

# Chapitre VII

## SÉRIES DE FOURIER

### VII.A. Préambule sur les fonctions périodiques

#### Définition 67

Soient  $f$  une fonction d'une variable réelle et  $T$  un réel.

$f$  est dite *T-périodique* si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \text{dom } f \iff x + T \in \text{dom } f$$

et

$$x \in \text{dom } f \implies f(x + T) = f(x).$$

On dit alors que  $T$  est *une période* (parmi d'autres éventuellement).

$f$  est dite *périodique* (tout court) s'il existe un  $T \neq 0$  tel que  $f$  soit  $T$ -périodique ; elle est dite *apériodique* sinon.  $\lrcorner$

Toute fonction définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier est bien sûr 0-périodique. L'intérêt de considérer 0 comme une période est que l'ensemble des périodes constitue un groupe pour l'addition : la somme ou la différence de deux périodes est une période, de même que tout multiple entier d'une période.

#### Définition 68

Soient  $f$  une fonction périodique et  $\tau := \inf\{T > 0 \mid f \text{ est } T\text{-périodique}\}$ . Si  $\tau > 0$  (strictement),  $\tau$  porte le nom de *plus petite période* de  $f$ .  $\lrcorner$

#### Remarques

- La plus petite période sera souvent appelée *la période*. Par exemple, la (plus petite) période de  $x \mapsto \sin x$  ou de  $x \mapsto \cos x$  est  $2\pi$  ; celle de  $x \mapsto \tan x$  est  $\pi$ .
- La plus petite période n'est pas définie pour une fonction constante. En effet, pour une telle fonction, tout réel est une période. Or  $\inf \mathbb{R}^{++} = 0$ .
- Toute fonction périodique continue par morceaux et non constante admet une plus petite période.
- En revanche, on peut trouver des fonctions non continues par morceaux périodiques ne possédant pas de plus petite période. Par exemple,

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En effet, pour tout  $T$  rationnel,  $f$  est  $T$ -périodique (si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $y \in \mathbb{Q}$ ,  $x + y \in \mathbb{Q}$  ; et si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ). Or  $\inf \mathbb{Q}^{++} = 0$ .  $\lrcorner$

Une fonction de période  $T > 0$  est complètement définie par sa restriction à tout intervalle  $[a, a + T[$  (ou  $]a, a + T]$ ) de longueur  $T$  ; on dira qu'un tel intervalle est un *intervalle-période* ou, au risque d'une confusion avec la définition 67, *une période*. Si la fonction est dérivable, sa dérivée est aussi périodique de même période.

### Théorème 88

Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T > 0$  et intégrable, son intégrale sur un intervalle-période de longueur  $T$  ne dépend pas de l'intervalle choisi :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_b^{b+T} f(x) \, dx. \quad (1)$$

#### Preuve

En effet,

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^{b+T} f(x) \, dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x) \, dx$$

et, dans le dernier terme, le changement de variable  $x = x' + T$  permet d'écrire

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x) \, dx = \int_b^a f(x') \, dx' = - \int_a^b f(x) \, dx.$$

On va utiliser fréquemment cette propriété, en choisissant la période la plus propice, c.-à-d. celle rendant le calcul le plus simple. Par exemple, si la fonction est périodique et impaire,  $\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = 0$ , et donc  $\forall a$ ,  $\int_a^{a+T} f(x) \, dx = 0$ .

Les fonctions périodiques interviennent de façon très courante dans la description des phénomènes physiques ou biologiques. La période n'est pas nécessairement un temps ; elle peut également être de nature spatiale, par exemple la longueur d'onde d'un phénomène ondulatoire ou la maille d'un réseau cristallin, etc. Bien sûr, dans un système physique réel, il n'est pas possible d'effectuer des translations arbitrairement grandes du temps ou d'une coordonnée d'espace : la notion de fonction périodique est une idéalisation de la réalité physique, quand la durée d'observation ou les dimensions de l'échantillon sont beaucoup plus grandes que les périodes observées.

## VII.B. Séries trigonométriques

Les fonctions trigonométriques  $x \mapsto \cos(n x)$  et  $x \mapsto \sin(n x)$  sont évidemment des fonctions périodiques de période  $T = 2 \pi$ . C'est le cas également de tout *polynôme trigonométrique* de degré  $n$ , c.-à-d. de toute expression de la forme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k x) + b_k \sin(k x)) \quad \text{où } (a_n, b_n) \neq (0, 0) \quad (2)$$

(remarquer qu'il s'agit d'une combinaison linéaire de  $2n + 1$  termes), et, plus généralement, de la somme de toute *série trigonométrique*,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)), \quad (3)$$

aux points où elle converge.

Une telle série converge notamment dans les deux cas suivants :

1. Si les séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes, comme  $|\cos(n x)| \leq 1$  et  $|\sin(n x)| \leq 1$ , la série de fonctions  $S_n$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ . Elle est donc uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$  et sa limite est une fonction continue car les fonctions  $x \mapsto \cos(n x)$  et  $x \mapsto \sin(n x)$  sont continues.

Multiplions la série par  $\cos(k x)$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ ) et intégrons entre 0 et  $2 \pi$ . La convergence étant uniforme, on peut intervertir la somme et l'intégrale (le  $\cos(k x)$  ne change rien car il est borné) :

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{2 \pi} \cos(k x) S(x) \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{x=0}^{2 \pi} \cos(k x) \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{x=0}^{2 \pi} \cos(n x) \cos(k x) \, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{x=0}^{2 \pi} \sin(n x) \cos(k x) \, dx \\ &= \pi a_k \end{aligned}$$

quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ . De même,

$$\int_{x=0}^{2 \pi} \sin(k x) S(x) \, dx = \pi b_k.$$

Inversement, on peut calculer les coefficients  $a_k(f)$  et  $b_k(f)$  pour toute fonction  $f$  suffisamment régulière, mais rien ne prouve que (3) convergera vers  $f$ , ni même convergera vers quoi que ce soit.

$\sum a_n$  et  $\sum b_n$  sont absolument convergentes en particulier si

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \text{pour} \quad \alpha > 1 \quad \text{et} \quad \beta > 1. \quad (4)$$

La somme de la série est éventuellement dérivable terme à terme si les séries  $\sum n a_n$  et  $\sum n b_n$  sont elles-mêmes absolument convergentes. On peut alors écrire

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n \cos(n x) - n a_n \sin(n x)), \quad (5)$$

avec une série convergente au membre de droite. Par exemple, si  $\alpha > 2$  et  $\beta > 2$  dans (4), la somme de la série (3) est continue et dérivable, et sa dérivée, donnée par (5), est elle-même continue.

2. Quelles que soient les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  décroissantes et tendant vers zéro, la série trigonométrique converge pour tout  $x \neq 2 \ell \pi$ , où  $\ell \in \mathbb{Z}$ . (Par contre, on ne peut rien dire pour  $x = 0 \pmod{2 \pi}$ .)

Ceci est une conséquence du théorème d'Abel (th. 43). On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n e^{i k x} = e^{i x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i k x} = e^{i x} \frac{1 - e^{i n x}}{1 - e^{i x}} = \frac{e^{i x} e^{i n x/2}}{e^{i x/2}} \frac{e^{-i n x/2} - e^{i n x/2}}{e^{-i x/2} - e^{i x/2}} = e^{i (n+1) x/2} \frac{\sin(n x/2)}{\sin(x/2)}$$

pourvu que  $\sin(x/2) \neq 0$ , c.-à-d.  $x \neq 2 \ell \pi$ . On a donc

$$\sum_{k=1}^n \cos(k x) = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^n e^{i k x} \right) = \cos\left(\frac{n+1}{2} x\right) \frac{\sin(n x/2)}{\sin(x/2)}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \sin(k x) = \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n e^{i k x} \right) = \sin\left(\frac{n+1}{2} x\right) \frac{\sin(n x/2)}{\sin(x/2)},$$

soit

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos(k x) \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin(k x) \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|},$$

et l'hypothèse du théorème d'Abel est satisfaite.

Exemple : si  $a_n = 1/n$ ,  $\sum a_n \cos(n x)$  et  $\sum a_n \sin(n x)$  convergent si  $x \neq 2 \ell \pi$ ; en particulier, pour  $x = \pi$ ,  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n = -\ln 2$ . Mais pour  $x = 0$ ,  $\sum a_n \cos 0$  diverge,  $\sum a_n \sin 0 = 0$  converge.

