équilibre respectives. On va supposer que les seules forces s'exerçant sur le système sont conservatives, donc qu'elles dérivent d'une énergie potentielle. L'énergie potentielle  $U(x_1, x_2)$  du système est la somme des énergies potentielles des forces extérieures et de l'énergie potentielle d'interaction entre  $m_1$  et  $m_2$ . Les équations du mouvement sont donc

$$m_1 \ddot{x}_1 = - \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad (41a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = - \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \quad (41b)$$

Faisons un développement limité à l'ordre 2 de  $U(x_1, x_2)$  au voisinage de l'équilibre  $(0, 0)$ . On a

$$U(x_1, x_2) = U(0, 0) + \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_{(0,0)} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{(0,0)} x_i x_j + \dots$$

$(0, 0)$  étant une position d'équilibre,  $(\partial U / \partial x_i)_{(0,0)} = 0$ . Par ailleurs, l'énergie potentielle étant définie à une constante près, on peut prendre  $U(0, 0) = 0$ . En négligeant les termes d'ordre strictement supérieur à 2, on obtient un potentiel quadratique (c.-à-d. que  $U$  est une *forme quadratique* en  $x_1$  et  $x_2$ ),

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} a_{1,1} x_1^2 + a_{1,2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_{2,2} x_2^2, \quad (42a)$$

et

$$m_1 \ddot{x}_1 + a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 = 0, \quad (42b)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2 = 0. \quad (42c)$$

$U$  peut également s'écrire

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2} {}^t X A X,$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$

et  ${}^t X = (x_1, x_2)$ <sup>8</sup>.

$A$  est une matrice symétrique (c.-à-d. que  ${}^t A = A$ ) à coefficients réels. D'après le théorème spectral (cf. cours d'algèbre linéaire), les valeurs propres de  $A$  sont réelles et  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe donc une matrice  $P$  orthogonale (c.-à-d. telle que  ${}^t P = P^{-1}$ ) et une matrice  $D$  diagonale, toutes deux réelles, telles que  $A = P D P^{-1}$ . On a donc

$$2 U(x_1, x_2) = {}^t X A X = {}^t X (P^{-1}) D P^{-1} X = ({}^t (P^{-1} X) D (P^{-1} X)) = {}^t Y D Y,$$

en posant  $Y = P^{-1} X$ .

Pour que  $(0, 0)$  soit une position d'équilibre *stable*, il faut que  $U$  y soit minimale, donc que  $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ,  $U(x_1, x_2) > U(0, 0) = 0$  : la forme quadratique  $U(x_1, x_2)$  doit être *définie positive*. Or  $2 U(x_1, x_2) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2$ , en notant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les valeurs propres de  $A$ , et  $y_1$  et  $y_2$  les composantes de  $Y$ . On en déduit que  $(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ . Comme  $\det A = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = \det P^{-1} \det D \det P = \det D = \alpha_1 \alpha_2 > 0$ , on a  $a_{1,1} a_{2,2} > a_{1,2}^2 \geq 0$ . Par ailleurs,  $\text{tr} A = a_{1,1} + a_{2,2} = \text{tr}(P D P^{-1}) = \text{tr}(D P P^{-1}) = \text{tr} D = \alpha_1 + \alpha_2 > 0$ <sup>9</sup>. Comme  $a_{1,1} a_{2,2} > 0$ , on en déduit que  $(a_{1,1}, a_{2,2}) > 0$ .

Pour simplifier la suite de la discussion, nous allons supposer que  $m_1 = m_2 := m$  et que  $a_{1,1} = a_{2,2}$ . Posons  $K = a_{1,1} + a_{2,2}$  et  $k = -a_{1,2}$ . On a

$$U = \frac{1}{2} K (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2, \quad (43a)$$

$$m \ddot{x}_1 = -K x_1 - k (x_1 - x_2), \quad (43b)$$

$$m \ddot{x}_2 = -K x_2 - k (x_2 - x_1). \quad (43c)$$

D'après ce qui précède,  $|a_{1,2}| < a_{1,1}$ , donc  $K > 0$  et l'on peut poser  $K = m \Omega_0^2$ . Le signe de  $k$  est en revanche inconnu ; posons donc  $k = \epsilon m \omega_0^2$ , avec  $\epsilon = \pm 1$ . On obtient

$$\ddot{x}_1 + (\Omega_0^2 + \epsilon \omega_0^2) x_1 - \epsilon \omega_0^2 x_2 = 0, \quad (44a)$$

$$\ddot{x}_2 + (\Omega_0^2 + \epsilon \omega_0^2) x_2 - \epsilon \omega_0^2 x_1 = 0. \quad (44b)$$

### Exemple 77

Un exemple de cette situation est fourni par le cas de deux ressorts ou de deux pendules couplés. Pour varier les exemples, décrivons le cas de deux pendules de torsion, tels des disques à symétrie cylindrique, identiques, de moments d'inertie  $I_1 = I_2 = I$ , reliés par des fils de torsion dont les constantes de torsion sont  $K$  et  $k$  (voir figure IX.4). Les équations du mouvement des deux disques sont

