Chapitre V

Intégrales

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel normé. Dans les sections V.a à V.c, a et b sont des réels, et f est définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans E ($f \in \mathcal{F}([a, b], E)$).

V.a. Intégrale de Riemann

Définition 53 (intégrale d'une fonction en escalier)

Une fonction f est dite *en escalier* (ce que l'on notera $f \in \mathcal{E}([a, b], E)$) s'il existe une subdivision finie $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ *adaptée* à f, c.-à-d. telle que $\forall\, i \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall\, x \in]x_i, x_{i+1}[$, $f(x) = f_i$, où $f_i \in E$ est une constante.

On appelle *intégrale* de f et l'on note $\int_a^b f$ la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} f_i\,(x_{i+1} - x_i)$. ⌟

Remarque

Cette définition a un sens car toute subdivision adaptée à f donne le même résultat. ⌟

Définition 54 (intégrale de Riemann)

Une fonction $f\colon [a, b] \to E$ est *intégrable au sens de Riemann* s'il existe une suite de fonctions (cf. § VI.a) $(\phi_n) \in \mathcal{E}([a, b], E)$ et une suite de fonctions $(\psi_n) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [a, b]$, on ait $\|f(x) - \phi_n(x)\| \leqslant \psi_n(x)$

et

2. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n = 0$.

On appelle *intégrale de Riemann* de f et on note $\int_a^b f$ la quantité $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n$. ⌟

Remarques

1. Pour mettre en évidence la variable d'intégration, on écrira souvent $\int_{x=a}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ au lieu de $\int_a^b f$.
   Les notations $\int_{[a, b]} f$ et $\int_{x\in[a, b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont aussi utilisés ; elles présentent l'intérêt d'être généralisables aux intégrales multiples sur un domaine quelconque.
2. Le nombre $\int_a^b f$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f définie sur $[a, b]$) est parfois appelé *intégrale définie*, par opposition, d'une part, à l'*intégrale indéfinie* ou *primitive* de f, qui est la fonction $x \mapsto \int_a^x f$, et, d'autre part, à l'*intégrale impropre*, où f n'est pas définie en a ou b.
3. Il existe d'autres définitions plus générales (mais plus compliquées) de l'intégrale que celle de Riemann, notamment celle de Lebesgue. Celle-ci permet ainsi d'attribuer une valeur (0 en l'occurrence) à $\int_0^1 f$ pour la fonction valant $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En revanche, cette fonction ne peut être approchée par une suite de fonctions en escalier et n'est donc pas intégrable au sens de Riemann.
4. Si la fonction f est en escalier, la définition 54 redonne évidemment le même résultat que la définition 53. Toutes les définitions de l'intégrale (Riemann, Lebesgue, Stieltjes) donnent le même résultat pour les fonctions en escalier et, plus généralement, pour les fonctions continues par morceaux.
5. La valeur de f est indépendante des suites de fonctions ϕ_n et ψ_n. ⌟

Théorème 57

Si $f\colon [a, b] \to E$ est intégrable sur $[a, b]$, alors $\|f\|\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a, b]$ et $\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. ⌟

Théorème 58
Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, f est intégrable sur $[a, b]$. ⌟

Théorème 59
Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et est intégrable sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} S_i, \quad \text{où} \quad S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\,\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$ ⌟

Pour comprendre la signification du terme de droite, supposons f positive et découpons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de largeur identique, $(b-a)/n$: S_i est l'aire du trapèze compris entre les droites $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et la corde reliant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Comme $\lim_{n\to 0}((b-a)/n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} S_i$ est l'aire de la surface comprise entre le graphe de f et les droites $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.

$\sum_{i=0}^{n-1} S_i$ est un cas particulier de *somme de Riemann*. Il en existe d'autres : par exemple

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\frac{b-a}{n} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{n-1} f\!\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\frac{b-a}{n}\,;$$

si f est intégrable, toutes convergent vers $\int_a^b f$.

