Université Pierre et Marie Curie. **Unité d'enseignement LP206.**
Année universitaire 2010/2011 **Mathématiques pour physiciens I**

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2011

Exercice 1

1. On reconnaît dans le second membre la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)},$$

d'où

$$r(x) = (-1)^n \, \frac{x^{2\,n}}{1+x^2}.$$

2. La somme dans (1) étant finie, on peut l'intégrer terme à terme. En remarquant que

$$\int_{x=0}^{1} x^{2\,k}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2\,k+1},$$

on obtient

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{1}{2\,n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2\,k+1}.$$

3. $\forall\, x \in [0,\ 1]$, nous avons

$$0 \leqslant \frac{x^{2\,n}}{1+x^2} \leqslant x^{2\,n}.$$

La fonction $x \mapsto x^{2\,n}/(1+x^2)$ est continue (c'est la composée de fonctions continues), donc intégrable sur $[0,\ 1]$. On a

$$\left(0 = \int_{x=0}^{1} 0\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_{x=0}^{1}\frac{x^{2\,n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{x=0}^{1} x^{2\,n}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2\,n+1}\right).$$

4. L'intégrale de la question 2 vaut

$$\int_{x=0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan x\Big]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

On a donc, d'après les réponses aux questions 2 et 3,

$$\left|\frac{\pi}{4} - S_n\right| = \int_{x=0}^{1}\frac{x^{2\,n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\,n+1}.$$

Comme $1/(2\,n+1) \to 0$ quand $n \to \infty$, S_n converge et

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.$$

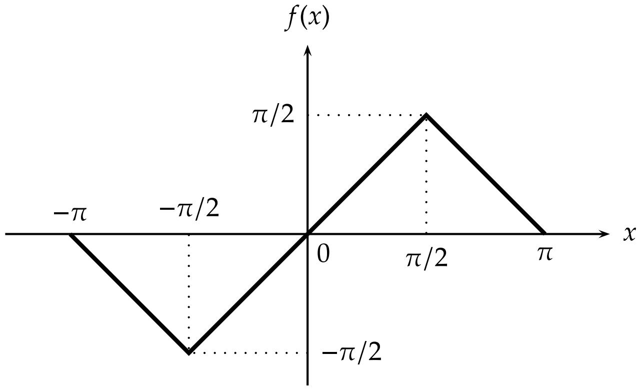
Remarque. On peut aussi montrer la convergence de S_n (mais pas déterminer sa limite) en utilisant le critère de Leibniz : S_n est en effet une série alternée dont le terme général est décroissant et tend vers 0.

Exercice 2

1. $$(2) + \mathrm{i} \cdot (3) \longrightarrow \ddot{z} + 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\dot{z} - \omega^2\,z = 0$$
(car $-\dot{y} + \mathrm{i}\,\dot{x} = \mathrm{i} \cdot (\dot{x} + \mathrm{i}\,\dot{y}) = \mathrm{i}\,\dot{z}$).
2. On cherche des solutions de la forme $z_j(t) = \mathrm{e}^{\alpha_j\,t}$ ($j \in [\![1,\ 2]\!]$). On obtient $\alpha_j^2 + 2\,\mathrm{i}\,\omega\,\alpha_j - \omega^2 = 0$. Le discriminant est nul, donc la racine, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\mathrm{i}\,\omega$, est double. $z(t)$ est donc une combinaison linéaire de $z_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha_1\,t}$ et de $z_2(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha_1\,t}$.
(On peut aussi directement vérifier que $z_1(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}$ et $z_2(t) = t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}$ sont solutions de (4). Comme elles sont linéairement indépendantes et que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel de dimension 2, toute solution de (4) est de la forme $\lambda\,z_1(t) + \mu\,z_2(t)$.)
3. $z(0) = \lambda = \xi$ et $\dot{z}(0) = \mu - \mathrm{i}\,\omega\,\lambda = 0$, donc
$$z(t) = \xi \cdot (1 + \mathrm{i}\,\omega\,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t} = \xi \cdot (\cos(\omega\,t) + \omega\,t\,\sin(\omega\,t)) + \mathrm{i}\,\xi \cdot (\omega\,t\cos(\omega\,t) - \sin(\omega\,t)).$$
$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \xi \cdot (\cos(\omega\,t) + \omega\,t\,\sin(\omega\,t)).$$
$$y(t) = \operatorname{Im} z(t) = \xi \cdot (\omega\,t\cos(\omega\,t) - \sin(\omega\,t)).$$