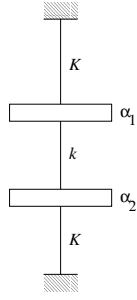
$$I \ddot{\alpha}_1 = -K \alpha_1 + k (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$I \ddot{\alpha}_2 = -K \alpha_2 + k (\alpha_1 - \alpha_2). \quad \lrcorner$$

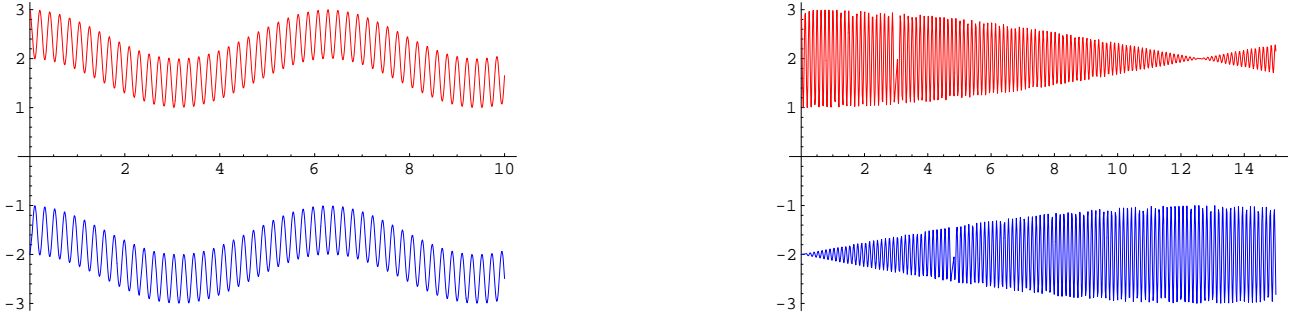
Vérifier que ces équations sont bien du type juste décrit.

8. Rappelons que la transposée  ${}^t A$  d'une matrice  $A = (a_{i,j})$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est la matrice  $B = (b_{i,j})$  à  $p$  lignes et  $n$  colonnes telle que  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = a_{j,i}$ .

9. Rappelons que la trace d'une matrice  $A = (a_{i,j})$  est  $\text{tr} A = \sum_i a_{i,i}$ .



**Figure IX.4.** Pendule de torsion. Quand le disque supérieur tourne de  $\alpha_1$  et le disque inférieur de  $\alpha_2$ , le premier est soumis à un couple  $-K \alpha_1$  par le fil supérieur, et à un couple  $-k (\alpha_1 - \alpha_2)$  par le fil intermédiaire. On a des formules analogues pour le second.



**Figure IX.5.** Graphe de  $x_1$  (décalé arbitrairement vers le haut) et  $x_2$  (décalé vers le bas) pour une amplitude initiale  $a = 1$ . À gauche, couplage fort :  $\omega_0 = 30$ ,  $\Omega_0 = 1$ . À droite, couplage faible :  $\omega_0 = 5$ ,  $\Omega_0 = 50$ .

Résolvons maintenant les équations différentielles couplées (44a) (complétées comme d'habitude par des conditions initiales, par exemple, la valeur de  $x_1$  et  $x_2$  et de leurs dérivées au temps  $t = 0$ ). La symétrie du système suggère d'introduire les combinaisons suivantes des grandeurs  $x_1$  et  $x_2$ ,

$$\xi_{\pm} = x_1 \pm x_2, \quad (45)$$

qui satisfont aux équations différentielles

$$\ddot{\xi}_+ + \Omega_0^2 \xi_+ = 0, \quad (46a)$$

$$\ddot{\xi}_- + (\Omega_0^2 + 2 \epsilon \omega_0^2) \xi_- = 0. \quad (46b)$$

Ces équations sont maintenant *découplées* : on obtient pour chacune des variables  $\xi_{\pm}$  l'équation d'un oscillateur harmonique simple ! (Noter que, dans le cas des ressorts ou pendules couplés,  $\xi_-$  est la coordonnée relative et  $\xi_+$  celle du centre de masse.) Deux *fréquences propres* du système apparaissent donc,

$$\omega_+ = \Omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_- = \sqrt{\Omega_0^2 + 2 \epsilon \omega_0^2}. \quad (47)$$

On remarquera que  $\omega_- \in \mathbb{R}$ , puisque  $\Omega_0^2 + 2 \epsilon \omega_0^2 = (K + 2 k)/m = (a_{1,1} - a_{1,2})/m$  et que  $|a_{1,2}| < a_{1,1}$ .

Les deux *modes propres* correspondant obéissent à la loi du mouvement

$$\xi_{\pm} = A_{\pm} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm}) \quad (48)$$

et les  $x_i$  ont pour expression

$$x_1 = \frac{1}{2} (\xi_+ + \xi_-) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2} (\xi_+ - \xi_-). \quad (49)$$

Les quatre constantes  $A_{\pm}$  et  $\phi_{\pm}$  sont finalement déterminées par les conditions initiales sur  $x_1$  et  $x_2$ .