Définition 55
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Une fonction F est une *primitive* de f sur $[a, b]$ si $\forall\, x \in [a, b]$, F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$. ⌟

Théorème 60 (théorème fondamental de l'analyse)
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, la fonction $F\colon x \mapsto \int_{t=a}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

En outre, si F est une primitive de f, on a $\int_{x=a}^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_{x=a}^b$. ⌟

Remarques
1. Si F est une primitive de f, les primitives de f sont les fonctions de la forme $\Phi = F + \text{constante}$ et elles seules. Quelle que soit la primitive Φ de f, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[\Phi(x)\big]_a^b$.
2. La *primitive* d'une fonction f est aussi appelée *intégrale indéfinie* et est souvent notée $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$, sans préciser la borne inférieure de l'intégrale, puisque changer celle-ci revient à ajouter une constante. La notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est en revanche à éviter. ⌟

V.B. Propriétés de l'intégrale définie

L'intégration est une opération linéaire :

Théorème 61
Soient E un K-espace vectoriel, $\lambda \in K$, et f et g deux applications à valeurs dans E et intégrables sur $[a, b]$. Alors les intégrales ci-dessous existent,

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

et

$$\int_a^b (\lambda\, f) = \lambda \int_a^b f.$$ ⌟

Par extension, on peut donc intégrer une somme *finie* de fonctions terme à terme.

Théorème 62
Soient f et g deux applications à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables sur $[a, b]$.

Si $\forall\, x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$. ⌟

L'inverse est évidemment faux.

Théorème 63 (relation de Chasles)
Si $c \in [a, b]$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Définition 56
Si $b < a$, on pose $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Cette définition est cohérente avec la relation de Chasles, puisque $\int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f = -\int_b^a f + \int_b^a f = 0$. En revanche, $\int_{[a,\, b]} f = \int_{[b,\, a]} f := \int_b^a f$ si $b < a$.

Inégalité de (Cauchy-)Schwarz

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Pour tout réel λ, on peut écrire l'inégalité triviale $\int_a^b (f(x) + \lambda\, g(x))^2 \,\mathrm{d}x \geqslant 0$, soit

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x + 2\, \lambda \int_a^b f(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \geqslant 0. \tag{1}$$

Le trinôme du second degré en λ est positif ou nul pour tout λ réel si et seulement si son discriminant est négatif ou nul. En effet, si le discriminant est strictement positif, le trinôme admet deux racines réelles distinctes et est négatif entre celles-ci puisque $\int g^2 \geqslant 0$. On a donc

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x}\, \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 \,\mathrm{d}x}\,, \tag{2}$$

une inégalité parfois très utile.

On peut généraliser ceci au cas de fonctions à valeurs complexes :

Théorème 64 (inégalité de (Cauchy-)Schwarz)
Soient f et g deux applications intégrables de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.
On a

$$\left|\int_a^b \overline{f}\, g\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2}\, \sqrt{\int_a^b |g|^2}.$$

Cette inégalité rappelle l'inégalité sur le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|,$$

et il y a de bonnes raisons à cela : $\int_a^b \overline{f}\, g$ définit en effet un produit scalaire (hermitien) entre des fonctions f et g continues sur $[a, b]$, et $\int_a^b \overline{f}\, f = \int_a^b |f|^2$ est le carré de la norme associée. On a d'ailleurs l'inégalité triangulaire (dite aussi de Minkowski dans ce cas)

$$\sqrt{\int_a^b |f + g|^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b |f|^2} + \sqrt{\int_a^b |g|^2}.$$

V.c. Méthodes d'intégration

En pratique, pour calculer effectivement une intégrale, il est indispensable de bien connaître les formules de *dérivation* des fonctions simples (voir appendice IV.2) et de les combiner avec quelques astuces.

V.c.1. Intégration par parties

Théorème 65
Soient $(f, g) \in (C^1([a, b], \mathbb{K}))^2$.
Alors,

$$\int^x f'\, g = f\, g - \int^x f\, g'$$

et

$$\int_a^b f'\, g = \big[f\, g\big]_a^b - \int_a^b f\, g'.$$

Ceci découle de $(f\ g)' = f'\ g + f\ g'$.

Ce théorème permet donc de calculer la primitive d'une fonction h de la forme $h = f'\ g$ si l'on connaît la primitive de $f\ g'$. Ça ne présente d'intérêt que si cette dernière est plus simple à calculer !

Exemple 50

$$\int^x \ln\xi\ \mathrm{d}\xi = \int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\xi} \ln\xi\ \mathrm{d}\xi = x\ \ln x - \int^x \xi\ \frac{\mathrm{d}(\ln\xi)}{\mathrm{d}\xi}\ \mathrm{d}\xi = x\ \ln x - \int^x \xi\ \frac{1}{\xi}\ \mathrm{d}\xi = x\ (\ln x - 1). \tag{3}$$

$\lrcorner$

Exercice

Calculer de même $\int^x \xi\ \ln\xi\ \mathrm{d}\xi$. $\lrcorner$

V.c.2. Changement de variable

Théorème 66

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a \leqslant b$), I un intervalle de $\mathbb{R}$, $g \in C^1([a, b], I)$ et $f \in C^0(I, \mathbb{R})$.

