Corrigé de l'examen du 25 janvier 2011

Exercice 1

1.

$$\frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t} + \omega \cdot (2) \longrightarrow \ddot{x} + \omega^2\, x = 2\,\omega^2\,\xi\,\cos(\omega\,t).$$

2.

$$x_{\mathrm{h}}(t) = A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t).$$

3.

$$\ddot{x}_{\mathrm{p}} + \omega^2\,x_{\mathrm{p}} = -2\,k\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) = 2\,\omega^2\,\xi\,\cos(\omega\,t),$$

donc $k = -\omega\,\xi$ et, en identifiant $\sin(\omega\,t + \phi) = \sin(\omega\,t)\cos\phi + \cos(\omega\,t)\sin\phi$ et $\cos(\omega\,t)$, $\phi = \pi/2$.

$$x_{\mathrm{p}}(t) = -\omega\,\xi\,t\,\cos(\omega\,t + \pi/2) = \omega\,\xi\,t\,\sin(\omega\,t).$$

4. *a.* $x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t)$. Il reste à déterminer A et B en fonction des conditions initiales.
$x(0) = \xi$, donc $A = \xi$.

$$\big(\dot{x}(t)\big)_{t=0} = \big(-A\,\omega\,\sin(\omega\,t) + B\,\omega\,\cos(\omega\,t) + \omega\,\xi\,\sin(\omega\,t) + \omega^2\,\xi\,t\,\cos(\omega\,t)\big)_{t=0} = B\,\omega = 0,$$

donc $B = 0$.
On obtient finalement

$$x(t) = \xi \cdot (\cos(\omega\,t) + \omega\,t\,\sin(\omega\,t)).$$

b. En utilisant (1), on obtient

$$y(t) = \frac{\dot{x} - \omega\,\xi\,\sin(\omega\,t)}{\omega} = \xi \cdot (\omega\,t\,\cos(\omega\,t) - \sin(\omega\,t)).$$

Exercice 2

1. *a.*

$$\int_{x=0}^{\pi} x\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x\,\cos(n\,x)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-\cos(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\,\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot[\sin(n\,x)]_{x=0}^{\pi}$$
$$= (-1)^{n+1}\,\frac{\pi}{n}.$$

$$\int_{x=0}^{\pi} x^2\,\sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2\,\cos(n\,x)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-2\,x\,\cos(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= (-1)^{n+1}\,\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\cdot\left(\left[\frac{x\,\sin(n\,x)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(n\,x)}{n}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\,\frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^2}\cdot\left[-\frac{\cos(n\,x)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} = (-1)^{n+1}\,\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3}\cdot([-1]^n - 1).$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ car f est impaire.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x \cdot (\pi - x) \sin(n\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\pi \cdot \left[\frac{\pi \cdot (-1)^{n+1}}{n}\right] - \left[\frac{\pi^2 \cdot (-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3} \cdot \left([-1]^n - 1\right)\right]\right) \\ &= \frac{4}{\pi\,n^3} \cdot \left(1 - [-1]^n\right). \end{aligned}$$

On obtient donc $b_{2\,p} = 0$ et

$$b_{2\,p+1} = \frac{8}{\pi \cdot (2\,p+1)^3},$$

soit

$$\widetilde{f}(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin\left([2\,p+1]\,x\right)}{(2\,p+1)^3}.$$

2. f est C^1 par morceaux, donc $\widetilde{f}(x) = (f[x^-] + f[x^+])/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après le théorème de Dirichlet. f est en outre continue en $\pi/2$ donc $\widetilde{f}(\pi/2) = f(\pi/2)$, soit

$$\frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\,p+1)^3} = \frac{\pi^2}{4},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2\,p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. f est continue par morceaux, donc le théorème de Parseval s'applique :

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right),$$

soit

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi \cdot (2\,p+1)^3}\right)^2.$$

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{\pi} x^2 \cdot (\pi - x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2\,x^3}{3} - \frac{\pi\,x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{30}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,p+1)^6} = \frac{\pi^4}{30} \times 2 \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{\pi^6}{960}.$$

Exercice 3

1. La fonction $x \mapsto f_\alpha(x)$ est décroissante pour $x \geqslant 2$. Nous avons donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

$$\int_{x=n}^{n+1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f_\alpha(n+1) \int_{x=n}^{n+1} \mathrm{d}x = f_\alpha(n+1).$$

