Examen du 27 mai 2014

Deuxième session

I. Convergence de séries

1. *a.* $u_n \simeq_\infty (1/\mathrm{e})^n$. La série géométrique $\sum (1/\mathrm{e})^n$ converge ($|1/\mathrm{e}| < 1$) et est de signe constant, donc $\sum u_n$ converge.

   b.
$$v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1 = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left[\frac{n}{n+1}\right]\right) - 1 = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln\left[1+\frac{1}{n}\right]\right) - 1$$
$$\underset{\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) - 1 = 1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \underset{\infty}{\simeq} -\frac{1}{n^2}\,.$$
   La série $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$) et est de signe constant, donc $\sum v_n$ converge.

2. *a.* Oui d'après le théorème de Leibniz : série alternée ; $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$; $(|u_n|) \searrow$.

   b. On a
$$v_n = u_n - \frac{u_n^2}{2} + O(u_n^3) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\,n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$
   $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n/\sqrt{n}$ converge d'après la question précédente.
   $\sum_{n\geqslant 2} n^{-3/2}$ aussi (série de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$), donc $\sum O(n^{-3/2})$ aussi : en effet, si $f_n = O(g_n)$ et que $\sum g_n$ est une série à termes positifs convergente, alors $\sum f_n$ converge.
   En revanche, $\sum_{n\geqslant 2} 1/(2\,n)$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$).
   $\sum_{n\geqslant 2} (u_n + O(u_n^3))$ converge et $\sum_{n\geqslant 2} (-u_n^2)/2$ diverge, donc $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ diverge.

II. Séries entières

1. Avec $a_n = (-1)^{n+1}/n$, on obtient $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell = 1$, donc $R = 1/\ell = 1$ par la règle de d'Alembert.

2. *a.* Si $x < 1$, le seul point singulier est $t = 0$. Cette intégrale est bien convergente car $t \mapsto \ln(1-t)/t$ admet une limite finie en 0 (condition suffisante). En effet, $\ln(1-t) \simeq_0 -t$, donc $\lim_{t\to 0} \ln(1-t)/t = -1$.
   Si $x = 1$, $t = 1$ est aussi singulier. Comme $\ln(1-t)/t \simeq_{0^-} \ln(1-t)$ et qu'une singularité logarithmique à distance finie est intégrable (cf. cours), l'intégrale est aussi convergente en $t = 1$ pour $x = 1$.

   b. Pour tout $t = -u \in\,]0, 1[$, on a
$$\frac{-\ln(1-t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n}\,.$$

On peut intégrer et intervertir la somme et l'intégrale à l'intérieur du disque ouvert de convergence, donc

$$\int_{t=\varepsilon}^{x} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t=\varepsilon}^{x} \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^n}{n^2}\right]_{t=\varepsilon}^{x}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

c. La série de fonctions $\sum x^n/n^2$ est normalement convergente sur $[0,1]$, donc uniformément convergente. La fonction $x \mapsto x^n/n^2$ étant continue, la série de fonctions est continue sur $[0,1]$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \lim_{x\to 1^-} \left(\int_{t=0}^{x} \frac{-\ln[1-t]}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \int_{t=0}^{1} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = S(1).$$

3. On obtient

$$\int_{t=0}^{x} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[-(\ln t)\ln(1-t)\Big]_{t=0}^{x} + \int_{t=0}^{x} \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $(\ln t)\ln(1-t) \simeq -t\ln t \to 0$ quand t tend vers 0, donc

$$\int_{t=0}^{1/2} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -(\ln 2)^2 + \int_{t=0}^{1/2} \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

4. Avec $y = 1-t$, on obtient

$$\int_{t=1/2}^{1} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{y=0}^{1/2} \frac{-\ln y}{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

