Examen du 7 janvier 2014

Première session

I. Intégrales de Bertrand

1. Pour la première intégrale, le changement de variable sur l'intervalle $[\epsilon, 1/\mathrm{e}]$ donne $I_\epsilon = \int_1^{-\ln\epsilon} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\,u}\, u^{-\beta}\,\mathrm{d}u$. Elle diverge pour tout β lorsque $\epsilon \to 0^+$ si $\alpha > 1$. Si $\alpha = 1$, elle converge lorsque $\beta > 1$. Si $\alpha < 1$, elle converge pour tout β.
2. On trouve, sur l'intervalle $[\mathrm{e}, R]$, $J_R = \int_1^{\ln R} \mathrm{e}^{-(\alpha-1)\,u}\, u^{-\beta}\,\mathrm{d}u$. Lorsque $\alpha < 1$, l'intégrale diverge pour tout β lorsque $R \to \infty$. Si $\alpha = 1$, elle converge si $\beta > 1$. Lorsque $\alpha > 1$, elle converge pour tout β.
3. L'intégrale est $J(n, -1)$, qui converge pour $n > 1$. On trouve alors par intégration par parties
$$J(n,-1) = \int_{\mathrm{e}}^{R} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^n} = \left[-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}\ln x\right]_{\mathrm{e}}^{R} + \frac{1}{n-1}\int_{\mathrm{e}}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}.$$
La deuxième intégrale vaut $\left[-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}\right]_{\mathrm{e}}^{R}$. On trouve donc en passant à la limite $R \to \infty$, bien définie pour les deux termes, que
$$J(n,-1) = \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\mathrm{e}^{-(n-1)} = \frac{n}{(1-n)^2}\,\mathrm{e}^{1-n}.$$

II. Séries de fonctions

1. *a.* On a $\frac{1}{\mathrm{e}^n-1} \overset{\infty}{\simeq} \mathrm{e}^{-n}$, donc la série converge et ce absolument.
   b. Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{\mathrm{e}^{n\,x}-1} \overset{\infty}{\simeq} \mathrm{e}^{-n\,x}$, ce qui implique la convergence simple sur $]0, +\infty[$.
   c. Étudions la convergence normale. Pour tout $x \geqslant 1$, on a
$$|f_n(x)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{1-\mathrm{e}^{-n\,x}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n\,x}}{1-\mathrm{e}^{-n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}.$$
   La série de fonctions converge ainsi normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.
2. *a.* On peut utiliser le critère de d'Alembert, qui donne $|a_{n+1}/a_n| = \frac{(n+1)^2}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)}$, donc $R = 4$.

b. La formule de Stirling donne

$$a_n \simeq \frac{1}{4^n}\sqrt{\frac{\pi n}{2}},$$

donc, lorsque $x = 4$, la série diverge car $a_n 4^n \simeq \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$. Même conclusion pour $x = -4$.

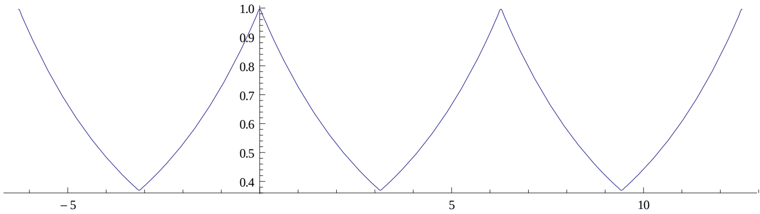
c. La série entière est convergente pour tout $x \in]-1,1[$. La convergence est uniforme dans tout intervalle $[a,b]$ avec $(a,b) \in (]-1,1[)^2$.