Alors,

$$\int_{t=a}^{b} f(g(t))\ g'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x=g(a)}^{g(b)} f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{4}$$

$\lrcorner$

Remarques

- On a cette fois utilisé la propriété de dérivation d'une fonction composée, $(F \circ g)' = g' \times F' \circ g$, et on l'a appliquée à $f = F'$.
- Pour se souvenir de cette formule, le plus simple est de remplacer x par $g(t)$ partout :
  - dans la fonction f ;
  - dans la différentielle, ce qui donne $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\ \mathrm{d}t = g'(t)\ \mathrm{d}t$;
  - dans les bornes. Donc, si t varie de a à b, x doit varier de $g(a)$ à $g(b)$. $\lrcorner$

Exemple 51

$$\int^x \frac{\xi\ \mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{2} \int^t \frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau} = \frac{1}{2} \ln(1+t) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2), \tag{5}$$

où on a effectué le changement de variable $x \mapsto t = x^2$. $\lrcorner$

Exemple 52

Pour calculer $\int^x \mathrm{d}\xi/(1+\xi^2)$, on pose $x = \tan t$, et l'intégrale devient simplement $\int^t \mathrm{d}\tau$, donc

$$\int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} = t = \arctan x, \tag{6}$$

la fonction réciproque de $\tan x$, définie pour tout x et prenant ses valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

De même,

$$\int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin x, \tag{7}$$

la fonction réciproque de $\sin x$, définie sur $[-1, 1]$ et prenant ses valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$. $\lrcorner$

L'équation (4) peut aussi s'utiliser de droite à gauche pour calculer $\int_{x=\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x$, où $(\alpha, \beta) \in I^2$ et $f \in C^0(I, \mathbb{R})$. Il faut seulement qu'existent $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g \in C^1([a, b], I)$ tels que $g(a) = \alpha$ et $g(b) = \beta$. On a alors

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t=a}^{b} f(g(t))\ f'(t)\ \mathrm{d}t.$$

Il est essentiel que $g([a, b]) \subset I$ ou, ce qui revient au même, que $f \in C^0(g([a, b]), \mathbb{R})$. Or, d'une manière générale,

$$(g(a) = \alpha,\ g(b) = \beta) \not\Longrightarrow g([a, b]) = [\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}]\ (\subset I).$$

C'est le cas en revanche si g est bijective sur $[a, b]$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 67

Soient $(\alpha, \beta, a, b) \in \mathbb{R}^4$ (avec $\alpha \leqslant \beta$), $f \in C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, et g une application bijective et C^1 de $[a, b]$ (ou $[b, a]$ si $b < a$) dans $[\alpha, \beta]$ telle que $g(a) = \alpha$ et $g(b) = \beta$.

Alors,

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t=g^{\langle -1\rangle}(\alpha)}^{g^{\langle -1\rangle}(\beta)} f(g(t))\ g'(t)\ \mathrm{d}t. \tag{8}$$

┘

Remarque

g étant continue, elle est bijective si elle est strictement monotone. Comme elle est même C^1, il suffit que $\forall\ t \in [a, b]$, $g'(t) \neq 0$. ┘

Si la fonction g n'est pas strictement monotone, il est plus sage de décomposer l'intervalle d'intégration en sous-intervalles où elle l'est. Faute de quoi, on risque de trouver des absurdités.

V.c.3. Changement de variable pour une intégrale multiple

La théorie des intégrales multiples dépassant le cadre de ce cours, nous allons simplement expliquer comment procéder à un changement de variable, une technique très utile en physique.

Soit une bijection

$$g = (g_1, \ldots, g_n) \colon \begin{aligned} D_t &\longrightarrow D_x, \\ t = (t_1, \ldots, t_n) &\longmapsto x = (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

où D_t et D_x sont les « domaines » de $\mathbb{R}^n$ balayés par t et x, et $x_i = g_i(t)$. On a

$$\int \cdots \int_{D_x} f(x)\ \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int \cdots \int_{D_t} f(g[t])\ |\text{dét}\, J(t)|\ \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n,$$

où

$$J(t) = \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial t_1 & \ldots & \partial g_1/\partial t_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g_n/\partial t_1 & \ldots & \partial g_n/\partial t_n \end{pmatrix}$$

est la *matrice jacobienne* et dét $J(t)$, son déterminant, porte le nom de *jacobien*.

