Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2009/2010

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen du 13 janvier 2010

Première session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1. Intégrales impropres (≈ 9 points)

Soit la fonction

$$f : u \mapsto f(u) = \sqrt{\frac{\cos u}{\tan u}},$$

définie pour $0 < u < \pi/2$.

1. Quelle est la limite de f quand u tend vers $\pi/2$?

$\lim_{u\to\pi/2} \cos u = 0$ et $\lim_{u\to\pi/2} \tan u = \infty$, donc $\lim_{u\to\pi/2} f(u) = 0$.

2. Donner un équivalent asymptotique de f quand u tend vers 0.

En 0, $\tan u \simeq u$ et $\cos u \simeq 1$, donc $f(u) \simeq u^{-1/2}$.

3. On considère l'intégrale impropre $\int_{u=0}^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u$. Est-elle convergente (justifiez) ?
Si oui, calculer sa valeur (on pourra soit faire un changement de variable, soit réécrire f sous la forme d'une dérivée reconnaissable).

f est une fonction continue sur $]0, \pi/2[$: elle est donc localement intégrable sur tout sous-intervalle fermé compris dans $]0, \pi/2[$. Il suffit donc de voir si l'intégrale converge en 0 et en $\pi/2$.

En $\pi/2$, f tend vers une limite finie, donc l'intégrale converge en cette borne puisque celle-ci est à distance finie.

En 0, $f(u) \simeq u^\alpha$ avec $\alpha = -1/2 > -1$: l'intégrale converge donc également en cette borne puisque celle-ci est également à distance finie.

Avec le changement de variables $u \mapsto x^2 = \sin u$, on trouve

$$\int_{u=0}^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{x=0}^{1} 2\,\mathrm{d}x = 2.$$

(On peut aussi écrire

$$f(u) = \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}} = 2\,\frac{\mathrm{d}\sqrt{\sin u}}{\mathrm{d}u},$$

d'où

$$\int_{u=0}^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u = 2 \cdot \left[\sqrt{\sin u}\right]_{u=0}^{\pi/2} = 2.)$$

Exercice 2. Équation différentielle linéaire (≈ 14 points)

On veut résoudre l'équation

$$x^2\, y'' - 2\, y = 3\, x^2. \tag{1}$$

1. Quelle est la nature de cette équation ? (Soyez précis.)

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, inhomogène et à coefficients variables.

2. On cherche des solutions de la forme $y_\alpha(x) = x^\alpha$ de l'équation homogène. Déterminer les valeurs possibles de α et en déduire la solution générale de l'équation homogène.

On obtient $\alpha \cdot (\alpha - 1) - 2 = 0$, soit $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -1$.

L'équation différentielle est linéaire d'ordre 2 : les solutions de l'équation homogène constituent donc un espace vectoriel de dimension 2. Or $y_{\alpha_1}(x)$ et $y_{\alpha_2}(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène, donc toute solution de celle-ci s'écrira sous la forme

$$y_{\mathrm{h}}(x) = \lambda\, x^2 + \frac{\mu}{x},$$

où λ et μ sont des constantes.

3. Trouver une solution particulière de (1) de la forme $y_\beta(x) = \beta(x)\, x^2$, où $\beta(x)$ est une fonction de x ; on aura intérêt à développer au préalable $\left(x^4\, \beta'(x)\right)'$.

On obtient $x^4\, \beta''(x) + 4\, x^3\, \beta'(x) = 3\, x^2$. Or $x^4\, \beta''(x) + 4\, x^3\, \beta'(x) = \left(x^4\, \beta'(x)\right)'$, donc, en intégrant, $x^4\, \beta'(x) = x^3$, soit $\beta'(x) = 1/x$. En intégrant à nouveau, on trouve $\beta(x) = \ln|x|$.

Remarque. Dans les deux intégrations ci-dessus, on a pris des constantes d'intégration nulles : ça n'a pas d'importance car on cherche *une* solution particulière.

4. En déduire la solution générale de (1).

(1) est une équation différentielle *linéaire*, donc sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de (1) :

$$y(x) = \lambda\, x^2 + \frac{\mu}{x} + x^2 \ln|x|.$$

Exercice 3. Équation différentielle à variables séparées (≈ 14 points)

On se place dans un référentiel, supposé galiléen, où le Soleil (S, de masse M) est fixe. À l'instant $t = 0$, un corps C, de masse $m \ll M$, est lâché sans vitesse à une distance r_0 de S ; il décrit ensuite un mouvement radial vers S.