III. Étude d'une suite récurrente

1. Les solutions de $x = 1 + 2/x$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
2. On a $v_{n+1} = 1 + \frac{2v_n}{v_n+2}$
3. On peut utiliser les résultats généraux du cours avec $x \mapsto 1 + 2/x$ décroissante.
   On peut aussi le montrer par récurrence.
   On vérifie que $2 > v_1 = 5/3 > v_0$.
   Supposons que $v_0 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant 2$.
   On a
   $$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{2v_n}{2+v_n} - v_n = 1 - \frac{v_n^2}{2+v_n} = \frac{2+v_n-v_n^2}{1+v_n}.$$
   Étant donné que $v_n \leqslant 2$, on trouve $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.
   Il reste à montrer que $v_{n+1} \leqslant 2$. On a
   $$v_{n+1} - 2 = \frac{2v_n}{v_n+2} - 1 = \frac{v_n - 2}{v_n+2} \leqslant 0$$
   par hypothèse.
4. On a de même $w_{n+1} = 1 + \frac{2w_n}{2+w_n}$.
   On vérifie que $w_0 = u_1 = 3 \geqslant 2$ et que $2 > w_1 = 11/5 > w_0$.
   Supposons que $w_0 \geqslant \cdots \geqslant w_n \geqslant 2$.
   On a
   $$w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{2w_n}{2+w_n} - w_n = 1 - \frac{w_n^2}{2+w_n} = \frac{2+w_n-w_n^2}{1+w_n}.$$
   Étant donné que $w_n \geqslant 2$, on trouve $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$.
   Il reste à montrer que $w_{n+1} \geqslant 2$. On a
   $$w_{n+1} - 2 = \frac{2w_n}{w_n+2} - 1 = \frac{w_n - 2}{w_n+2} \geqslant 0$$
   par hypothèse.
5. (v_n) est croissante et majorée, donc elle converge. Elle tend vers un point fixe plus grand que 1 de $f\colon x \mapsto 1 + \frac{2x}{2+x}$, c.-à-d. vers x_1. De même, (w_n) est décroissante et minorée, donc converge vers un point fixe de f plus grand ou égal à 2, c.-à-d. vers x_1. Les suites des termes pairs et impairs convergeant vers la même limite, $u_n \to 2$.
6. On trouve
   $$\ell = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1+\cdots}}}.$$

IV. Séries de Fourier

1. La fonction est de classe C^0 et $C^1_m(\mathbb{R})$, les points de discontinuité de f' étant $x \in \pi\,\mathbb{Z}$.



2. Par parité, $b_n = 0$ pour tout n.
   Pour les a_n, on a
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,x}\right)\mathrm{e}^{-x\,\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\mathrm{i}\,n\,\pi}\left(1-\frac{(-1)^n}{\mathrm{e}}\right) + \frac{1}{1+\mathrm{i}\,n\,\pi}\left(1-\frac{(-1)^n}{\mathrm{e}}\right),$$
   soit
$$a_n = \frac{2}{1+\pi^2 n^2}\left(1-\frac{(-1)^n}{\mathrm{e}}\right).$$

3. D'après Dirichlet, il suffit que $f \in C^1_m(\mathbb{R})$ et que f soit continue en x. C'est le cas ici pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   On a donc en particulier, pour tout $x \in [0, \pi]$,
$$\mathrm{e}^{-x/\pi} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{1+\pi^2 n^2}\left(1-\frac{(-1)^n}{\mathrm{e}}\right)\cos(n\,x).$$

4. En $x = 0$, cela donne
$$\frac{1}{\mathrm{e}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\pi^2 n^2}\left(1-\frac{(-1)^n}{\mathrm{e}}\right).$$
   En $x = \pi$, on a
$$\frac{1}{\mathrm{e}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\pi^2 n^2}\left((-1)^n - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$
   En faisant la somme de ces deux développements, ce qui est légitime car ils sont tous les deux absolument convergents (par comparaison avec la somme de Riemann convergente $\sum 1/n^2$), on obtient
$$\frac{3}{\mathrm{e}} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\pi^2 n^2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)(1+(-1)^n),$$
   ce qui donne finalement, puisque ne subsistent que les termes d'indice pair ($n = 2\,p$),
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\,\pi^2 p^2} = \frac{3-\mathrm{e}}{4\,(\mathrm{e}-1)}.$$