Examen du 29 janvier 2010

Deuxième session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1 (≈ 6 points)

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2\,y' + y = x^2\,.$$

Cherchons des solutions de la forme $e^{r\,x}$ de l'équation homogène. L'équation caractéristique $r^2 - 2\,r + 1 = 0$ admet une racine double, $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_{\mathrm{h}} = (\lambda + \mu\,x)\,e^x\,.$$

Cherchons une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{p}} = a\,x^2 + b\,x + c$ de l'équation inhomogène. On obtient $a = 1$, $b = 4$ et $c = 6$. La solution générale de l'équation inhomogène est donc

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}} = (\lambda + \mu\,x)\,e^x + x^2 + 4\,x + 6\,.$$

Exercice 2 (≈ 18 points)

1. Montrer que la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1}$$

converge.

Le théorème de Leibniz est applicable car
- la série est alternée,
- la suite $p \mapsto |(-1)^p/(2\,p+1)|$ est décroissante,
- et $\lim_{p\to\infty}(-1)^p/(2\,p+1) = 0$.

2. Soit f la fonction 2π-périodique et impaire valant 1 sur $]0, \pi[$.
   a. En utilisant le développement en série de Fourier de f, calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1}\,.$$

$a_n = 0$ car f est impaire.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos(n\,x)}{n\,\pi}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos(n\,x)}{n\,\pi}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\,\pi} \times (1 - (-1)^n)\,,$$

donc $b_n = 0$ si n est pair et $b_n = 4/(n\,\pi)$ si n est impair.

Le développement en série de Fourier de f est

$$\widetilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2\,p+1)\,\pi} \sin((2\,p+1)\,x)\,.$$

f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue en $\pi/2$, donc

$$\widetilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4}{(2\,p+1)\,\pi} \sin\left((2\,p+1)\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1}\,,$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2\,p+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

b. Calculer

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^2}\,.$$

D'après le théorème de Parseval-Bessel (applicable car f est continue par morceaux),

$$\|f\|^2 := \frac{1}{2\,\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} b_{2\,p+1}^2\,.$$

$\|f\|^2 = 1$, donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Exercice 3 (≈ 12 points)

On se propose d'étudier l'équation différentielle (dite « de Bernoulli »)

$$y'(x) + p(x)\,y(x) = q(x)\,y^n(x)\,, \tag{1}$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x ; p et q sont des fonctions réelles de x connues, et $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ est une constante.

1. Montrer que la fonction $v(x) = y^{1-n}(x)$ satisfait une équation différentielle *linéaire* que l'on précisera.

On trouve $v'(x) = (1-n)\,y^{-n}(x)\,y'(x)$, puis

$$\frac{v'(x)}{1-n} + p(x)\,v(x) = q(x)\,.$$

2. On souhaite trouver une solution non nulle de l'équation différentielle

$$y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \tag{2}$$

pour $x > 0$.

a. Mettre l'équation (2) sous la forme (1) et en déduire l'équation satisfaite par $v(x)$.

On trouve $n = 1/2$, $p(x) = 1/x$ et $q(x) = 1$, soit

$$v' + \frac{1}{2\,x}\,v = \frac{1}{2}\,.$$

b. Trouver la solution $v(x)$ la plus générale de cette dernière équation.

L'équation homogène $v_\mathrm{h}' + v_\mathrm{h}/(2\,x) = 0$ peut se mettre sous la forme d'une équation à variables séparées,

$$\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{h}}{v_\mathrm{h}} = -\frac{\mathrm{d}x}{2\,x}\,.$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|v_\mathrm{h}| = -\frac{1}{2}\ln x + k\,,$$

soit $v_\mathrm{h}(x) = c\,x^{-1/2}$, où $c = \mathrm{e}^k \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante.

Cherchons une solution particulière de l'équation inhomogène de la forme $v_\mathrm{p}(x) = a\,x$: on obtient $a = 1/3$.

On a donc

$$v(x) = \sqrt{y(x)} = v_\mathrm{h}(x) + v_\mathrm{p}(x) = c\,x^{-1/2} + \frac{1}{3}\,x\,.$$

c. Déterminer ensuite la solution $y(x)$ de l'équation (2) qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$.

On trouve $c = -1/3$, ce qui donne finalement

$$y(x) = \frac{x^3 - 2\,x^{3/2} + 1}{9\,x}\,.$$

Exercice 4 (≈ 24 points)

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\qquad t \longmapsto f(t) = \frac{\ln t}{1-t}$$

et sa primitive

$$I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\qquad x \longmapsto I(x) = \int_{t=1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Donner le domaine de définition de f et discuter sa continuité.

$t \mapsto \ln t$ est définie et continue pour $t > 0$, et $t \mapsto 1/(1-t)$ pour $t \neq 1$, donc f est définie et continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. Que vaut la limite de f en $t = 1$?

Posons $t = 1 + \epsilon$. On obtient

$$\lim_{t\to1} f(t) = \lim_{\epsilon\to0} -\frac{\ln(1+\epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon + o(\epsilon)}{\epsilon} = -\lim_{\epsilon\to0}(1 + o(1)) = -1\,.$$

■

On prolonge désormais la fonction $f : t \mapsto f(t)$ par continuité en $t = 1$ (c'est-à-dire qu'on pose

$$f(1) \coloneqq \lim_{\substack{t\to 1\\ t\neq 1}} f(t)\,)\,.$$

3. Donner le domaine de définition de I.

$f(t)$ n'est pas définie pour $t \leq 0$, donc $I(x)$ ne l'est pas pour $x < 0$. Il se peut en revanche que $I(x)$ soit définie en $x = 0$ en tant qu'intégrale impropre.