Exercice 3

1. C'est un signal triangulaire :



f étant impaire, on a $f(x) = x$ pour $x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$.
Pour $x \in [\pi/2,\ \pi]$, posons $x = \pi/2 + y$ avec $y \in [0,\ \pi/2]$. On a alors
$$f(x) = f\left(\frac{y+\pi}{2}\right) = -f\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = -y + \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2} = \pi - x.$$
On a $f(x + 2\,\pi) = -f(x + \pi) = f(x)$, donc la plus petite période est $2\,\pi$.
2. f étant impaire, on a $a_n = 0$.
3. Comme $x \mapsto f(x)\sin(n\,x)$ est une fonction paire, on a
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} f(x)\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x.$$
Utilisons ensuite les expressions analytiques pour f :
$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_{x=0}^{\pi/2} x\sin[n\,x]\,\mathrm{d}x + \int_{x=\pi/2}^{\pi} [\pi - x]\sin[n\,x]\,\mathrm{d}x\right).$$
Dans la seconde intégrale, faisons le changement de variable $y = \pi - x$. On trouve alors
$$\sin(n\,x) = \sin(n \cdot [\pi - y]) = (-1)^{n+1}\sin(n\,y).$$
La seconde intégrale est donc $(-1)^{n+1}$ fois la première, d'où la formule demandée.
4. On voit que $b_n = 0$ si n est pair.
Il suffit donc de calculer l'intégrale dans le cas où n est impair ($n = 2\,p + 1$). Une intégration par parties donne
$$\int_{x=0}^{\pi/2} x\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2\,n}\cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2} \cdot \Big[\sin(n\,x)\Big]_0^{\pi/2}.$$

Pour $n = 2p+1$, $\cos(n\,\pi/2) = 0$ et $\sin(n\,\pi/2) = (-1)^p$.

Au final,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{4}{\pi\, n^2} \cdot (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \ (n \text{ impair}). \end{cases}$$

5.

$$\widetilde{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin([2p+1]\,x).$$

f est 2π-périodique et C^1_{m} sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, $\widetilde{f}(x)$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ce vers $(f[x^-] + f[x^+])/2$.

f est en outre continue sur $\mathbb{R}$: le seul point délicat est $x = \pi/2 \pmod{\pi}$, mais

$$\left(\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} x\right) = \left(\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/2} \pi - x\right) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\right).$$

On a donc $(f[x^-] + f[x^+])/2 = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\widetilde{f}$ converge vers f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque. Les coefficients de Fourier sont en $O(1/p^2)$ et la fonction $x \mapsto \sin([2p+1]\,x)$ est bornée. $\widetilde{f}$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, donc simplement. Ceci ne suffit en revanche pas pour répondre vers quoi.

6. D'après ce qui précède, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ en $x = \pi/2$. On a $f(\pi/2) = \pi/2$ et

$$\widetilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. f étant continue par morceaux (et même continue tout court !), l'égalité de Parseval-Bessel s'applique :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi/2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi}\, \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^2,$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Exercice 4

1.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$R = +\infty$ dans les deux cas.

2. Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. On a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n+1)\, a_{n+1}\, x^{n-1}.$$

$$4\, x\, y'' + 2\, y' - y = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 4\, n \cdot (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+1)\, a_{n+1}\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Pour $n = 0$, on a donc $2\, a_1 - a_0 = 0$. Or $y(0) = 1 = a_0$, donc $a_1 = 1/2$.
Pour $n \geqslant 1$, on a

$$4\, n \cdot (n+1)\, a_{n+1} + 2\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n = 0,$$

soit

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4\, n^2 + 6\, n + 2}.$$

On a $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0$, donc le rayon de convergence est infini d'après la règle de d'Alembert : la série est convergente sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Montrons par récurrence que $a_n = 1/(2\, n)!$ pour tout $n \geqslant 1$. On a bien $a_1 = 1/2 = 1/2!$. Supposons que $a_n = 1/(2\, n)!$ pour un certain n. Alors

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4\, n^2 + 6\, n + 2} = \frac{1}{(2\, n)!\,(2\, n+1) \cdot (2\, n+2)} = \frac{1}{(2\,[n+1])!}.$$

On obtient donc que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2\, n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^{2\, n}}{(2\, n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x} \quad \text{si } x \geqslant 0$$

et

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2\, n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{(-x)^n}{(2\, n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{\sqrt{-x}^{2\, n}}{(2\, n)!} = \cos \sqrt{-x} \quad \text{si } x \leqslant 0.$$