Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2013/2014

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen du 27 mai 2014

Deuxième session

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Toute réponse sera justifiée.

I. Convergence de séries

1. Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?
   a. $\sum_{n\geqslant 1} u_n$, avec $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n - 1}$.
   b. $\sum_{n\geqslant 1} v_n$, avec $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{1/n} - 1$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
   a. La série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge-t-elle ?
   b. On pose $v_n = \ln(1 + u_n)$. La série $\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge-t-elle ?

II. Séries entières

1. On rappelle que, pour tout u appartenant à un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}$,
$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n}.$$
   Quel est le rayon de convergence de cette série ? (Justifier.)
2. Pour tout $x \in [0, 1]$, on pose
$$S(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{-\ln(1-t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$
   a. Cette intégrale est-elle bien convergente ?
   b. En utilisant le résultat de la question 1, écrire $S(x)$ sous forme d'une série entière pour tout $x \in]0, 1[$.
   c. Montrer que $S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$S(1/2) = -(\ln 2)^2 + \int_{y=0}^{1/2} \frac{-\ln y}{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

4. Réécrire

$$\int_{t=1/2}^{1} \frac{-\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

sous forme d'une intégrale par rapport à une variable y allant de 0 à 1/2. (Préciser le changement de variable $t \mapsto y$ utilisé.)

En déduire, à l'aide du résultat de la question 3, une relation simple entre $S(1)$ et $S(1/2)$, puis la valeur de $S(1/2)$, sachant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

III. Série de Fourier

1. Rappeler l'expression des coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ d'une fonction 2π périodique f.

   Écrire $\widetilde{f}(x)$ en fonction des a_n et b_n.

2. On considère la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0[, \\ x\,(\pi - x) & \text{si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$$

   a. Représenter f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

   b. Calculer les coefficients a_n et b_n de f en traitant séparément le cas $n = 0$. (*Vérification* : on doit obtenir $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = -1/2$ et $b_1 = 4/\pi$.)

   Écrire l'expression de $\widetilde{f}(x)$ en distinguant les indices pairs et impairs.

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\widetilde{f}(x) = f(x)$? (Justifier.)

   En déduire l'expression de

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\,.$$

4. En considérant les valeurs de f en $x = \pm\pi/2$, calculer

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2}$$

et

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p}}{(2p+1)^3}\,.$$