Dans le cas où $n = 1$, on retrouve bien le résultat obtenu précédemment : le jacobien vaut alors $\partial g/\partial t = g'(t)$ et $\int_{D_x} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{D_t} f(g[t])\ |g'(t)|\ \mathrm{d}t$.

Remarque

Si $D_x = [\alpha, \beta]$ et que $a = g^{\langle -1\rangle}(\alpha)$ et $b = g^{\langle -1\rangle}(\beta)$, on a $D_t = [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$. Il ne faut donc pas oublier la valeur absolue autour du jacobien. En effet, si g est décroissante, $D_t = [b, a]$ et l'on retrouve bien

$$\int_{x=\alpha}^{\beta} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t=b}^{a} f(g[t])\ |g'(t)|\ \mathrm{d}t = -\int_{t=b}^{a} f(g[t])\ g'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{t=a}^{b} f(g[t])\ g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

┘

Considérons à titre d'exemple le passage des coordonnées polaires ($t_1 = \rho$, $t2 = \phi$) aux coordonnées cartésiennes ($x_1 = x$, $x_2 = y$) ※[1],

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \colon \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = g_1(\rho, \phi) = \rho\ \cos\phi \\ y = g_2(\rho, \phi) = \rho\ \sin\phi \end{pmatrix}. \tag{9}$$

La matrice jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\rho\ \cos\phi)}{\partial\rho} = \cos\phi & \dfrac{\partial(\rho\ \cos\phi)}{\partial\phi} = -\rho\ \sin\phi \\ \dfrac{\partial(\rho\ \sin\phi)}{\partial\rho} = \sin\phi & \dfrac{\partial(\rho\ \sin\phi)}{\partial\phi} = \rho\ \cos\phi \end{pmatrix},$$

donc dét $J = \rho$ et

$$\iint_{D_{(x,\, y)}} f(x, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{D_{(\rho,\, \phi)}} f(\rho\ \cos\phi, \rho\ \sin\phi)\ \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi.$$

Remarque : $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ et $\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi$ sont respectivement les éléments de surface en coordonnées cartésiennes et polaires.

1. x représente ici l'abscisse x_1 et non le couple (x_1, x_2).

Exemple 53

Calculons $\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ (cf. § V.D.2 pour la définition de l'intégrale quand les bornes sont infinies). Au domaine $D_{(x,\, y)} =]-\infty, \infty[\times]-\infty, \infty[$ correspond le domaine $D_{(\rho,\, \phi)} = [0, \infty[\times [0, 2\,\pi[$. Par ailleurs, $x^2 + y^2 = \rho^2$, donc

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{\rho=0}^{\infty} \int_{\phi=0}^{2\,\pi} e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\phi = 2\,\pi \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\rho^2}\, \rho\, d\rho.$$

$2\,\pi\,\rho\, d\rho$ est la surface comprise entre les cercles de centre O et de rayons ρ et $\rho + d\rho$ ($2\,\pi\,\rho$ est le périmètre).

Par application du changement de variable $\rho \mapsto \lambda = \rho^2$, on trouve que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 2\,\pi \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-\lambda}\, \frac{d\lambda}{2} = \pi.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right) \\ &= \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Par changement de variable $x \mapsto (x - \mu)/(\sqrt{2}\,\sigma)$, on a encore

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\,\sigma^2)}\, dx = \sqrt{2\,\pi}\,\sigma, \tag{10}$$

une intégrale fort importante en théorie des probabilités. En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\,\sigma^2)}$$

est la densité de probabilité d'un processus gaussien de moyenne μ et de variance σ^2. L'intégrale (probabilité totale) est bien égale à 1. ⌟

V.D. Intégrales impropres

On vient de voir que si la fonction $f(x)$ est définie et continue par morceaux en tout point d'un intervalle $[a, b]$ de la droite réelle, elle est intégrable au sens de Riemann sur cet intervalle : l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\, dx$ existe et est finie.

Si $b = \infty$ ou si b est fini mais est une singularité de f (c.-à-d. que f n'est pas définie en b), f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a, b[$. On peut néanmoins dans certains cas définir une intégrale dite impropre sur cet intervalle.