On peut alors légitimement se demander à quelles conditions une fonction périodique  $f$  est développable en une série trigonométrique convergeant vers  $f$  sur tout ou partie de  $\mathbb{R}$ .

## VII.c. Développement en série de Fourier

### VII.c.1. Distances sur un espace de fonctions

Il est en fait plus judicieux de se poser la question suivante : quelle est la série trigonométrique la plus « proche » de  $f$  sur un intervalle de longueur  $T$ ? Pour répondre à cette question, il faut définir une distance entre  $f$  et l'espace (ou un sous-espace) des séries trigonométriques et chercher parmi celles-ci celle qui minimise cette distance.

Plusieurs choix de distance sont possibles, notamment les suivants :

- $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, T]} |f(x) - g(x)|$ ;
- $d_1(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x) - g(x)| dx$ ;
- $d_2(f, g) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(x) - g(x)|^2 dx}$ .

La distance  $d_\infty$  semble la plus naturelle. Remarquons en particulier que si  $d_\infty(f, g) = 0$ , alors  $f = g$ . Il est cependant difficile de calculer  $d_\infty(f, g)$  et de trouver la série  $g$  qui la minimise pour une fonction  $f$  donnée.

La meilleure solution est en fait d'utiliser la distance euclidienne  $d_2$ , car elle est associée à un produit hermitien (la généralisation du produit scalaire au cas où le corps est  $\mathbb{C}$ ; cf. annexe VII.1) sur l'espace des fonctions continues sur  $[0, T]$ ,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Ce produit hermitien permet de définir une norme,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx},$$

et l'on a  $d_2(f, g) = \|f - g\|_2$ . L'application  $\|\cdot\|_1$  définie par

$$\|f\|_1 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)| dx$$

est également une norme sur  $C^0([0, T], \mathbb{C})$ ; elle est associée à  $d_1$  par  $d_1(f, g) = \|f - g\|_1$ .

Attention, contrairement à  $d_\infty$ , les applications  $d_p$  (avec  $p = 1$  ou  $2$ ) sont des distances sur l'espace des fonctions continues, mais pas sur celui des fonctions continues par morceaux. Les applications  $\|\cdot\|_p$  sont seulement des semi-normes sur ce dernier. En effet, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions égales *presque partout*<sup>\*1</sup> mais pas partout,  $\|f - g\|_p = 0$  bien que  $f \neq g$ . C'est en particulier le cas pour deux fonctions continues par morceaux ne différant qu'aux points de discontinuité.

On appelle  $\mathcal{L}^p([0, T])$  (avec  $p = 1$  ou  $2$ ) l'ensemble des fonctions  $f$  telles que  $\|f\|_p$  existe dans  $\mathbb{R}^{\times 2}$ . On dit que  $f$  est *sommable*<sup>\*3</sup> sur  $[0, T]$  si  $f \in \mathcal{L}^1([0, T])$  et qu'elle est *de carré sommable* si  $f \in \mathcal{L}^2([0, T])$ . Remarquer que si  $f \in \mathcal{L}^1([0, T])$ , tous ses coefficients de Fourier sont bien définis. On verra cependant en énonçant le théorème de Parseval-Bessel que  $\mathcal{L}^1([0, T])$  est trop gros pour étudier la convergence des séries de Fourier et qu'il vaut mieux se restreindre aux fonctions appartenant à  $\mathcal{L}^2([0, T])$ .

On a  $\mathcal{L}^2([0, T]) \subset \mathcal{L}^1([0, T])$ . Pour le montrer, considérons une fonction  $f \in \mathcal{L}^2([0, T])$  et posons  $g = f/|f|$ . On a  $\|g\|_2 = 1$  et  $\langle g, f \rangle = \|f\|_1$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient que  $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$ , donc que  $f \in \mathcal{L}^1([0, T])$ . L'inverse est faux (par exemple, la fonction  $f: x \mapsto 1/\sqrt{x}: f \in \mathcal{L}^1([0, T])$ , mais  $f \notin \mathcal{L}^2([0, T])$ ).

Les applications  $\|\cdot\|_p$  (avec  $p = 1$  ou  $2$ ) sont des semi-normes sur  $\mathcal{L}^p([0, T])$ . On peut définir une relation d'équivalence entre éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{L}^p([0, T])$  de la manière suivante :  $f$  et  $g$  sont équivalentes si et seulement si  $f(x) = g(x)$  pour presque tout  $x \in [0, T]$ , ou, ce qui revient au même, si  $\|f - g\|_p = 0$ . On note  $L^p([0, T])$  l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de  $\mathcal{L}^p([0, T])$ . L'application  $\|\cdot\|_p$  est une (vraie) norme sur  $L^p([0, T])$ .

Il est utile d'introduire un ensemble plus grand que celui des fonctions continues, mais sur lequel  $\|\cdot\|_p$  reste une vraie norme :

### Définition 69

On note  $D_T$  l'espace des fonctions  $C_m^0$  et  $T$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}. \quad \lrcorner$$

### Théorème 89

L'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: D_T^2 &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx \end{aligned}$$

est un produit hermitien sur  $D_T$ .

$\|\cdot\|_2: f \mapsto \sqrt{\langle f, f \rangle}$  est une norme sur  $D_T$ . \lrcorner

On a donc  $C^0([0, T], \mathbb{C}) \subset D_T \subset C_m^0([0, T], \mathbb{C}) \subset \mathcal{L}^2([0, T]) \subset \mathcal{L}^1([0, T])$ .

1. Cette notion est définie rigoureusement dans le cadre de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue : une propriété est vérifiée presque partout si elle l'est sur un ensemble de mesure nulle. Entre autres, tout ensemble dénombrable (en particulier, un ensemble fini) est de mesure nulle.
2. L'intégrale utilisée dans  $\|\cdot\|_p$  est une intégrale de Lebesgue, pas de Riemann : il n'est donc pas nécessaire que la fonction soit définie sur tout l'intervalle, mais seulement qu'elle le soit presque partout.
3. Certains auteurs disent d'une fonction de  $\mathcal{L}^1$  qu'elle est « intégrable », ce qui est ambigu : ils sous-entendent « au sens de Lebesgue ». En effet, pour qu'une fonction quelconque soit intégrable au sens de Lebesgue, il faut que sa norme le soit. Si ce n'est pas le cas, elle peut néanmoins admettre une intégrale impropre.

## VII.c.2. Fonction 2 $\pi$ -périodique

Les fonctions  $e_n: x \mapsto e^{i n x}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) constituent une famille orthonormée de  $D_{2\pi}$  :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad \langle e_m, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{m,n}$$

où  $\delta_{m,n}$  est le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si  $m \neq n$  et 1 si  $m = n$ . En effet,  $\int_0^{2\pi} dx = 2\pi$  (cas  $m = n$ ) et

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{i(n-m)} \left[ e^{i(n-m)x} \right]_0^{2\pi} = 0$$

si  $n \neq m$ .

Les fonctions  $(e_k)_{k \in \llbracket -n, n \rrbracket}$  engendrent un sous-espace vectoriel  $F_n$  de  $D_{2\pi}$  de dimension  $2n + 1$ , celui des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à  $n$ , et en constituent une base orthonormée. Le polynôme trigonométrique  $f_n \in F_n$  le plus proche de  $f$ , au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$ , est la projection orthogonale de  $f$  sur  $F_n$  (cf. annexe § VII.2). Dans cette base, on a

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i k x},$$

où  $c_k := \langle e_k, f \rangle$ .

Les fonctions  $t_0: x \mapsto 1$ ,  $t_n: x \mapsto \sqrt{2} \cos(n x)$  et  $t_{-n}: x \mapsto \sqrt{2} \sin(n x)$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) constituent une autre famille orthonormée de  $D_{2\pi}$ . Les fonctions  $(t_k)_{k \in \llbracket -n, n \rrbracket}$  constituent également une base orthonormée de  $F_n$ . Dans cette base, la projection orthogonale  $f_n$  vaut

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \langle t_k, f \rangle t_k = \frac{a_0}{2} \times 1 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \cos(k x) + \frac{b_k}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \sin(k x) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k x) + b_k \sin(k x)), \end{aligned}$$

où  $a_0 := 2 \langle t_0, f \rangle$ ,  $a_k, k \in \mathbb{N}^* := \sqrt{2} \langle t_k, f \rangle$  et  $b_k, k \in \mathbb{N}^* := \sqrt{2} \langle t_{-k}, f \rangle$ \*4.