Notons $r(t)$ la distance entre C et S à un instant t quelconque, $v(t)$ la vitesse de C, et G la constante de gravitation. Le système $\{C, S\}$ peut être considéré comme isolé : son énergie,

$$E = \frac{1}{2}\, m\, v^2 - \frac{G\, M\, m}{r},$$

reste donc constante au cours du temps.

1. Écrire, à l'aide de la conservation de l'énergie, l'équation différentielle en $r(t)$ décrivant le mouvement de C.

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{G\, M\, m}{r} = -\frac{G\, M\, m}{r_0}.$$

2. *a.* Préciser, sans calculs, le signe de $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$.

C est attiré par S et sa vitesse initiale est nulle, donc $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \leqslant 0$.

b. Réécrire l'équation différentielle obtenue à la question 1 sous forme d'une équation à variables séparées.

En séparant les termes en r et ceux en t, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/r_0}} = \pm\sqrt{2\,G\,M}\;\mathrm{d}t.$$

Comme $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \leqslant 0$, on a

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/r_0}} = -\sqrt{2\,G\,M}\;\mathrm{d}t.$$

3. On note τ le temps mis par C pour atteindre S. Écrire τ sous forme d'une intégrale d'une fonction de r.

$$\tau = \frac{-1}{\sqrt{2\,G\,M}} \int_{r=r_0}^{0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/r_0}}.$$

4. Calculer τ à l'aide du changement de variable $r \mapsto u$, où $r = r_0 \cos^2 u$.

On a $\mathrm{d}r = -2\,r_0 \cos u \sin u\;\mathrm{d}u$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/r_0}} = \frac{\sqrt{r}\;\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r/r_0}} = -2\,r_0^{3/2} \cos^2 u\;\mathrm{d}u.$$

$u(r) = \arccos\sqrt{r/r_0}$, donc $u(r_0) = 0$ et $u(0) = \pi/2$.

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{-1}{\sqrt{2\,G\,M}} \int_{u=0}^{\pi/2} (-2)\,r_0^{3/2} \cos^2 u\;\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{2\,r_0^3}{G\,M}} \int_{u=0}^{\pi/2} \cos^2 u\;\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\frac{2\,r_0^3}{G\,M}} \int_{u=0}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\,u)}{2}\;\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{2\,r_0^3}{G\,M}} \cdot \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2\,u)}{4}\right]_{u=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\,r_0^3}{G\,M}}.\end{aligned}$$

5. **Question facultative.**

La période de révolution d'un corps décrivant une ellipse de demi-grand axe a et de foyer S est $T = 2\,\pi\,\sqrt{a^3/(G\,M)}$. En déduire à nouveau l'expression de τ.

La trajectoire suivie par C correspond à la moitié d'une ellipse de foyer S, de demi-grand axe $a = r_0/2$ et de demi-petit axe nul, donc on doit avoir $\tau = T(a = r_0/2)/2$.

$$\frac{T(a = r_0/2)}{2} = \pi\,\sqrt{r_0^3/(8\,G\,M)} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\,r_0^3}{G\,M}},$$

qui est bien égal à τ.

Exercice 4. Séries de Fourier (≈ 23 points)

A. Questions préliminaires

1. On considère l'intégrale

$$I_p(n) = \int_{-\pi}^{\pi} x^p \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x,$$

où $n > 0$ et $p \geqslant 0$ sont entiers et p est pair.

Exprimer $I_p(n)$ en fonction de $I_{p-2}(n)$.

Calculer $I_0(n)$ et en déduire $I_2(n)$ et $I_4(n)$.

Deux intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned}
I_p(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^p}_{v_1} \underbrace{\cos(n\,x)}_{u_1'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^p \sin(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{p}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^{p-1}}_{v_2} \underbrace{\sin(n\,x)}_{u_2'}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{p}{n} \cdot \left(\left[\frac{-\cos(n\,x)\,x^{p-1}}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{p-1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x^{p-2} \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^n\,\frac{p\,\pi^{p-1}}{n^2} \cdot (1-(-1)^{p-1}) - \frac{p\cdot(p-1)}{n^2}\,I_{p-2}(n) = (-1)^n \times \frac{2\,p\,\pi^{p-1}}{n^2} - \frac{p\cdot(p-1)}{n^2}\,I_{p-2}(n)
\end{aligned}$$

puisque p est pair.