D'après la relation de Chasles,

$$S(1) = S(1/2) + \int_{t=1/2}^{1} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

donc

$$S(1) = S(1/2) + \int_{y=0}^{1/2} \frac{-\ln y}{1-y}\,\mathrm{d}y = 2\,S(1/2) + (\ln 2)^2$$

en utilisant le résultat de la question 3. Comme $S(1) = \pi^2/6$, on obtient finalement

$$S(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}\,.$$

III. Série de Fourier

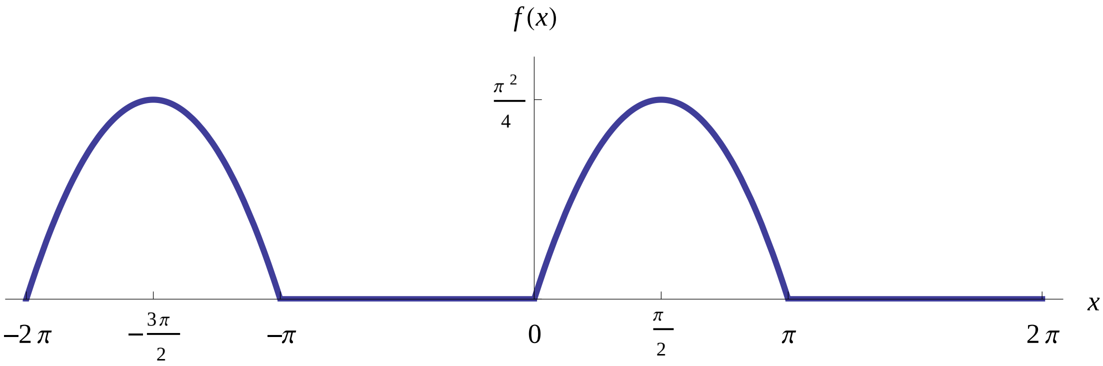
1. On a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x\in I} f(x)\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x\in I} f(x)\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x,$$

où I est n'importe quel intervalle de longueur $2\,\pi$.

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos[n\,x] + b_n\sin[n\,x]\Big).$$

2. a.



b.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\,\pi}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Pour $n \geqslant 1$, calculons d'abord les quantités suivantes. Avec $u' = \cos(n\,x)$ et $v = x$,

$$\int_0^\pi x\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[x\,\frac{\sin(n\,x)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x = 0 - \left[\frac{-\cos(n\,x)}{n^2}\right]_0^\pi$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\,. \tag{1}$$

Avec $u' = \sin(n\,x)$ et $v = x$,

$$\int_0^\pi x\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[x\,\frac{-\cos(n\,x)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-\cos(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi\,\frac{-(-1)^n}{n} + \left[\frac{\sin(n\,x)}{n^2}\right]_0^\pi = -\,\frac{(-1)^n\,\pi}{n}\,. \tag{2}$$

Avec $u' = \cos(n\,x)$, $v = x^2$ et en utilisant (1),

$$\int_0^\pi x^2\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2\,\frac{\sin(n\,x)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\,x\,\frac{\sin(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{2}{n}\,\frac{-(-1)^n\,\pi}{n}$$
$$= \frac{2\,(-1)^n\,\pi}{n^2}\,.$$

Avec $u' = \sin(n\,x)$, $v = x^2$ et en utilisant (2),

$$\int_0^\pi x^2\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2\,\frac{-\cos(n\,x)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\,x\,\frac{-\cos(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi^2\,\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{(-1)^n\,(2 - \pi^2\,n^2) - 2}{n^3}\,.$$

On en déduit que

$$a_{n>0} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,(\pi - x)\cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = -\,\frac{1 + (-1)^n}{n^2}$$

et

$$b_n = \frac{2 \times (1 - (-1)^n)}{\pi\,n^3}\,.$$

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2}\cos(n\,x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\sin(n\,x)$$
$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\cos(2\,p\,x) + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2\,p+1)^3}\sin([2\,p+1]\,x).$$

3. f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc $\widetilde{f}(x) = (f[x^-] + f[x^+])/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le théorème de Dirichlet. Comme f est en plus continue sur $\mathbb{R}$, $(f[x^-] + f[x^+])/2 = f(x)$, donc $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Pour $x = 0$, on a,
$$0 = f(0) = \widetilde{f}(0) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2},$$
   donc
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Pour $x = \pi/2$, on a
$$\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \widetilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$
   et pour $x = -\pi/2$,
$$0 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \widetilde{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$
   En faisant la somme et la différence, on obtient
$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}$$
   et
$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$