### Définition 70

On appelle *développement en série de Fourier* d'une fonction 2  $\pi$ -périodique  $f$  la série trigonométrique

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)) \quad (6)$$

$$= \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{sym}}}^{\infty} c_n e^{i n x}, \quad (7)$$

où les *coefficients de Fourier*  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont définis par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(n x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

$$\text{et } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i n x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

### Remarques

- Ce développement ne converge pas nécessairement vers  $f$  en tout point, ni même n'est convergent partout.

4. Remarquer que les  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$  ne dépendent pas de  $n$  : si  $n'$  est un entier supérieur à  $n$  et si les coefficients  $a'_k$ ,  $b'_k$  et  $c'_k$  correspondent à la projection de  $f$  sur  $F_{n'}$ , on a  $a'_k = a_k$ ,  $b'_k = b_k$  et  $c'_k = c_k$  pour tout  $k$  tel que  $|k| \leq n$ .

- L'expression  $\sum_{\text{sym}}^{\infty} c_n e^{i n x}$  doit être comprise de la manière suivante :

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{sym}}}^{\infty} c_n e^{i n x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{i k x}.$$

┘

Nous écrivons simplement  $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$  à partir de maintenant.

### VII.c.3. Fonction $T$ -périodique

On a raisonné sur l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , mais il est aisé de transposer toute la discussion à une fonction  $f$  périodique de période  $T$ . Notons  $\omega = 2 \pi/T$  sa *pulsation*.

Posons  $u = 2 \pi x/T$  et  $g(u) = f(T u/(2 \pi)) = f(x)$ . La fonction  $g$  est de période  $2 \pi$  :

$$g(u + 2 \pi) = f(T (u + 2 \pi)/(2 \pi)) = f(x + T) = f(x) = g(u).$$

Son développement en série de Fourier est donc

$$\tilde{g}(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n u) + b_n \sin(n u)),$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{u=0}^{2 \pi} g(u) \cos(n u) du \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{u=0}^{2 \pi} g(u) \sin(n u) du.$$

Exprimons  $a_n$  en fonction de  $f$  et de  $x = T u/(2 \pi)$ . On a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{u=0}^{2 \pi} g(u) \cos(n u) du = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^T f(x) \cos\left(n \frac{2 \pi x}{T}\right) d\left(\frac{2 \pi x}{T}\right) = \frac{2}{T} \int_{x=0}^T f(x) \cos(n \omega x) dx.$$

De même pour  $b_n$  et  $c_n$ .

#### Définition 71

Le développement en série de Fourier d'une fonction  $f$  de période  $T$  est

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega x) + b_n \sin(n \omega x)) \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{sym}}}^{\infty} c_n e^{i n \omega x}, \end{aligned}$$

où  $\omega = 2 \pi/T$  est la pulsation,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{x=0}^T f(x) \cos(n \omega x) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{x=0}^T f(x) \sin(n \omega x) dx \\ \text{et} \quad c_n &= \frac{1}{T} \int_{x=0}^T f(x) e^{-i n \omega x} dx. \end{aligned}$$

L'ensemble des coefficients  $(a_n, b_n)$  ou  $c_n$  constitue le *spectre de Fourier* de la fonction  $f$ . La fonction  $x \mapsto a_0/2 = c_0$ , pour  $n = 0$ , ou

$$x \mapsto a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x) = c_n e^{i n x} + c_{-n} e^{-i n x}, \quad \text{pour } n > 0,$$

est le  $n$ -ième *harmonique* (ou  $n$ -ième *mode de Fourier*) du développement de  $f$ . ┘

### VII.c.4. Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier

- Si  $f$  est paire,  $x \mapsto f(x) \sin(k \omega x)$  est impaire. En intégrant sur  $[-T/2, T/2]$ , on obtient que tous les  $b_k$  sont nuls.

De même, si  $f$  est impaire,  $x \mapsto f(x) \cos(k \omega x)$  est impaire : tous les  $a_k$  sont donc nuls.

- À l'aide des formules d'Euler,

$$\cos(n \omega x) = \frac{e^{i n \omega x} + e^{-i n \omega x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n \omega x) = \frac{e^{i n \omega x} - e^{-i n \omega x}}{2 i},$$

on obtient aisément les relations suivantes entre les coefficients de Fourier :

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i (c_n - c_{-n}).$$

- Supposons que la fonction  $f$  soit à valeurs réelles. C'est alors aussi le cas pour  $\widetilde{f}$ . En écrivant

$$\widetilde{f}(x) = \sum c_n e^{i n \omega x} = \sum c_{-n} e^{i (-n) \omega x} = \overline{\widetilde{f}(x)} = \sum \overline{c_n} e^{-i n \omega x}$$

et en identifiant terme à terme, on voit que  $\overline{c_n} = c_{-n}$ . Si  $f$  est à valeurs réelles, on a donc  $a_n = 2 \operatorname{Re} c_n$  et  $b_n = -2 \operatorname{Im} c_n$ .

- Le développement en série de Fourier peut également être écrit

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n \omega x - \varphi_n).$$

Pour  $n = 0$ , il suffit de poser  $A_0 = a_0/2$  et  $\varphi_0 = 0$ ; pour  $n > 0$ , d'identifier

$$A_n \cos(n \omega x - \varphi_n) = A_n \cos \varphi_n \cos(n \omega x) + A_n \sin \varphi_n \sin(n \omega x)$$

et  $a_n \cos(n \omega x) + b_n \sin(n \omega x)$ , donc de poser  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ,  $\cos \varphi_n = a_n/A_n$  et  $\sin \varphi_n = b_n/A_n$ .  
 $A_n$  est l'amplitude du  $n$ -ième mode de Fourier,  $x \mapsto A_n \cos(n \omega x - \varphi_n)$ , et  $\varphi_n$  est sa phase.

## VII.D. Convergence en moyenne quadratique

Pour toute fonction  $f \in D_T$ , on a  $\|f_n\|_2 \leq \|f\|_2$ , soit

$$\|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \leq \|f\|_2^2.$$

Ceci est vrai plus généralement pour toute fonction  $f$  continue par morceaux et  $T$ -périodique : en effet, la fonction  $g: x \mapsto (f[x^-] + f[x^+])/2$  est élément de  $D_T$  et ne diffère de  $f$  qu'en ses discontinuités ; leurs coefficients de Fourier sont donc identiques et  $\|g\|_2 = \|f\|_2$ .

La suite  $(\|f_n\|_2^2)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie car elle croît avec  $n$  et est majorée par  $\|f\|_2^2$ . Pour toute fonction continue par morceaux et  $T$ -périodique, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \leq \|f\|_2^2 \quad (\text{inégalité de Bessel}).$$

Pour une fonction  $f$  continue par morceaux et de période  $T$ , les coefficients  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont bien définis, donc  $f_n$  aussi ; elle est même continue (c'est un polynôme trigonométrique). Le fait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2$  existe permet de montrer que la suite  $(\|f_n\|_2^2)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy (dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ), c.-à-d. que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \implies \left| \|f_{n+p}\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \right| \leq \epsilon.$$

Or  $\left| \|f_{n+p}\|_2^2 - \|f_n\|_2^2 \right| = \|f_{n+p} - f_n\|_2^2$ , donc, en posant  $\epsilon' = \sqrt{\epsilon}$ ,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \implies \|f_{n+p} - f_n\|_2 \leq \epsilon' :$$

la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc de Cauchy pour la semi-norme  $\|\cdot\|_2$ . Bien que  $f_n$  soit continue, on ne peut cependant pas en déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  existe dans l'espace des fonctions continues, ou même seulement continues par morceaux, car ces espaces ne sont pas complets. En revanche, ceux-ci sont des sous-ensembles de  $\mathcal{L}^2([0, T])$ . Or l'ensemble  $L^2([0, T])$  construit à partir de  $\mathcal{L}^2([0, T])$  est un *espace de Hilbert* (cf. annexe § VII.3) si on le munit du produit hermitien défini précédemment, donc un espace complet pour la norme  $\|\cdot\|_2$ <sup>5</sup>. La suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant de Cauchy, elle converge donc (pour  $\|\cdot\|_2$ ) vers une fonction de  $L^2([0, T])$  définie presque partout sur  $[0, T]$ .