Définition 57

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé et $f : I \to E$ une application.

f est *localement intégrable* sur I si et seulement si $\forall\, [a, b] \subset I$, $\int_a^b f$ existe. ⌟

Définition 58

Soit $f : [a, b[\to E$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et E un espace vectoriel normé.

- Si f est localement intégrable sur $[a, b[$ et
- si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$ existe et est finie,

on dit que l'*intégrale impropre* en b (ou *intégrale généralisée*) $\int_a^b f$ converge et l'on note $\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$. ⌟

(On trouve aussi parfois la notation $\int_a^{\to b} f$ pour souligner qu'une intégrale est impropre en b.)

On définit de la même manière l'intégrale impropre sur $]a, b]$ par $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si $a = -\infty$ ou est une singularité de f. Tous les résultats donnés ci-après pour une intégrale impropre sur $[a, b[$ resteront applicables.

Si l'intégrale est impropre en ses deux bornes, elle n'est définie que s'il existe un point $c \in\,]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent *séparément*; pour tout $d \in\,]a, b[$, on a alors convergence de $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$, et $\int_a^d f + \int_d^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. On pose donc $\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^0 f + \lim_{x\to\infty} \int_0^x f$. En revanche, $\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f$ peut très bien exister sans que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe.

Théorème 68

Soient $f\colon [a, b[\, \to E$ une application et $b \in \mathbb{R}$ (donc b est à distance finie). S'il existe une application $g\colon [a, b] \to E$ prolongeant f en b et telle que $\int_a^b g$ existe au sens de Riemann, alors $\int_a^b f$ existe et $\int_a^b f = \int_a^b g$. On dit alors que $\int_a^b f$ est *faussement impropre*. ⌟

En particulier, une fonction continue sur $[a, b[$ et prolongeable par continuité sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$, ce qu'on savait d'ailleurs déjà puisqu'une telle fonction est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Théorème 69 (critère de Cauchy)

Soient E un espace vectoriel normé complet et $f\colon [a, b[\, \to E$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ dont l'intégrale est impropre en b.

$\int_a^b f$ converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy, c.-à-d. si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, c \in [a, b[,\ \forall\, (x, y) \in [c, b[^2,\ \left\| \int_x^y f \right\| \leqslant \epsilon.$$

⌟

Définition 59

$\int_a^b f$ est dite *absolument convergente* si $\int_a^b \|f\|$ est convergente.

Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*. ⌟

Théorème 70

Soient E un espace vectoriel normé complet et $f\colon [a, b[\, \to E$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ dont l'intégrale est impropre en b.

Si $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f$ est convergente et $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. ⌟

Théorème 71

Soit $f \geqslant 0$ une fonction localement intégrable de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}^+$.

$\int_a^b f$ converge si et seulement si $\exists\, M \geqslant 0,\ \forall\, x \in [a, b[,\ \int_a^x f \leqslant M$. ⌟

Théorème 72

Soient f et g deux fonctions localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.

$\int_a^b g$ converge $\Longrightarrow$ ($\int_a^b f$ converge et $0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$).

$\int_a^b f$ diverge $\Longrightarrow \int_a^b g$ diverge. ⌟

Théorème 73

Soient f et g deux fonctions localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et $g \geqslant 0$.

- Si $\int_a^b g$ converge,

$$f = O(g) \text{ en } b^- \Longrightarrow \int_a^b f \text{ converge et } \int_x^b f = O\left(\int_x^b g\right) \text{ quand } x \to b^-.$$

  On obtient la même chose en remplaçant « $= O(\ldots)$ » par « $= o(\ldots)$ » ou « $\simeq$ » à gauche et à droite de « $\Longrightarrow$ ».

- Si $\int_a^b g$ diverge,

$$f = O(g) \text{ en } b^- \Longrightarrow \int_a^x f = O\left(\int_a^x g\right) \text{ quand } x \to b^-.$$

On obtient la même chose en remplaçant « $= O(\dots)$ » par « $= o(\dots)$ » ou « $\simeq$ » à gauche et à droite de « $\Longrightarrow$ ».

En outre, si $f \simeq g$ en b^-, $\int_a^b f$ diverge. ⌟

Théorème 74 (intégration par parties)

Soient $(f, g) \in (C^1([a, b[, \mathbb{R}))^2$.

