Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2011/2012

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen de première session

Exercice 1

Les racines du polynôme caractéristique associé à l'éq. (1) sont $-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{2}$. La solution de l'équation homogène est donc $y_h(x) = A\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{7}x}{2} + B\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{7}x}{2}$.

On cherche une solution particulière de la forme $ax^2 + bx + c$; on trouve $a = 3$, $b = -3$ et $c = -1$.

La solution générale est donc $y(x) = A\,\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{7}x}{2} + B\,\mathrm{e}^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{7}x}{2} + 3x^2 - 3x - 1$.

Exercice 2

1.
   a. $\forall x > 0$, $x^n = \mathrm{e}^{n\ln x}$, donc si $x > 1$, $f_n(x) \to \infty$, et si $x < 1$, $f_n(x) \to 0$. On a également $\forall n > 0$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(0) = 0$. Finalement, (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (= partie entière, aussi notée $\mathrm{E}(x)$).

   b. Soit $h \in [0, 1[$. $\forall x \in [0, h]$, on a $|f_n(x)| = x^n \leqslant h^n$, car la fonction f_n est croissante sur $[0, h]$. On a $\lim_{n\to\infty} h^n = 0$, d'où le résultat.

   c. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue en $x = 1$, donc n'est pas continue sur $[0, 1]$. Or $\forall n$, f_n est continue sur $[0, 1]$, donc f ne peut être sa limite uniforme sur $[0, 1]$.

2.
   a. $\forall x \in [0, 1-\epsilon]$, $|g_n(x)| \leqslant f_n(x)$. Or f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1-\epsilon]$, donc $\exists N$ tel que $\forall x \in [0, 1-\epsilon]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant N \implies f_n(x) \leqslant \epsilon)$, d'où $\forall n \geqslant N$, $\sup_{[0,\,1-\epsilon]}|g_n| \leqslant \epsilon$.

   b. $\forall x \in]1-\epsilon, 1]$, $|g_n(x)| \leqslant |1-x| \leqslant \epsilon$, car $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leqslant 1$. On en déduit que $\forall n \geqslant N$ et $\forall x \in [0, 1]$, $|g_n(x)| \leqslant \epsilon$, donc que (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

   c. Soit $x \in]0, 1[$. On a $\forall n \geqslant 1$, $|g_n'(x)| = |nx^{n-1} - (n+1)x^n| \leqslant nx^{n-1}$. On pose $u_n = nx^{n-1}$. On trouve que $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = x < 1$, donc $\lim_{n\to\infty} nx^{n-1} = 0$. Par ailleurs, $\forall n \geqslant 1$, $g_n'(1) = -1$ et $g_n'(0) = 0$. Donc (g_n') converge simplement vers la fonction $x \to -\lfloor x \rfloor$ sur $[0, 1]$.

   d. Pour intervertir la limite et la dérivée, il suffit, d'après un théorème du cours, qu'il y ait convergence simple en un point de (g_n) (ce qui ne pose pas de problème puisque la convergence de (g_n) est même uniforme) et surtout convergence uniforme de (g_n') sur l'intervalle.

   Si la convergence de (g_n') était uniforme, $\lim_{n\to\infty} g_n'$ serait continue sur $[0, 1]$, car les fonctions g_n' sont continues sur cet intervalle. Or $\lim_{n\to\infty} g_n'$ est discontinue en 1. La convergence de (g_n') n'est donc pas uniforme sur $[0, 1]$ et on ne peut pas conclure quant à l'interversion de la limite et de la dérivée en utilisant le théorème du cours.

   e. On remarque que $\lim_{n\to\infty} g_n'(1) = -1$, alors que $(\lim_{n\to\infty} g_n)'|_{x=1} = 0$, car (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. On ne pouvait effectivement pas intervertir la limite et la dérivée.

Exercice 3

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est paire et continue sur $]-1, 1[$. Les seules singularités sont en ± 1. Au voisinage de 1^-, on a $f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. Cette dernière fonction est de signe constant et est intégrable au voisinage de 1^- (car de type $1/(b-x)^\alpha$, où $b = 1$ et $\alpha = 1/2$, et $\alpha < 1$), donc

f est intégrable sur [0, 1]. La parité de f permet de conclure quant à l'existence de I, avec $I = 2\int_0^1 f$.