Les familles  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  constituent des *bases hilbertiennes* orthonormées et dénombrables de  $L^2([0, T])$ . Le théorème 98 permet d'affirmer que l'inégalité de Bessel est une égalité et d'énoncer le théorème suivant :

5. Il ne sera pas nécessairement complet pour d'autres normes s'il est de dimension infinie, car celles-ci peuvent ne pas être équivalentes.

**Théorème 90 (théorème de Parseval(-Bessel))**

Pour tout fonction  $f$  continue par morceaux et  $T$ -périodique (ou, plus généralement, pour toute fonction de  $\mathcal{L}^2([0, T])$ ), les séries suivantes convergent (pour la norme  $\|\cdot\|_2$  pour la première) et l'on a

$$f \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \widetilde{f} \quad (\text{c.-à-d. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0 : \text{convergence en moyenne quadratique})$$

et

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2} \quad (\text{égalité de Parseval}). \quad \lrcorner$$

Les deux égalités sont équivalentes. En effet,  $f = f_n + (f - f_n)$  avec  $f_n \in F_n$  et  $f - f_n \perp F_n$ , d'où  $\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$ . En passant à la limite, on obtient donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

**Exemple 66**

Considérons la fonction valant  $f(x) = 0$  sur  $]-\pi, 0[$ ,  $f(x) = 1$  sur  $]0, \pi[$  et prolongée  $2\pi$ -périodiquement. On peut (mais ça n'est pas nécessaire, comme on vient de le faire remarquer) convenir que  $f(0) = f(\pi) = 1/2$  de manière à ce que  $f \in D_{2\pi}$ . Les coefficients de Fourier de  $f$  valent  $c_0 = 1/2$  et

$$c_n = \frac{1 - (-1)^n}{2 i \pi n} \quad \text{si } n \neq 0.$$

Donc, si  $n = \pm 2k$  (avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ),  $c_n = 0$ ; si  $n = \pm(2k + 1)$  (avec  $k \in \mathbb{N}$ ),  $c_n = 1/(i \pi n)$ , soit

$$|c_{\pm(2k+1)}|^2 = \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Par ailleurs,  $\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^\pi 1^2 dx = 1/2$ . D'après le théorème de Parseval-Bessel, on a donc

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2},$$

soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \lrcorner$$

## VII.E. Convergence ponctuelle

Nous avons vu ci-dessus que les coefficients du développement en série de Fourier sont définis pour toute fonction continue par morceaux et périodique. Ces hypothèses sont suffisantes pour montrer que  $f_n$  converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$  (convergence en moyenne quadratique). Elles sont en revanche trop faibles pour montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe (convergence simple pour la norme  $|\cdot|$ ) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , ou même seulement pour presque tout  $x$ , et encore plus pour écrire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  <sup>\*6</sup>.

### VII.E.1. Théorèmes de convergence

Nous admettons le théorème suivant :

**Théorème 91 (théorème de Dirichlet)**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $T$ -périodique.

Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux, son développement en série de Fourier  $\widetilde{f}$  est défini en tout point et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Dans tout sous-intervalle où la fonction  $f$  est continue, la convergence de  $f_n$  vers  $f$  est uniforme. \lrcorner

---

6. Si  $\|f - g\|_p = 0$  (avec  $p = 1$  ou  $2$ ),  $f(x) = g(x)$  presque partout, mais ce n'est pas suffisant pour affirmer que si  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions quelconque telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n - f\|_p = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = f(x)$  presque partout. Il se trouve (théorème de Carleson, 1966) que, si  $f \in \mathcal{L}^2([0, T])$ , la série de Fourier  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge presque partout vers  $f(x)$ , mais ce résultat est propre à la série de Fourier et n'est pas valable si  $f \in \mathcal{L}^1([0, T]) \setminus \mathcal{L}^2([0, T])$ .

**Remarques**

- Plutôt que l'expression de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , on donne souvent sa restriction sur un intervalle  $I$  de longueur  $T$ ,  $f|_I$ , avec  $I = [a, a + T[$  ou  $I = ]a, a + T]$  et  $a \in \mathbb{R}$ ;  $f$  est ensuite définie en prolongeant  $f|_I$  par  $T$ -périodicité, c.-à-d. que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) := f|_I(x_0)$ , où  $x_0$  est l'unique élément de  $I$  tel que  $x = x_0 \pmod{T}$ . Par exemple, si  $I = ]-\pi, \pi[$ ,  $f(\pi^+) := f|_I([-\pi]^+) = f([-\pi]^+)$ . Si  $f|_I$  est  $C_m^1$ , on a alors

$$\tilde{f}(\pm\pi) = \frac{f(\pi^-) + f([-\pi]^+)}{2}.$$

- Attention, si  $f$  est définie par prolongement  $T$ -périodique de sa restriction  $f|_I$  à un intervalle  $I$  de longueur  $T$ , le fait que  $f|_I$  soit continue (en plus d'être  $C_m^1$ ) ne suffit pas pour montrer que la convergence de  $f_n$  vers  $f$  est uniforme sur  $I$  : il faut que  $f$  (pas seulement  $f|_I$ ) soit continue sur  $I$ .

Le problème se pose aux bornes de  $I = [a, a + T[$  ou  $]a, a + T]$ . Or  $f$  peut être discontinue en  $a \pmod{T}$  même si  $f|_I$  est continue ou prolongeable par continuité en ce point.

**Exemple.** — Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x$  sur  $]-\pi, \pi[$  et prolongée  $2\pi$ -périodiquement.  $f|_{]-\pi, \pi[}$  est continue et est même prolongeable en une fonction continue sur  $[-\pi, \pi]$ . Pourtant,  $f$  (en tant que fonction définie sur  $\mathbb{R}$ ) n'est pas continue en  $\pm\pi$  puisque  $f([\pm\pi]^+) = -\pi \neq f([\pm\pi]^-) = \pi$ .  $\square$

Plus la fonction est régulière, plus les coefficients de Fourier tendent rapidement vers 0.

**Théorème 92**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application  $T$ -périodique.

Si  $f$  est  $C_m^0$ ,  $(a_n, b_n, c_{\pm n})(f) = o_{n \rightarrow \infty}(1)$ .

Si  $f$  est  $C^{k-1}$  et  $C_m^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )<sup>§7</sup>,

$$c_n(f^{(k)}) = (i n \omega)^k c_n(f) \quad \text{et} \quad (a_n, b_n, c_{\pm n})(f) = o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^k}\right). \quad \square$$

**Preuve**

Supposons d'abord  $f$  continue par morceaux. Les coefficients de Fourier sont alors bien définis. Comme  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$  converge (cf. inégalité de Bessel), on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\pm n} = 0$ .

Supposons  $f$  désormais  $C^{k-1}$  et  $C_m^k$ . Calculons  $c_n(f')$  par intégration par parties :

$$c_n(f') = \frac{1}{T} \int_{x=0}^T e^{-i n \omega x} f'(x) dx = \frac{1}{T} \left( \left[ e^{-i n \omega x} f(x) \right]_{x=0}^T - \int_{x=0}^T (-i n \omega) e^{-i n \omega x} f(x) dx \right) = i n \omega c_n(f).$$

Par récurrence, on en déduit l'expression de  $c_n(f^{(k)})$ .  $f^{(k)}$  étant  $C_m^0$ , on a  $c_{\pm n}(f^{(k)}) = o(1)$ , soit  $c_{\pm n}(f) = o(1/n^k)$ .  $\square$

**Remarque**

Si  $f$  est définie par prolongement  $T$ -périodique de  $f|_I$ , où  $I$  est un intervalle de longueur  $T$ , il ne suffit pas que  $f|_I$  soit  $C^{k-1}$  (en plus d'être  $C_m^k$ ) pour que  $c_n(f) = o(1/n^k)$  : il faut que  $f$  soit  $C^{k-1}$  sur  $I$ , ce qui est différent comme on l'a souligné dans la remarque sur le théorème de Dirichlet.  $\square$

La convergence est donc moins bonne pour les dérivées successives. En fait, la dérivation terme à terme du développement de Fourier de  $f$  ne donne pas le développement de Fourier de  $f'$  si  $f$  est discontinue. Un exemple est donné par la fonction  $x \mapsto f(x)$  périodique et valant  $x$  sur sa période  $[-T/2, T/2[$ , dont le développement de Fourier non trivial sera donné au § VII.E.2. Sa dérivée terme à terme est également non triviale et ne s'identifie pas au développement de Fourier de  $x \mapsto f'(x) = 1$  qui se réduit au terme constant ! À l'inverse, la convergence est meilleure pour l'intégrale de  $f$ .