Supposons par exemple qu'à  $t = 0$ ,  $x_1(0) = a \neq 0$ ,  $x_2(0) = 0$  et que  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ . Alors

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos[\omega_+ t] + \cos[\omega_- t]) = a \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right), \quad (50)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos[\omega_+ t] - \cos[\omega_- t]) = a \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right), \quad (51)$$

dont les graphes sont représentés sur la figure IX.5.

Supposons  $\epsilon = +1$ . Dans le cas d'un couplage fort (ressort ou fil de tension du milieu dur),  $\omega_0 \gg \Omega_0$ ,  $\omega_- \approx \omega_0 \sqrt{2} \gg \omega_+ = \Omega_0$ ; les deux oscillateurs oscillent ensemble, avec des oscillations rapides (de fréquence

$\omega_0/(\sqrt{2} \pi)$  élevée) et d'amplitude  $a/2$  autour de leur mouvement d'oscillation lent (de fréquence  $\Omega_0/(2 \pi)$  basse).

Dans le cas d'un couplage faible,  $\omega_0 \ll \Omega_0$ ,  $\omega_- \approx \omega_+ = \Omega_0$ ,  $\omega_- - \omega_+ \approx \omega_0^2/\Omega_0 \ll \omega_0$ ; les oscillations du premier oscillateur se transmettent peu à peu au deuxième, puis inversement. Les deux oscillateurs semblent être synchronisés à la pulsation  $(\omega_+ + \omega_-)/2$ , en quadrature de phase (déphasage de  $\pi/2$ ), mais leur amplitude varie lentement (puisque  $\omega_- - \omega_+ \ll \Omega_0$ ) comme  $\cos([\omega_- - \omega_+] t/2)$  ou  $\sin([\omega_- - \omega_+] t/2)$ . Il y a donc des battements, eux aussi en quadrature, et transfert d'énergie alternativement d'un oscillateur à l'autre.

### IX.E.2. Modes propres

Dans le cas symétrique qu'on vient d'étudier, on a vu que les combinaisons  $x_1 \pm x_2$  se comportent simplement, puisqu'elles n'oscillent que selon l'une ou l'autre des deux fréquences  $\omega_+$  et  $\omega_-$ . Dans le cas général, on peut trouver des combinaisons de  $x_1$  et  $x_2$  dotées de telles propriétés. Les combinaisons représentent ce qu'on appelle les *coordonnées normales*, décrivant les *modes propres* du système d'oscillateurs couplés (cf. § VIII.D).

### IX.E.3. Chaîne de boules et de ressorts

On considère un système constitué de particules massives identiques («boules») équidistantes de  $a$  sur une ligne droite, telle que chaque particule n'agisse que sur chacune de ses deux voisines par une force de rappel proportionnelle à leur écart à la position d'équilibre. Soit  $x_n$  la position de la  $n$ -ième particule : son équation du mouvement s'écrit

$$m \ddot{x}_n = K (x_{n-1} - 2 x_n + x_{n+1}). \quad (52)$$

Pour une chaîne très longue, (ce qui nous évite pour le moment d'avoir à spécifier les conditions aux limites), montrons qu'il existe des excitations pouvant être assimilées à des ondes se propageant avec une fréquence et une longueur d'onde données. Autrement dit, cherchons une solution de la forme

$$x_n = A \cos(\omega t - n \phi), \quad (53)$$

c.-à-d. des oscillations d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$ , déphasées de  $\phi$  entre 2 boules adjacentes. Noter que

$$\omega t - n \phi = \omega t - 2 \pi n a/\lambda = \omega t - k (n a),$$

en posant  $\phi = 2 \pi a/\lambda$  et  $k = \phi/a = 2 \pi/\lambda$ . On reconnaît bien une onde de pulsation  $\omega$ , de longueur d'onde  $\lambda$  et de nombre d'onde  $k$  se propageant le long de la chaîne.

En reportant (53) dans (52), on obtient  $m \omega^2 = 2 K (1 - \cos \phi)$ . Posons  $\omega_0^2 = K/m$  ( $\omega_0$  est la fréquence propre de chaque ressort). À chaque valeur de  $\phi$ , c.-à-d. de la longueur d'onde  $\lambda$ , correspond une fréquence  $\omega$  d'une « onde ». À basse fréquence, c.-à-d.  $\omega \ll \omega_0$ , on a  $\phi \ll 1$ ; en développant  $1 - \cos \phi$ , on obtient  $\phi \approx \omega/\omega_0$ , donc un nombre d'onde  $k = 2 \pi/\lambda = \omega/(a \omega_0)$ . Le nombre d'onde est proportionnel à la fréquence, comme pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide. Cette onde se déplace à la vitesse  $v = \omega/k \approx a \omega_0$ .