Par utilisation de la règle $\int_\alpha^c g = \int_\alpha^b g + \int_b^c g$, il vient que

$$\int_{x=2}^{N} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=3}^{N} f_\alpha(n),$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

2. *a.*

$$\int^{x'=x} \frac{1}{x' \cdot (\ln x')^\alpha} \, \mathrm{d}x' = -\frac{1}{(\alpha-1)\cdot(\ln x)^{\alpha-1}}.$$

b. Prenons la limite de l'inégalité (3). Quand $\alpha > 1$, $\lim_{N\to\infty}(\ln N)^{\alpha-1} = \infty$, donc $\int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Comme $f_\alpha \geqslant 0$,

$$\int_{x=2}^{N} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

De l'inégalité

$$\sum_{n=2}^{N} f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{N} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x,$$

on déduit que

$$\sum_{n=2}^{N} f_\alpha(n) \leqslant f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

La suite $N \mapsto \sum_{n=2}^{N} f_\alpha(n)$ est croissante ($f_\alpha(n) \geqslant 0$) et majorée par $f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$, donc S_α est convergente pour $\alpha > 1$ et

$$S_\alpha \leqslant f_\alpha(2) + \int_{x=2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. — Si l'on n'avait pas explicitement demandé d'utiliser (3), on aurait aussi pu appliquer directement le théorème de comparaison série-intégrale : « Si f est une fonction positive décroissante, $\sum^\infty f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \int^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. ».

3. *a.*

$$\int^{x'=x} \frac{1}{x' \ln x'}\,\mathrm{d}x' = \ln(\ln x).$$

b. On peut appliquer la même démarche qu'à la question 1. f_α étant décroissante, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

$$\int_{x=n}^{n+1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f_\alpha(n) \int_{x=n}^{n+1} \mathrm{d}x = f_\alpha(n).$$

On en déduit que

$$\int_{x=2}^{N+1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{N+1} f_\alpha(n).$$

Supposons que $\sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n)$ converge. Comme $f_\alpha \geqslant 0$, on a alors

$$\sum_{n=2}^{N+1} f_\alpha(n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n),$$

d'où

$$\int_{x=2}^{N+1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} f_\alpha(n).$$

L'intégrale étant croissante ($f_\alpha \geqslant 0$) et majorée, $\int_{x=2}^{\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge, ce qui est absurde puisque $\lim_{N\to\infty} \ln(\ln(N+1)) = +\infty$. L'hypothèse de départ est donc fausse : S_1 diverge.

4. Pour $\alpha < 1$,

$$\frac{1}{n\cdot(\ln n)^\alpha} \geqslant \frac{1}{n\cdot(\ln n)}.$$

S_1 étant une série à termes positifs divergente, S_α est divergente pour $\alpha < 1$ ($u_n \geqslant v_n \geqslant 0$ et $\sum v_n$ diverge $\Longrightarrow \sum u_n$ diverge).

Exercice 4

1. Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. On a

$$x^2\, y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, a_n\, x^{n-2}.$$

$$x^2\, y'' + 4\, x\, y' + (2 - x^2)\, y = 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4\, n\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, a_n\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^n,$$

soit $1 = 2\, a_0$, $0 = 6\, a_1$, et

$$(n \cdot [n-1] + 4\, n + 2)\, a_n = a_{n-2} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

2. $a_1 = 0$, donc $a_n = 0$ pour tout n impair.
   $a_0 = 1/2$ et

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{a_{n-4}}{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)\cdot(n+2)} = \ldots = \frac{a_0}{3\cdot 4 \cdots (n+1)\cdot(n+2)} = \frac{2\, a_0}{(n+2)!}$$
$$= \frac{1}{(n+2)!}$$

   pour tout n pair.

3.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2\,n} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \xi^n,$$

   où l'on a posé $b_n = a_{2\,n}$ et $\xi = x^2$. On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2\,n+4)!}{1/(2\,n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\,n+3)\cdot(2\,n+4)} = 0 =: \ell.$$

   La limite ℓ étant bien définie, le rayon de la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \xi^n$ est $R_\xi = 1/\ell = \infty$ d'après la règle de d'Alembert. La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2\,n} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \xi^n$ converge pour tout $\xi \in\,]-R_\xi, R_\xi[$, donc pour tout $x \in\,]-\sqrt{R_\xi}, \sqrt{R_\xi}[$, soit sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4.

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2\,p}}{(2\,p+2)!} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2\,p+2}}{(2\,p+2)!}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2\,p}}{(2\,p)!}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2\,p}}{(2\,p)!} - 1\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}.$$