Si $\lim_{b^-}(f\ g)$ existe et que $\int_a^b f\ g'$ converge, alors $\int_a^b f'\ g$ converge et

$$\int_a^b f'\ g = \big[f\ g\big]_a^{b^-} - \int_a^b f\ g'.$$

⌟

Théorème 75 (changement de variable)

Soient $(\alpha, a) \in \mathbb{R}^2$, $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f \in C^0([\alpha, \beta[, \mathbb{R})$, et g une fonction bijective et C^1 de $[a, b[$ (ou $]b, a]$) dans $[\alpha, \beta[$ telle que $g(a) = \alpha$ et $\lim_{t\to b^-} g(t) = \beta$.

$\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_a^b f[g(t)]\ g'(t)\ \mathrm{d}t$ converge ; si c'est le cas,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f[g(t)]\ g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

⌟

V.D.1. Intégrales impropres avec une singularité sur un intervalle fini

Supposons maintenant que la fonction soit définie sur l'intervalle ouvert $[a, b[$, mais qu'elle ait un point singulier en b, c.-à-d. un point où elle n'est pas définie, soit qu'elle tende vers l'infini, soit qu'elle oscille de plus en plus vite au voisinage de ce point. (Exemple du premier cas, $1/(x-b)$; du deuxième, $\sin(1/(x-b))$).

Exemple 54

$\int_0^1 \sin(1/x)\ \mathrm{d}x$ est absolument convergente. En effet, $0 \leqslant |\sin(1/x)| \leqslant 1$. Or, $\forall\ x \in\ ]0, 1]$, $\int_x^1 |\sin(1/x')|\ \mathrm{d}x' \leqslant 1 - x \leqslant M = 1$, donc $\int_0^1 |\sin(1/x)|\ \mathrm{d}x$ converge par application du th. 71, ainsi que $\int_0^1 \sin(1/x)\ \mathrm{d}x$ d'après le th. 70. Le même raisonnement s'applique à $\int_0^1 \cos(1/x)\ \mathrm{d}x$.

$\int_0^1 \sin(1/x)/x\ \mathrm{d}x$ est également convergente.En effet, on obtient en intégrant par parties que

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x,$$

qui est bien finie. La non-convergence absolue de l'intégrale $\int_0^1 \sin(1/x)/x\ \mathrm{d}x$ est en revanche plus délicate à établir et nécessite de la minorer par une série divergente. ⌟

Exemple 55

Considérons la fonction $g_\alpha(x)\colon x \mapsto (b-x)^{-\alpha}$ (avec $x < b$). Comme sa primitive est

$$\int^x (b-x')^{-\alpha}\ \mathrm{d}x' = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,(b-x)^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\ln(b-x) & \text{si } \alpha = 1, \end{cases} \tag{11}$$

cette fonction est intégrable en b si $\alpha < 1$, et non intégrable si $\alpha \geqslant 1$.

On obtient le même résultat pour les fonctions $x \mapsto (x-a)^\alpha$ (avec $x > a$). ⌟

Comme dans les cas précédemment étudiés de limites, on peut trouver des conditions suffisantes d'intégrabilité (c.-à-d. de convergence de l'intégrale) pour une fonction *positive* en la minorant ou en la majorant par des fonctions connues comme les $g_\alpha(x)$ ci-dessus, ou en en faisant une étude asymptotique. Ainsi, si A est une constante et

1. si $0 \leqslant f(x) \leqslant A/(b-x)^\alpha$ pour $\alpha < 1$, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ converge ;
2. si $f(x) \geqslant A/(b-x)^\alpha > 0$ pour $\alpha \geqslant 1$, l'intégrale diverge ;
3. si $f(x) \simeq A/(b-x)^\alpha$ quand x tend vers b^-, son intégrale de a à b est convergente si $\alpha < 1$, et divergente si $\alpha \geqslant 1$.

Remarque

Il faut bien noter qu'il est donc possible que $f(x) \to \infty$ quand $x \to b$ mais que $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ soit *finie* ! Il suffit de considérer une des fonctions $(x-0)^{-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, par exemple $1/\sqrt{x}$ en 0. ⌟

Exemple 56

Soit $f(x) = 1/(x\,(x^2+1))$, à intégrer de 0 à 1.

On montre que $f(x) = 1/x - x/(x^2+1)$. Seule l'intégration du premier terme pose problème : dans le cas présent, elle est impossible en 0. Plus simplement, $f(x) \simeq 1/x$ quand $x \to 0$, donc n'est pas intégrable.