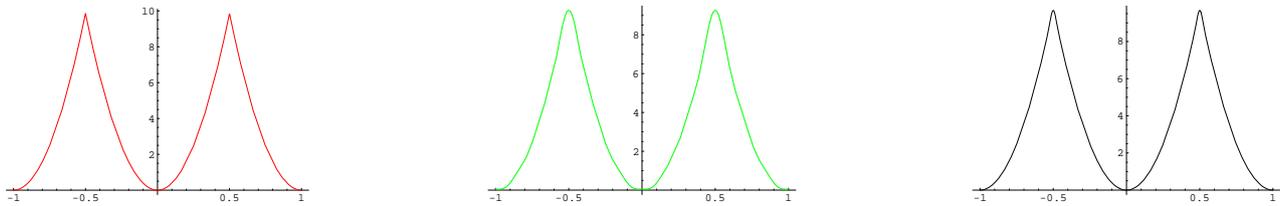
**Exemple 67**

Soit la fonction  $f(x) = x^2$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , prolongée par périodicité de période  $2\pi$  au-delà. On calcule aisément  $c_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \pi^2/3$  et, après deux intégrations par parties,  $c_n = 2 \times (-1)^n/n^2$  pour  $n \neq 0$ . Puisque  $f$  est  $C_m^1$  et  $C^0$ ,  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) = x^2 = \tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{i n x} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n x)}{n^2}.$$

Les deux séries convergent absolument et uniformément. On voit sur la figure VII.1 que le pic en  $\pm\pi$  est de mieux en mieux représenté quand la série est tronquée à un ordre plus élevé. Ceci reflète bien le fait que les hautes fréquences (grands « harmoniques », c.-à-d. modes à  $n$  grand) donnent les détails fins de la fonction.

7.  $f^{(k)}$  n'est pas définie aux points de discontinuité de  $f^{(k-1)}$ , mais ceci n'interdit pas de calculer ses coefficients de Fourier. Elle est en effet continue sur des intervalles  $]x_i, x_{i+1}[$  et prolongeable par continuité sur  $[x_i, x_{i+1}]$ . L'intégrale  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-i n x} f(x) dx$  est donc faussement impropre.



**Figure VII.1.** À gauche, la fonction périodique valant  $x^2$  sur sa période  $[-\pi, \pi[$ ; au milieu (resp. à droite), son développement en série de Fourier jusqu'au 6<sup>e</sup> (resp. 20<sup>e</sup>) terme. La variable  $x/(2\pi)$  est portée en abscisse.

En calculant  $f$  et  $\tilde{f}$  en  $x = 0$  et  $x = \pi$ , on obtient respectivement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Les exemples suivants seront étudiés en TD.

### Exemple 68

Soient  $u$  et  $x$  deux variables réelles. En prenant les parties réelle et imaginaire de la série géométrique  $\sum_{n=0}^{\infty} u^n e^{i n x} = 1/(1 - u e^{i x})$ , absolument convergente pour  $|u| < 1$  et pour tout  $x$  (donc uniformément convergente), on obtient deux séries de Fourier uniformément convergentes :

$$\frac{1 - u \cos x}{1 - 2 u \cos x + u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \cos(n x) \quad (11)$$

et

$$\frac{u \sin x}{1 - 2 u \cos x + u^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \sin(n x).$$

De même, en prenant les parties réelle et imaginaire de  $\ln(1 - u e^{i x})$ , on trouve

$$\ln(1 - 2 u \cos x + u^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \cos(n x) \quad (12)$$

et

$$\arctan \frac{u \sin x}{1 - u \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} \sin(n x).$$

Montrer qu'on passe de (12) à (11) en dérivant par rapport à  $u$ .

### Exemple 69

Soit la fonction  $f(x) = \cos(ax)$ , pour  $a$  non entier et  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Sa série de Fourier est

$$\frac{\sin(a\pi)}{\pi} \left( \frac{1}{a} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2a \cos(n x)}{a^2 - n^2} \right).$$

Montrer que la série converge vers  $f(x)$  pour  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

On verra d'autres exemples de séries de Fourier dans la suite.

## VII.E.2. Phénomène de Gibbs

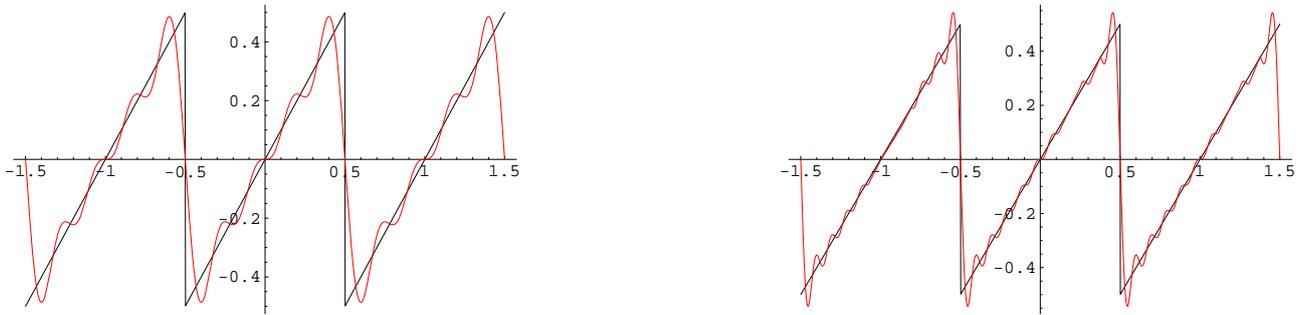
Que se passe-t-il au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction  $f$  ?

Considérons par exemple la fonction  $f: x \mapsto x$  sur l'intervalle  $[-1/2, 1/2[$  et prolongée par périodicité de période 1 (noter que cette fonction est, à un changement d'échelle près, la dérivée de la fonction de l'exemple 67). On montre aisément (cf. TD) que son développement de Fourier s'écrit

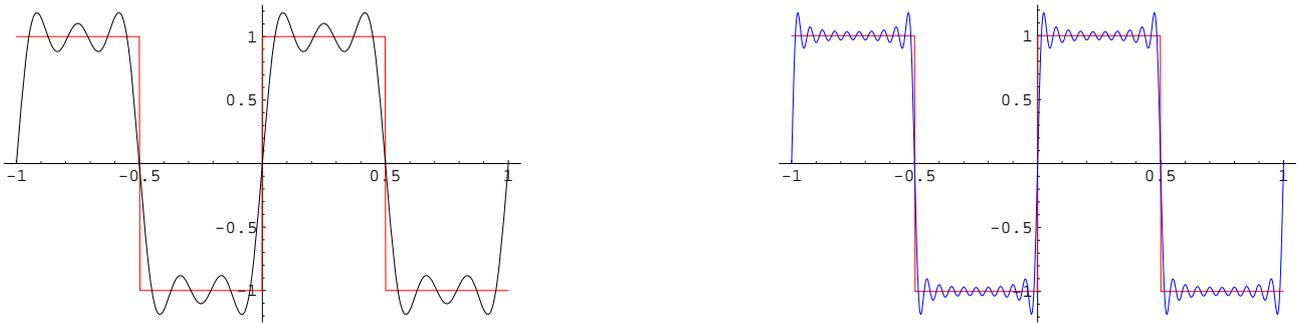
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2 n \pi x)}{n}$$

et, selon le théorème, ce développement converge vers  $f$  dans  $] -1/2, 1/2[$ , tandis qu'il vaut  $f(-1/2) + f(1/2) = 0$  en  $\pm 1/2$ .

