Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2013/2014

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen du 7 janvier 2014

Première session

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

I. Intégrales de Bertrand

On cherche à déterminer la nature des *intégrales de Bertrand*,

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,(-\ln x)^\beta} \quad \text{et} \quad J(\alpha,\beta) = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha\,(\ln x)^\beta}\,,$$

où α et β sont deux paramètres réels.

1. Déterminer pour quelles valeurs de α et β l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ converge ; on pourra s'aider du changement de variable $u = -\ln x$ et on justifiera soigneusement.
2. Faire de même pour $J(\alpha,\beta)$ à l'aide du changement de variable $v = \ln x$.
3. Calculer explicitement l'intégrale
$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^n}\,,$$
où n est choisi de telle sorte que l'intégrale converge.

II. Séries de fonctions

1. *a.* Étudier la convergence de la série numérique
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n - 1}.$$
   b. On considère maintenant la série de fonctions
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n\,x} - 1}.$$
   Dans quel domaine converge-t-elle simplement ?
   c. Déterminer si elle converge uniformément sur $[1, +\infty]$.

2. On considère la série entière
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2\,n)!}\, x^n.$$
   a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
   b. Examiner la convergence de cette série au bord du disque de convergence (en $x = \pm R$) ; on pourra utiliser la formule de Stirling, $n! \simeq (n/\mathrm{e})^n \sqrt{2\,\pi\,n}$.
   c. Déterminer alors dans quel(s) domaine(s) cette série entière converge simplement, puis uniformément.

III. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite récurrente (u_n) définie par
$$u_{n+1} = 1 + 2/u_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$
et par la donnée de son premier terme, $u_0 = 1$.

1. Donner les points fixes associés à cette suite.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = u_{2\,n}$. Donner la relation entre v_{n+1} et v_n.
3. Montrer que (v_n) est croissante et que, pour tout n, on a $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
4. On considère de même la suite (w_n) définie pour tout n par $w_n = u_{2\,n+1}$. Montrer que (w_n) est décroissante et que, pour tout n, on a $w_n \geqslant 2$.
5. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on précisera.
6. Écrire ℓ sous forme d'une fraction continue.

IV. Séries de Fourier

On considère la fonction f de période $2\,\pi$, *paire*, définie sur $[0, \pi]$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/\pi}.$$

1. Indiquez de quelle classe est cette fonction (c'est-à-dire préciser les entiers k et q pour lesquels elle est C^k sur $\mathbb{R}$ ou C^q par morceaux sur $\mathbb{R}$). Donner son allure sur deux ou trois périodes.
2. Donner l'expression de ses coefficients de Fourier (a_n) et (b_n). ※[1]
3. À quelle(s) condition(s) peut-on écrire que $f(x) = \widetilde{f}(x)$, où $\widetilde{f}$ est le développement en série de Fourier de f ? Donner le développement de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.
4. En évaluant ce développement en $x = 0$ et $x = \pi$, montrer que
$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\,\pi^2\,p^2} = \frac{3 - \mathrm{e}}{4\,(\mathrm{e} - 1)}.$$
   On prendra soin de montrer qu'il est légitime d'additionner les termes des deux séries obtenues.

1. On pourra utiliser les formules d'Euler.