Même discussion (avec la conclusion opposée !) pour $g(x) = \sqrt{x}\, f(x)$. ⌟

Exercice

Vérifier que $\int \mathrm{d}x/\sin(x-b) = \ln|\tan((b-x)/2)|$ en utilisant la formule de trigonométrie $\sin u = 2\tan(u/2)/(1+\tan^2(u/2))$. En déduire que l'intégrale $\int_0^b \mathrm{d}x/\sin(x-b)$ n'est pas définie. Donner un argument plus simple reposant sur un équivalent. ⌟

Exercice

Soient P et Q deux polynômes. Discuter l'intégrabilité d'une fraction rationnelle $\int_a^b P(x)/Q(x)\, \mathrm{d}x$ si Q a des zéros sur l'intervalle $[a, b]$. ⌟

Singularité logarithmique

Un cas important en pratique, qui n'est pas couvert par la comparaison avec les fonctions g_α, est celui d'une singularité logarithmique. Supposons que, quand $x \to b$, $f(x) \simeq \ln(b-x)$. Se rappelant la primitive de $\ln x$,

$$\int \ln x\, \mathrm{d}x = \int (x)' \ln x\, \mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1), \tag{12}$$

on vérifie que $\int^b \ln(b-x)\, \mathrm{d}x$ converge et donc, par comparaison, que c'est aussi le cas de l'intégrale de la fonction f considérée : *une singularité logarithmique à distance finie est intégrable.*

Exercice

Montrer que $\int^b \ln^n(b-x)\, \mathrm{d}x$ converge (intégration par parties et récurrence), que $\int^b \mathrm{d}x/\ln(b-x)$ est absolument convergente, et que $\int^b \ln(\ln(b-x))\, \mathrm{d}x$ converge (intégration par parties). ⌟

V.D.2. Intégrales impropres avec intervalle d'intégration infini

Comme dans le cas d'une singularité à distance finie examiné au paragraphe précédent, dans le cas de fonctions positives, la condition d'intégrabilité en $\pm\infty$ se ramène à l'étude du comportement de la fonction $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$. En utilisant à nouveau les fonctions puissances $x^{-\alpha}$ comme étalons de comparaison, $\int^\infty \mathrm{d}x/x^\alpha$ a une limite si $\alpha > 1$, et n'en a pas si $\alpha \leqslant 1$. Donc, si A est une constante et

1. si $0 \leqslant f(x) \leqslant A/x^\alpha$ pour $\alpha > 1$, $\int_a^\infty f$ existe ;
2. si $f(x) \geqslant A/x^\alpha > 0$ pour $\alpha \leqslant 1$, $A > 0$, l'intégrale diverge ;
3. si $f(x) \simeq A/x^\alpha$ quand $x \to \infty$, son intégrale de a à ∞ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$.

Exemple 57

L'intégrale $\int_0^\infty P(x)/Q(x)\, \mathrm{d}x$, où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs p et q, et où l'on suppose toutes les racines de Q strictement négatives ou complexes, converge pour $p \leqslant q-2$. ⌟

Attention : le fait que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ n'est pas une condition *suffisante* de convergence de $\int^\infty f$.

On a en effet avec les fonctions $1/x^\alpha$, $\alpha \leqslant 1$, des exemples de fonctions qui tendent vers zéro à l'infini, mais pas assez vite pour assurer la convergence de l'intégrale.

Exercice

Étudier la convergence de $\int^\infty \mathrm{d}x/(x \ln^\alpha x)$ selon la valeur de α. ⌟

Le fait que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ n'est pas non plus une condition *nécessaire* de convergence de $\int^\infty f$.

Exemple 58

Un exemple est fourni par l'intégrale de Fresnel, $\int_1^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, qu'on rencontre en optique dans la théorie de la diffraction de la lumière et dont on démontre qu'elle converge, bien que $|\sin(x^2)|$ n'ait pas de limite en $+\infty$.

Pour montrer la convergence, on peut effectuer un changement de variable $x \mapsto u = x^2$, suivi d'une intégration par parties, qui amène à une intégrale absolument convergente :

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^\infty \sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\right]_1^\infty - \frac{1}{4}\int_1^\infty \cos u\,\frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}. \tag{13}$$

┘

On ne peut donc rien dire si f n'admet pas de limite, et ce d'ailleurs même si f est de signe constant. En revanche, si f admet une limite non nulle en $+\infty$, $\int^\infty f$ diverge.