Représentons le développement tronqué à la  $N$ -ième harmonique,  $\pi^{-1} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \sin(2 n \pi x)/n$ . On voit (figure VII.2) que quelques harmoniques reproduisent déjà très bien la discontinuité de la fonction en  $\pi$ . Conformément au théorème, quand on augmente le nombre de termes, la série de Fourier approxime de mieux en mieux la fonction en dehors de ses discontinuités, mais on voit qu'elle exagère la valeur de la discontinuité. Plus précisément, la position du maximum



**Figure VII.2.** Fonction  $f: x \mapsto x$  sur  $[-1/2, 1/2]$  et ses développements jusqu'au 4<sup>e</sup> ordre (à gauche) et 10<sup>e</sup> ordre (à droite).



**Figure VII.3.** La fonction périodique valant  $\text{sgn } x$  (signe de  $x$ ) sur sa période  $[-\pi, \pi]$  (« fonction créneau »), superposée à sa série de Fourier avec 6 termes (à gauche) et 20 termes (à droite). La variable  $x/(2\pi)$  est portée en abscisse.

(ou minimum) tend vers le point de discontinuité  $x_0$ , mais la valeur à ce maximum ou minimum ne tend pas vers la valeur de  $f(x_0^+)$ . C'est le *phénomène de Gibbs*. On peut calculer l'excédent et on trouve qu'il tend vers environ 18 % de la discontinuité (cf. TD) : la série de Fourier ne converge donc pas uniformément !

Autre exemple : la fonction créneau, périodique de période  $2\pi$ , valant  $f(x) = -1$  si  $x \in ]-\pi, 0[$ , et  $f(x) = 1$  si  $x \in ]0, \pi[$ . Sa série de Fourier n'a que des termes en sinus, et un calcul simple conduit à

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

La convergence est lente, en  $1/n$ , reflétant la présence d'une discontinuité, et on observe à nouveau le phénomène de Gibbs (voir figure VII.3).

## VII.F. Analyse d'un système périodique avec une bande passante finie

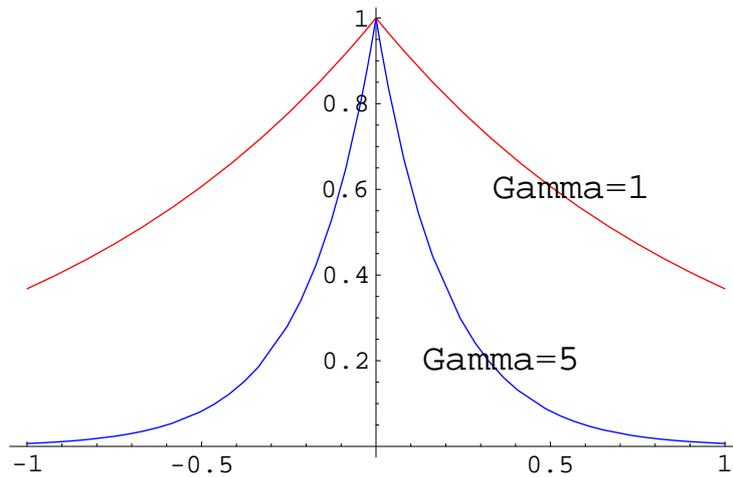
En pratique, le développement (6) (ou (7)) est rarement utilisé ou connu dans son intégralité. Ou bien, parce qu'on ne peut calculer en pratique qu'un nombre fini de termes, il est tronqué à un nombre de modes fini, la somme sur  $n$  courant de 0 à  $N$  (ou de  $-N$  à  $N$  dans (7)). Ou bien, comme c'est souvent le cas en physique, la fonction représente un signal qui a pu être déformé lors de sa réception ou de son traitement, affectant ainsi les coefficients des différentes harmoniques, et tronquant éventuellement les basses ou les hautes fréquences (on parle de *filtre passe-haut* (resp. *passe-bas*) pour un dispositif qui « coupe » les basses (resp. les hautes) fréquences). On dira qu'on analyse la fonction  $f$  avec une *bande passante finie* si les hautes fréquences sont coupées ou fortement atténuées. Quel en est l'effet sur la reproduction de la fonction ?

On a vu au § VII.E.2 l'effet d'une coupure des harmoniques élevés sur les fonctions  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \text{sgn } x$  prolongées de manière périodique : les détails fins de la fonction sont mal reproduits. En général, si les coefficients de la série décroissent lentement (par exemple, décroissance en  $o(1)$  des coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux mais non continue), la somme sera sensible à une coupure des hautes fréquences. Pour ces fonctions, dont les premiers modes de Fourier sont d'ordre 1, une coupure des basses fréquences n'est pas non plus anodine...

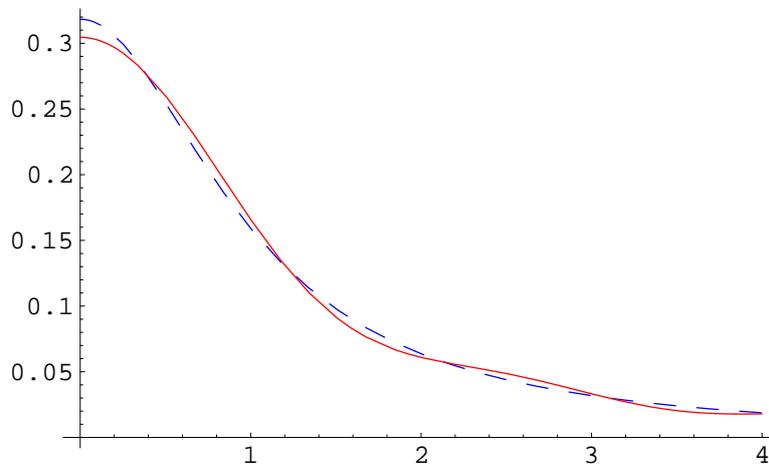
À titre d'exemple, considérons la fonction paire

$$f: x \mapsto e^{-\Gamma|x|}$$

définie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi[$ , ou, si l'on préfère, pour tout  $x$  réel, en répétant l'intervalle  $[-\pi, \pi[$  périodiquement. Pour  $\Gamma$  petit, la fonction est étalée autour de 0, et son pic se rétrécit quand  $\Gamma$  croît.



**Figure VII.4.** La fonction  $x \mapsto e^{-\Gamma|x|}$  pour  $\Gamma = 1$  et  $\Gamma = 5$ .



**Figure VII.5.** Coefficients de Fourier  $a_n$  de la fonction  $f$  pour  $\Gamma = 1$ . Les  $a_n$  sont donnés en fonction de  $n \in \mathbb{R}$  (au lieu de  $\mathbb{N}$ ) par la formule (13) (trait plein) et par l'approximation lorentzienne (ligne brisée).

La fonction ainsi définie est continue et périodique ; selon les théorèmes précédents, son développement de Fourier doit converger. On calcule aisément les coefficients de Fourier :

$$a_n = \frac{2\Gamma}{\pi} \frac{1 - (-1)^n e^{-\Gamma\pi}}{\Gamma^2 + n^2} \quad \text{et, en particulier,} \quad a_0 = \frac{2}{\pi\Gamma} (1 - e^{-\Gamma\pi}), \quad (13)$$

tandis que  $b_n = 0$  (fonction paire). Pour  $\Gamma \gg 1$ , on a  $a_n \approx 2\Gamma/(\pi(\Gamma^2 + n^2))$  qui est une fonction « lorentzienne » de la variable  $n$  (figure VII.5). Son graphe est une courbe en cloche plus étalée qu'une gaussienne<sup>8</sup>, dont on peut mesurer l'étalement en calculant la valeur de  $n$  où l'on atteint la demi-hauteur du maximum, soit  $2\Gamma/(n^2 + \Gamma^2) \approx 1/\Gamma$ , c.-à-d.  $|n| \approx \Gamma$ .

La conclusion de ce calcul, qu'on pourrait répéter avec d'autres fonctions, est qu'à une fonction  $f$  « piquée » (resp. étalée) correspond une distribution large (resp. étroite) de ses coefficients de Fourier. En particulier, dans notre exemple, à grand  $\Gamma$  (fonction  $f$  très piquée), on doit utiliser beaucoup d'harmoniques ( $|n|$  de l'ordre de  $\Gamma$ ) pour reproduire correctement la fonction. Inversement, une bande passante étroite (une limite basse sur les  $n$ ) interdit de « voir » des détails fins de la fonction  $f$ . La bande passante doit être d'autant plus large que les détails de la fonction sont plus fins. Il s'agit là d'un aspect fondamental de l'analyse de Fourier, qu'on rencontre notamment en optique : avoir une bonne résolution spatiale, c.-à-d. pouvoir discerner des détails fins, impose d'utiliser des petites longueurs d'onde (c.-à-d. des grandes fréquences). Ce même principe apparaît sous des habits variés dans des situations multiples, telles les inégalités d'Heisenberg en mécanique quantique.