Montrons que $I(x)$ est définie sur $[0, +\infty[$. f étant continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier que f est intégrable quand $t \to x = 0^+$.

Quand $t \to 0^+$, $f(t) \simeq \ln t$. Il s'agit d'une singularité logarithmique à distance finie, donc f est intégrable en 0^+.

Le domaine de définition de $I(x)$ est donc $[0, +\infty[$.

4. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{u\cdot(1-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(1-u)}\,,$$

où A et B sont des constantes que l'on précisera.

En déduire que

$$I(1/x) = -I(x) - \frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$

$$\frac{1}{u\cdot(1-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{(1-u)}$$

($A = B = 1$).

Posons $t = 1/u$.

$$\begin{aligned} I(1/x) &= \int_{t=1}^{1/x} \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\int_{u=1}^{x} \frac{\ln u}{u\cdot(1-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{-\int_{u=1}^{x} \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u}_{I(x)} - \int_{u=1}^{x} \frac{\ln u}{u}\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

$$\int_{u=1}^{x} \underbrace{\ln u}_{g(u)}\ \underbrace{\frac{1}{u}}_{g'(u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln^2 u\right]_{u=1}^{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

donc

$$I(1/x) = -I(x) - \frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$

5. *a.* Rappeler l'expression du développement en série entière de $\ln(1+u)$ au voisinage de $u = 0$. Quel est son rayon de convergence ?

Pour tout u tel que $|u| < 1$,

$$\ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{u^n}{n}\,.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

b. En déduire un développement en série de $f(t)$ au voisinage de $t = 1$.

Posons $t = 1 + u$. Dans son domaine de convergence,

$$\forall\ t \neq 1\ (\forall\ u \neq 0),\quad f(t) = \frac{\ln t}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-t)^{n-1}}{n} := \hat{f}(t)\,.$$

Ce développement est aussi égal à $f(t)$ en $t = 1$ car un développement en série entière est continu pour tout $t \in\,]-R, R[$ et f est continue par construction en $t = 1$.

6. Exprimer $I(x)$ sous forme d'un développement en série au voisinage de $x = 1$. Montrer que ce développement est valable pour tout $x \in\,]0, 2[$. On justifiera soigneusement les calculs.

D'après ce qui précède, $\hat{f}(t) = f(t)$ pour tout $t \in\,]0, 2[$ ($\leftrightarrow u \in\,]-1, 1[$). Le rayon de convergence R de $\hat{f}$ est donc au moins égal à 1 (il est peut-être plus grand, mais on ne peut pas affirmer que $\hat{f}(t) = f(t)$ en dehors de $]0, 2[$).

On a

$$I(x) = \int_{u=0}^{x-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n} \right) \mathrm{d}u\,.$$

Or une série entière de rayon de convergence R est uniformément convergente sur tout intervalle $[-\rho, \rho]$ tel que $\rho < R$. Si $-1 < x - 1 < 1$, la série entière $\hat{f}$ est donc uniformément convergente sur $[0, x-1] \ni u$, si $1 \leqslant x < 2$, ou sur $[x-1, 0] \ni u$, si $0 < x \leqslant 1$. On peut donc intervertir la somme et l'intégrale :

$$I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{x-1} (-1)^n \frac{u^{n-1}}{n}\, \mathrm{d}u \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} \qquad \forall x\ \in\,]0, 2[\,.$$

7. On admet les théorèmes suivants :

Théorème 1

- Si une série de fonctions $S_N(x)$ converge uniformément vers une fonction $S(x)$ sur un intervalle $]a, b[$ quand l'entier N tend vers l'infini,
- si pour tout N, $S_N(x)$ converge simplement vers une limite finie ℓ_N quand x tend vers a
- et si ℓ_N converge simplement vers une limite finie quand N tend vers l'infini,

alors

$$\lim_{x\to a} \left(\lim_{N\to\infty} S_N(x) \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\lim_{x\to a} S_N(x) \right).$$ ■

Théorème 2

Si une série de fonction $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} g_n(x)$ converge normalement sur un intervalle K (c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^{N} \sup_{x\in K} |g_n(x)|$ converge simplement), alors $S_N(x)$ converge uniformément sur K. ■

En déduire $I(0)$ sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

$$\sup_{]0,\,2[} \left| \frac{(1-x)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}\,.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, donc $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n/n^2$ converge uniformément sur $]0, 2[$ d'après le théorème 2 (et même sur $[0, 2]$, ce qui permettrait d'utiliser une version plus simple du théorème 1).

Comme $\sum_{n=1}^{N} (1-x)^n/n^2$ converge vers la limite finie $\sum_{n=1}^{N} 1/n^2$ quand $x \to 0$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, on a

$$I(0) := \lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

8. Donner un équivalent asymptotique de $I(x)$ quand x tend vers l'infini.

Quand $x \to \infty$, $1/x \to 0$. Comme $I(x) = -I(1/x) - (1/2)\ln^2 x$,

$$I(x) \simeq -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2 x \simeq -\frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$