Examen du 25 janvier 2011

Deuxième session

Durée : deux heures

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice 1

On cherche à résoudre d'une autre manière l'exercice sur le palet glissant sur un disque tournant, déjà posé lors de la première session. Rappelons d'abord l'énoncé du problème physique.

On considère un disque D, horizontal et parfaitement lisse, tournant à une vitesse angulaire ω constante autour de son centre O. Le point O est fixe dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. À l'instant $t = 0$, une personne immobile sur le disque dépose un palet P sur D (c.-à-d. que la vitesse initiale de P par rapport à D est nulle). Le palet glisse sans frottement sur D et décrit donc un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre.

L'objet du problème est de déterminer le mouvement de P dans le référentiel du disque. La position du palet à un instant t quelconque est représentée par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ fixe par rapport à D. À l'instant initial, $x(0) = \xi$ et $y(0) = 0$.

La vitesse du palet par rapport au référentiel terrestre est constante. En la calculant à partir des conditions initiales et en la projetant à un instant t quelconque sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on obtient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} - \omega\, y = \omega\, \xi\, \sin(\omega\, t), & (1) \\ \dot{y} + \omega\, x = \omega\, \xi\, \cos(\omega\, t). & (2) \end{cases}$$

1. Écrire une équation différentielle (notée (3)) reliant $x(t)$ et ses dérivées à t, ω et ξ.
2. Quelle est la solution générale $x_{\mathrm{h}}(t)$ de l'équation homogène associée à (3) ?
3. On cherche une solution particulière de (3) de la forme $x_{\mathrm{p}}(t) = k\, t \cos(\omega\, t + \phi)$.
   Déterminer k et ϕ. Simplifier l'expression de $x_{\mathrm{p}}(t)$.
4. *a.* Exprimer $x(t)$ en fonction des conditions initiales ($x(0) = \xi$ et $\dot{x}(0) = 0$).
   b. En déduire l'expression de $y(t)$.

Exercice 2

Soit f une fonction $2\,\pi$-périodique, impaire et telle que,

$$\forall\, x \in [0, \pi], \quad f(x) = x \cdot (\pi - x).$$

1. *a.* Calculer les intégrales

$$\int_{x=0}^{\pi} x \sin(n\, x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_{x=0}^{\pi} x^2 \sin(n\, x)\, \mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Donner le développement en série de Fourier $\widetilde{f}$ réel (c.-à-d. en termes de a_n et b_n) de f.

2. Calculer
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\,p+1)^3}.$$
(On rappellera le nom et l'énoncé du théorème utilisé et on justifiera son application.)
3. Calculer
$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^6}.$$
(On rappellera le nom et l'énoncé du théorème utilisé et on justifiera son application.)

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer que la série
$$S_\alpha = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$$
converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leqslant 1$.

1. Soient α un réel et f_α la fonction
$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [2, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \frac{1}{x \cdot (\ln x)^\alpha}. \end{aligned}$$
Montrer que, pour $\alpha \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}$ (avec $N \geqslant 2$),
$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha} \leqslant f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{N} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$
2. **Cas $\alpha > 1$.**
   a. Donner une primitive de f_α pour $\alpha \neq 1$.
   b. En déduire, en utilisant (4), que S_α converge pour $\alpha > 1$.
3. **Cas $\alpha = 1$.**
   a. Donner une primitive de f_1.
   b. En déduire que S_1 diverge.
4. **Cas $\alpha < 1$.**
   Montrer que S_α diverge également pour $\alpha < 1$.

Exercice 4

On cherche à résoudre l'équation différentielle
$$x^2\,y'' + 4\,x\,y' + (2 - x^2)\,y = 1. \tag{5}$$

1. Soit
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$$
une série entière solution de (5).
Établir une relation de récurrence entre les coefficients a_n en injectant l'expression de la série entière dans l'équation différentielle et en identifiant de part et d'autre du signe « = » les puissances de x de même degré.
2. Préciser les valeurs de a_0 et a_1.
Donner une expression explicite (sans relation de récurrence) de a_n pour n pair et n impair.
3. Sur quel domaine la série entière est-elle solution ? (Justifier.)
4. Exprimer cette série entière à l'aide de fonctions simples.