$$I_0(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(n\,x)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$I_{p=2}(n) = (-1)^n \times \frac{2\times 2\,\pi^{2-1}}{n^2} - \frac{2\times(2-1)}{n^2}\,I_0(n) = (-1)^n \times \frac{4\,\pi}{n^2}.$$

$$I_{p=4}(n) = (-1)^n \times \frac{2\times 4\,\pi^{4-1}}{n^2} - \frac{4\times(4-1)}{n^2}\,I_2(n) = (-1)^n \times \frac{8\,\pi}{n^2} \cdot \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2}\right).$$

2. Rappeler l'expression, en termes de cosinus et de sinus, du développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ d'une fonction f de période $2\,\pi$, ainsi que celle des coefficients a_n et b_n correspondants.

$$\widetilde{f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\right),$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n\,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x.$$

B. Calcul de séries

Soit la fonction f définie pour $x \in\ ]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2 + C\,x^4$, où C est une constante réelle, et étendue par $2\,\pi$-périodicité en dehors de cet intervalle.

3. Calculer les coefficients a_n et b_n du développement en série de Fourier de f.

On a $b_n = 0$ car f est paire.

Un calcul simple donne $a_0 = 2\,\pi^2/3 + 2\,C\,\pi^4/5$.

Pour $n > 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(I_2(n) + C\,I_4(n)\right) = 4 \times (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n^2} + 2\,C \cdot \left(\frac{\pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4}\right)\right).$$

4. On souhaite que les coefficients de Fourier décroissent comme $O(1/n^4)$ pour $n \gg 1$. Quelle valeur faut-il alors choisir pour C ?

On trouve $C = -1/(2\,\pi^2)$.

■

On utilise désormais la valeur de C trouvée à la question 4.
On a donc

$$a_0 = \frac{7\,\pi^2}{15} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{24 \times (-1)^n}{\pi^2\, n^4} \text{ pour } n > 0.$$

5. Dessiner schématiquement le graphe de $f(x)$ pour $x \in]-3\,\pi, 3\,\pi[$.

f a des tangentes horizontales en $-\pi$, 0 et π. On a $f(0) = 0$ et $f(\pm\pi) = \pi^2/2$. f est décroissante sur $]-\pi, 0[$ et croissante sur $]0, \pi[$. En particulier, f est continue en $x = \pm\pi$.

6. Écrire explicitement le développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ de f.
Le développement converge-t-il vers f en tout point (justifiez) ?

$$\widetilde{f}(x) = \frac{7\,\pi^2}{30} + \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos(n\,x).$$

f est C^1 par morceaux, donc, d'après le théorème de Dirichlet, $\widetilde{f}$ converge vers $(f(x^-) + f(x^+))/2$ pour tout x. Comme f est continue, $\forall\, x$, $(f(x^-) + f(x^+))/2 = f(x)$, donc $\widetilde{f}$ converge bien vers f en tout point.

7. **Question facultative.**
Donner la valeur de l'entier r pour que l'affirmation suivante soit vraie : « La dérivée d'ordre $r-1$, $f^{(r-1)}$, est une fonction continue sur l'axe réel, tandis que $f^{(r)}$ présente des discontinuités ».

On a $r = 3$ par un théorème énoncé en cours.
On retrouve la même conclusion par un calcul direct : $f'(\pm\pi) = 0$, $f''(\pm\pi) = -4$ et $f^{(3)}(\pm\pi) = \mp 12/\pi$.

8. Calculer la somme

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

D'après le 6, $f(x) = \widetilde{f}(x)$ en tout point.
En particulier, pour $x = \pi$, on trouve

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{2} = \frac{7\,\pi^2}{30} + \frac{24}{\pi^2}\, S_1,$$

d'où

$$S_1 = \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{7\,\pi^2}{30}\right) \times \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^4}{90}.$$

9. **Question facultative.**

Calculer la somme

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

De même, en prenant $x = 0$, on trouve

$$f(0) = 0 = \frac{7\,\pi^2}{30} + \frac{24}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{7\,\pi^2}{30} - \frac{24}{\pi^2}\,S_2,$$

donc

$$S_2 = \frac{7\,\pi^2}{30} \times \frac{\pi^2}{24} = \frac{7\,\pi^4}{720}.$$

10. En utilisant l'égalité de Parseval-Bessel, que l'on rappellera, calculer la somme

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

D'après le théorème de Parseval-Bessel,

$$\|f\|^2 := \frac{1}{2\,\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Remarque. Ce théorème est applicable car f est continue (il suffit en fait que f soit continue par morceaux) et $2\,\pi$-périodique.

On trouve

$$S_3 = \frac{\pi^4}{288} \times \left(\frac{107\,\pi^4}{1260} - \frac{49\,\pi^4}{900} \right) = \frac{\pi^8}{9450}.$$