2. Posons $x = \sin t$. Comme $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$,

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(2-\sin^2 t)\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2-\sin^2 t}.$$

Posons $t = \arctan u$. Comme $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/(1+u^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= 2\int_{u=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\frac{1}{1+\cos^2(\arctan u)} = 2\int_{u=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\frac{1}{1+1/(1+\tan^2[\arctan u])} \\ &= 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \sqrt{2}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4

1. $c_n(t) = L^{-1}\int_0^L \rho(x,t)\exp(-\mathrm{i}nkx)\,\mathrm{d}x$.
2. Il suffit que $\rho_t \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1_{\mathrm{m}}(\mathbb{R})$ (théorème de Dirichlet), ce qui est le cas puisque ρ_t est même C^2.
3. Il suffit que $\rho_t \in C^2(\mathbb{R}) \cap C^3_{\mathrm{m}}(\mathbb{R})$, ce qui est le cas, pour que $x \mapsto \partial^2\rho/\partial x^2 \in C^0 \cap C^1_{\mathrm{m}}$, donc pour qu'elle coïncide avec son développement. La convergence des séries de Fourier de ρ_t, $x \mapsto \partial\rho/\partial x$ et $x \mapsto \partial^2\rho.\partial x^2$ étant uniforme sous ces hypothèses, on peut bien dériver terme à terme.

   Par deux intégrations par parties, on trouve que les coefficients sont $\{-k^2n^2c_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$.
4. Les coefficients de Fourier de $\dot{\rho}_t$ sont donnés pour tout $t \geqslant 0$ par

$$L^{-1}\int_0^L \dot{\rho}_t(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkx}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\left[L^{-1}\int_0^L \rho(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkx}\,\mathrm{d}x\right] = c_n'(t).$$ [1]

   L'application $\dot{\rho}_t$ étant dans $C^0(\mathbb{R}) \cap C^1_{\mathrm{m}}(\mathbb{R})$, elle coïncide avec son développement de Fourier, soit

$$\forall x, \forall t > 0, \quad \rho_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx}.$$

5. L'équation (4) s'écrit $\sum c_n'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx} = \sum(-Dn^2k^2c_n(t))\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx}$. Les fonctions $x \mapsto \partial\rho/\partial t$ et $x \mapsto D\partial^2\rho/\partial x^2$ sont égales sur $\mathbb{R}$, pour tout t positif. Ceci implique que leurs coefficients de Fourier sont les mêmes. En identifiant les coefficients de Fourier, on trouve que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall t \geqslant 0\ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_n(t) = -Dn^2k^2c_n(t).$$

6. La solution générale de cette équation est $c_n(t) = c_{n,0}\exp(-Dn^2k^2t)$. Elle dépend du seul paramètre $c_{n,0}$ d'après les théorèmes sur les équations différentielles linéaires. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t > 0$, $\rho(x,t) = \sum_n c_{n,0}\,\mathrm{e}^{-Dn^2k^2t+\mathrm{i}nkx}$.
7. $\rho(x,0)$ et $f(x)$ sont égales sur $\mathbb{R}$, donc leurs coefficients de Fourier sont égaux. On a donc $c_n(t=0) = c_{n,0} = d_n$, soit, commme ρ coïncide avec son développement $\forall t \geqslant 0$, $\rho(x,t) = \sum d_n\,\mathrm{e}^{-Dn^2k^2t+\mathrm{i}nkx}$. La solution du problème est bien unique.
8. Par intégration par parties, on trouve $d_n = \frac{(1-(-1)^n)L\alpha}{2n^2\pi^2}$ pour $n \neq 0$ et $d_0 = \frac{\alpha L}{4}$. Remarquer que f n'est pas de classe C^2 (elle est néanmoins C^3_{m}) ; ce choix de fonction a été fait pour simplifier le calcul des $\{d_n\}$.

1. Il faudrait justifier l'interversion de l'intégrale et de la dérivée, ce qui est hors programme.

9. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \geqslant 0$,

$$\rho(x,t) = \frac{\alpha L}{4} + \frac{\alpha L}{2\pi^2} \sum_{n \neq 0} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \, \mathrm{e}^{-Dn^2k^2t + \mathrm{i}nkx} = \frac{\alpha L}{4} + \frac{2\alpha L}{\pi^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos[(2\ell+1)kx]}{(2\ell+1)^2} \, \mathrm{e}^{-D(2\ell+1)^2k^2t}.$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de fonctions $t \mapsto \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\cos[(2\ell+1)kx]}{(2\ell+1)^2} \, \mathrm{e}^{-D(2\ell+1)^2k^2t}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}^+$, car $\left| \frac{\cos[(2\ell+1)kx]}{(2\ell+1)^2} \, \mathrm{e}^{-D(2\ell+1)^2k^2t} \right| \leqslant \frac{1}{(2\ell+1)^2}$, $\forall t \geqslant 0$, et $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}$ converge. Ceci permet d'intervertir la limite et le signe somme, et comme on a $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-Dn^2k^2t} = 0$ pour $n \neq 0$, on en déduit que $\lim_{t\to\infty} \rho(x,t) = \frac{\alpha L}{4}$. Aux temps longs, on obtient une densité uniforme.