8. Rappelons que la fonction gaussienne,  $x \mapsto e^{-ax^2}$ , a pour graphe une courbe en cloche. Voir aussi l'exercice de TD sur la distribution de Maxwell.

## Annexe VII.1. Espaces préhilbertiens

### Définition 72

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Une application

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: E^2 &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

est un *produit hermitien* si les conditions suivantes sont toutes réunies :

1.  $\forall (x, y) \in E^2, \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ , où  $\bar{k}$  désigne le conjugué d'un scalaire  $k$ ;
2.  $\forall (x, y, z, \lambda) \in E^3 \times \mathbb{K}, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$  et  $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  (linéarité à droite);
3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ ;
4.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on parle de *produit scalaire*.

On note  $\|\cdot\|_2$  l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2: E &\longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \end{aligned}$$

On appelle *espace préhilbertien* complexe (resp. réel), et l'on note  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) muni d'un produit hermitien (resp. scalaire).  $\square$

### Remarques

Le produit hermitien est parfois aussi appelé produit scalaire.

On déduit immédiatement des conditions n<sup>os</sup> 1 et 2 que  $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ , et que  $\forall (x, y, z) \in E^3, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

$\langle x, x \rangle$  est un réel (positif), même si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la condition n<sup>o</sup> 1 se réduit à  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ .  $\square$

### Théorème 93 (inégalité de (Cauchy-)Schwarz)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

$\forall (x, y) \in E^2,$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \quad \square$$

### Preuve

Pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ ,

$$0 \leq \|x + \mu y\|_2^2 = \langle x + \mu y, x + \mu y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\mu} \langle y, x \rangle + \mu \langle x, y \rangle + \bar{\mu} \mu \langle y, y \rangle = \|x\|_2^2 + \bar{\mu} \overline{\langle x, y \rangle} + \mu \langle x, y \rangle + |\mu|^2 \|y\|_2^2. \quad (14)$$

Soit  $\phi = \arg \langle x, y \rangle$ . On a  $\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\phi}$  et  $\overline{\langle x, y \rangle} = |\langle x, y \rangle| e^{-i\phi}$ . L'équation (14) est vraie pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$ , en particulier pour tout  $\mu$  de la forme  $\mu = \lambda e^{-i\phi}$ , où  $\lambda$  est un réel quelconque. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a donc

$$0 \leq \|x\|_2^2 + (\lambda e^{-i\phi}) \overline{(|\langle x, y \rangle| e^{i\phi})} + (\lambda e^{-i\phi}) (|\langle x, y \rangle| e^{i\phi}) + \lambda^2 \|y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\lambda |\langle x, y \rangle| + \lambda^2 \|y\|_2^2.$$

Posons  $a = \|y\|_2^2$ ,  $b = 2|\langle x, y \rangle|$  et  $c = \|x\|_2^2$ . Les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels et  $a$  est positif. Pour que le trinôme  $P(\lambda) := a\lambda^2 + b\lambda + c$  soit positif ou nul pour tout  $\lambda$  réel, il faut que ses racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  soient complexes ou que  $P$  ait une racine double, c.-à-d. que le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  soit négatif ou nul. En effet, si  $\Delta > 0$ ,  $P(\lambda)$  admet deux racines réelles distinctes,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ( $> \lambda_1$ ). Comme  $a \geq 0$  et que  $P(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ , on a  $P(\lambda) < 0$  pour tout  $\lambda \in ]\lambda_1, \lambda_2[$ .

On a donc  $\Delta \leq 0$ , soit

$$(2|\langle x, y \rangle|)^2 \leq 4\|y\|_2^2 \|x\|_2^2,$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  $\square$

### Théorème-définition 3 (norme hermitienne, norme euclidienne)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien.

L'application  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $E$ . On l'appelle *norme hermitienne* si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et *norme euclidienne* si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .  $\square$

### Preuve

D'après la définition du produit scalaire,  $\|x\|_2 \geq 0$  pour tout  $x \in E$ , et  $\|x\|_2 = 0 \implies x = 0$ .

Par ailleurs,

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|_2.$$

Il reste à démontrer que  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ . Comme

$$\|x + y\|_2^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|_2^2 + |\langle y, x \rangle| + |\langle x, y \rangle| + \|y\|_2^2$$

et que  $|\langle y, x \rangle| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ , on obtient

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

soit

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2. \quad \square$$

Si une application possède toutes les propriétés d'une norme sauf ( $\|x\| = 0 \implies x = 0$ ), on dit que c'est une *semi-norme*.  
 À toute norme sur un espace vectoriel  $E$  correspond une *distance*,  $d(x, y) := \|x - y\|$  pour tous  $(x, y) \in E^2$ , (l'inverse n'est pas vrai), c.-à-d. une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}^+$  possédant les propriétés suivantes :

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ ;
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

**Définition 73 (distance hermitienne, distance euclidienne)**

L'application

$$d_2: E^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ (x, y) \longmapsto \|x - y\|_2$$

porte le nom de *distance hermitienne* (resp. *euclidienne*) si  $E$  est préhilbertien complexe (resp. réel). ┘

**Définition 74**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

On appelle angle (non orienté) entre  $x$  et  $y$  l'unique  $\theta \in [0, \pi]$  défini par

$$\theta = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}. \quad \text{┘}$$

**Définition 75**

Un vecteur  $u$  est dit normé ou unitaire si  $\|u\|_2 = 1$ .

Deux vecteurs  $u$  et  $v$  sont dits orthogonaux, ce que l'on note  $u \perp v$ , si  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Deux sous-ensembles  $F$  et  $G$  de  $E$  sont dits orthogonaux, ce que l'on note  $F \perp G$ , si  $\forall (u, v) \in F \times G, u \perp v$ .

Soit  $I$  un ensemble dénombrable. Une famille de vecteurs  $(u_i)_{i \in I}$  est dite orthogonale si  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies u_i \perp u_j$ .

Elle est dite orthonormée si tous ses éléments sont en plus unitaires. ┘

**Remarque**

Un ensemble dénombrable est un ensemble qu'on peut mettre en bijection avec  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ . Exemples d'ensembles dénombrables :  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ , tout sous-ensemble de ces ensembles, tout ensemble fini. En revanche,  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable, de même que  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$  ou tout intervalle (réel) non réduit à un point. ┘

**Théorème 94 (Pythagore)**

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs. Si  $x \perp y, \|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$ . ┘

**Théorème 95**

Toute famille orthogonale et dénombrable de vecteurs non nuls est libre. ┘

**Preuve**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs orthogonaux non nuls.

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est libre si, pour toute sous-famille finie  $J$  de  $I$  et pour toute famille  $(\lambda_i)_{i \in J}$  de scalaires,

$$\sum_{i \in J} \lambda_i u_i = 0 \implies \forall i \in J, \lambda_i = 0.$$

Supposons que  $\sum_{i \in J} \lambda_i u_i = 0$ . Pour tout  $j \in J$ , on a

$$\langle u_j, \sum_{i \in J} \lambda_i u_i \rangle = 0 = \sum_{i \in J} \lambda_i \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_j \langle u_j, u_j \rangle = \lambda_j \|u_j\|_2^2.$$

$u_j \neq 0$ , donc  $\|u_j\|_2 \neq 0$  et  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j \in J$  : la famille est bien libre. ┘

**Annexe VII.2. Espaces hermitiens et euclidiens**

**Définition 76**

On appelle espace hermitien (resp. euclidien) un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit hermitien (resp. scalaire). ┘

**Théorème 96**

Soit  $E$  un espace hermitien ou euclidien de dimension  $n$ .

Toute famille orthonormée de  $n$  vecteurs constitue une base orthonormée de  $E$ . ┘

**Preuve**

Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , toute famille libre de  $n$  vecteurs constitue une famille génératrice de  $E$ , donc une base de  $E$ . Une famille orthonormée de  $n$  vecteurs étant libre, elle constitue une base orthonormée de  $E$ . ┘

Partant d'une base quelconque de  $E$ , on peut toujours construire une base orthonormée par la procédure dite de Gram-Schmidt.

