Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2009/2010

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen du 29 janvier 2010

Deuxième session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1 (≈ 6 points)

Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 2\,y' + y = x^2\,.$$

Exercice 2 (≈ 18 points)

1. Montrer que la série
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1}$$
converge.
2. Soit f la fonction 2π-périodique et impaire valant 1 sur $]0, \pi[$.
   a. En utilisant le développement en série de Fourier de f, calculer
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1}\,.$$
   b. Calculer
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^2}\,.$$

Exercice 3 (≈ 12 points)

On se propose d'étudier l'équation différentielle (dite « de Bernoulli »)
$$y'(x) + p(x)\;y(x) = q(x)\;y^n(x)\,, \tag{1}$$
où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x ; p et q sont des fonctions réelles de x connues, et $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ est une constante.

1. Montrer que la fonction $v(x) = y^{1-n}(x)$ satisfait une équation différentielle *linéaire* que l'on précisera.
2. On souhaite trouver une solution non nulle de l'équation différentielle
$$y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \tag{2}$$
pour $x > 0$.
   a. Mettre l'équation (2) sous la forme (1) et en déduire l'équation satisfaite par $v(x)$.
   b. Trouver la solution $v(x)$ la plus générale de cette dernière équation.
   c. Déterminer ensuite la solution $y(x)$ de l'équation (2) qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

Exercice 4 (≈ 24 points)

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$t \longmapsto f(t) = \frac{\ln t}{1-t}$$

et sa primitive

$$I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$x \longmapsto I(x) = \int_{t=1}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

1. Donner le domaine de définition de f et discuter sa continuité.
2. Que vaut la limite de f en $t = 1$?

■

On prolonge désormais la fonction $f : t \mapsto f(t)$ par continuité en $t = 1$ (c'est-à-dire qu'on pose

$$f(1) := \lim_{\substack{t\to 1\\ t\neq 1}} f(t)\,)\,.$$

3. Donner le domaine de définition de I.
4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{u\,(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(1-u)}\,,$$

   où A et B sont des constantes que l'on précisera.
   En déduire que

$$I(1/x) = -I(x) - \frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$

5. *a.* Rappeler l'expression du développement en série entière de $\ln(1+u)$ au voisinage de $u = 0$. Quel est son rayon de convergence ?
   b. En déduire un développement en série de $f(t)$ au voisinage de $t = 1$.
6. Exprimer $I(x)$ sous forme d'un développement en série au voisinage de $x = 1$. Montrer que ce développement est valable pour tout $x \in]0, 2[$. On justifiera soigneusement les calculs.
7. On admet les théorèmes suivants :

   Théorème 1
   - Si une série de fonctions $S_N(x)$ converge uniformément vers une fonction $S(x)$ sur un intervalle $]a, b[$ quand l'entier N tend vers l'infini,
   - si pour tout N, $S_N(x)$ converge simplement vers une limite finie ℓ_N quand x tend vers a
   - et si ℓ_N converge simplement vers une limite finie quand N tend vers l'infini,

   alors

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{N\to\infty} S_N(x)\Big) = \lim_{N\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} S_N(x)\Big)\,.$$ ⌟

   Théorème 2
   Si une série de fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} g_n(x)$ converge normalement sur un intervalle K (c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^{N} \sup_{x\in K} |g_n(x)|$ converge simplement), alors $S_N(x)$ converge uniformément sur K. ⌟

   En déduire $I(0)$ sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.
8. Donner un équivalent asymptotique de $I(x)$ quand x tend vers l'infini.