**Théorème 97**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hermitien ou euclidien de dimension  $n$  et  $B = (u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base orthonormée de  $E$ .  
 Pour tout  $x \in E$ , on a

$$x = \sum_{i=1}^n x_i u_i, \tag{15}$$

où  $x_i := \langle u_i, x \rangle$  est la  $i$ -ième coordonnée de  $x$  dans la base  $B$ .

Pour tous  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i, \tag{16}$$

où  $y_i = \langle u_i, y \rangle$ .

Enfin,

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \tag{17}$$

**Théorème-définition 4**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien (éventuellement de dimension infinie),  $P$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , et  $x$  un élément de  $E$ .

Il existe un et un seul  $x' \in P$  tel que  $x - x'$  soit orthogonal à tout vecteur de  $P$ . Les coordonnées  $x'_i$  de  $x'$  dans une base orthonormée  $(u_i)$  de  $P$  valent  $x'_i = \langle u_i, x \rangle$ . L'application

$$p: E \longrightarrow P, \\ x \longmapsto x' = \sum_{i=1}^n \langle u_i, x \rangle u_i$$

est un projecteur, c.-à-d. une application linéaire telle que  $p \circ p = p$ . Le vecteur  $p(x)$  est appelé projection orthogonale de  $x$  sur  $P$  et l'on a

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in P} + \underbrace{(x - p(x))}_{\perp P}.$$

L'élément de  $P$  le plus proche de  $x$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $P$ . On a  $\|p(x)\|_2^2 \leq \|x\|_2^2$ . ┘

**Preuve**

Soit  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  une base orthonormée de  $P$  et  $x' = \sum_{i=1}^n x'_i u_i$  un vecteur de  $P$ . Le vecteur  $x'$  est la projection orthogonale de  $x$  sur  $P$  si  $x - x'$  est perpendiculaire à tout vecteur de  $P$ , ou, ce qui revient au même, si  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u_j, x - x' \rangle = 0$ .

$$\langle u_j, x - x' \rangle = \langle u_j, x - \sum_{i=1}^n x'_i u_i \rangle = \langle u_j, x \rangle - \sum_{i=1}^n x'_i \langle u_j, u_i \rangle = \langle u_j, x \rangle - x'_j.$$

La projection orthogonale de  $x$  sur  $P$  est donc le vecteur  $x' = \sum_{i=1}^n \langle u_i, x \rangle u_i$ ; les coordonnées de  $x'$  dans la base  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  sont donc les scalaires  $\langle u_i, x \rangle$ .

Montrons que  $x'$  est le vecteur de  $P$  le plus proche de  $x$ . Soit  $y$  un autre vecteur de  $P$ . On a

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2^2 &= \langle (y - x') + (x' - x), (y - x') + (x' - x) \rangle \\ &= \langle y - x', y - x' \rangle + \langle x' - x, y - x' \rangle + \langle y - x', x' - x \rangle + \langle x' - x, x' - x \rangle \\ &= \|y - x'\|_2^2 + \|x' - x\|_2^2 \geq \|x' - x\|_2^2, \end{aligned}$$

puisque  $x' - y \in P$  et  $x - x' \perp P$ . ┘

On retrouve ces résultats en géométrie dans l'espace. Notons  $\mathcal{E}$  l'espace affine usuel à 3 dimensions,  $E$  l'espace vectoriel associé,  $\mathcal{P}$  un plan ou une droite affine de  $\mathcal{E}$ ,  $P$  l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{P}$ ,  $p$  la projection orthogonale sur  $P$  et  $A$  un point quelconque de  $\mathcal{P}$  : pour tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$ , le point  $M'$  défini par  $\overrightarrow{AM'} = p(\overrightarrow{AM})$  s'appelle la projection orthogonale de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  ( $M'$  ne dépend pas du point  $A$  de  $\mathcal{P}$  choisi); c'est le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $M$ .

**Annexe VII.3. Espaces de Hilbert**

Les relations (15), (16) et (17) ont été établies dans un espace hermitien ou euclidien, donc de dimension finie; de même, les propriétés de la projection orthogonale n'ont été démontrées que pour une projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Considérons désormais un espace préhilbertien  $E$  de dimension infinie et une famille orthonormée  $(u_i)_{i \in I}$  de  $E$ . On souhaiterait extrapoler les résultats obtenus en dimension finie, cas où toute famille orthonormée  $(u_i)_{i \in \llbracket 1, \dim E \rrbracket}$  est une base de l'espace. Plusieurs problèmes se posent alors :

- Si une famille orthonormée est bien toujours libre, il faudrait, pour qu'elle soit une base algébrique, qu'elle constitue une famille génératrice de  $E$ , c.-à-d. que tout élément de  $E$  s'écrive comme une combinaison linéaire finie des  $u_i$ <sup>\*9</sup>. Est-ce toujours possible ?
- Si l'on admet des combinaisons linéaires infinies des  $u_i$ , quel sens leur donner ? À quelles conditions convergent-elles, et dans quel espace ?
- Les combinaisons linéaires infinies dépendent-elles de l'ordre, a priori arbitraire, des  $u_i$  ?

Pour répondre à ces questions, introduisons les concepts d'espace de Hilbert et de base hilbertienne :

**Définition 77**

On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien complet pour la norme  $\|\cdot\|_2$ . ┘

*Remarque.* — Si l'espace est de dimension finie et est complet pour une norme, il est complet pour toute autre norme.

**Définition 78**

Soient  $E$  un espace de Hilbert (de dimension éventuellement infinie) et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille orthonormée<sup>\*10</sup> et dénombrable de vecteurs de  $E$ .

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est une *base hilbertienne* de  $E$  si et seulement si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $E$ , c.-à-d. ssi

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \text{ il existe une partie finie } J \text{ de } I \text{ et une famille } (\lambda_i)_{i \in J} \text{ de scalaires tels que } \|x - \sum_{i \in J} \lambda_i u_i\|_2 \leq \epsilon. \quad \text{┘}$$

Si  $E$  est de dimension finie, une base hilbertienne est aussi une base algébrique. En revanche, si  $E$  est de dimension infinie, elle ne peut en être une car une base algébrique d'un espace complet de dimension infinie est nécessairement indénombrable.

**Théorème 98**

Soient  $E$  un espace de Hilbert de dimension infinie et  $(u_i)_{i \in I}$  une base hilbertienne (orthonormée) de  $E$ .

Pour tous  $(x, y) \in E^2$ , on a alors, en notant  $x_i = \langle u_i, x \rangle$  et  $y_i = \langle u_i, y \rangle$  les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans cette base,

$$x \stackrel{\|\cdot\|_2}{=} \sum_{i \in I} x_i u_i, \tag{18}$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$$

et

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \bar{x}_i y_i.$$

Ces résultats sont indépendants de l'ordre des éléments de la base<sup>\*11</sup>. ┘

*Remarque.* — L'équation (18) signifie seulement que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{i=0}^n \langle u_i, x \rangle u_i\|_2 = 0$ . Elle n'est pas forcément vraie pour une autre norme.

9. Si l'on connaissait une base algébrique de  $E$ , on pourrait en déduire une base algébrique orthonormée à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Le théorème de la base incomplète affirme bien que tout espace vectoriel admet une base algébrique, mais sa démonstration en dimension infinie requiert l'axiome du choix, que certains mathématiciens n'admettent pas, et ne donne pas de méthode de construction d'une telle base. Elle peut d'ailleurs être indénombrable.

10. Certains auteurs n'exigent pas que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  soit orthonormée, mais seulement qu'elle soit libre. Rappelons qu'une famille de vecteurs  $(u_i)_{i \in I}$ , où  $I$  est un ensemble éventuellement indénombrable, est libre si et seulement si, pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , la seule combinaison linéaire  $\sum_{i \in J} \lambda_i u_i$  nulle est obtenue pour  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in J$ .

11. On a donc convergence commutative. Ne pas en conclure pour autant qu'il y a convergence absolue : si la convergence absolue implique la convergence commutative dans un espace complet, la réciproque n'est vraie qu'en dimension finie.