Examen du 24 janvier 2012

Deuxième session

Exercice I

Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $r^4 + r^2 + 1$, dont on trouve facilement les racines en posant $R = r^2$. On obtient

$$R = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\ \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm 2\ \mathrm{i}\ \pi/3}.$$

Il y a quatre racines :

$$+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\ \pi/3} = \frac{1 + \mathrm{i}\ \sqrt{3}}{2}\ ; \quad -\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\ \pi/3} = \frac{-1 - \mathrm{i}\ \sqrt{3}}{2}\ ; \quad +\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ \pi/3} = \frac{1 - \mathrm{i}\ \sqrt{3}}{2}\ ; \quad -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ \pi/3} = \frac{-1 + \mathrm{i}\ \sqrt{3}}{2}.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = A\ \mathrm{e}^{-x/2} \cos\frac{\sqrt{3}\ x}{2} + B\ \mathrm{e}^{-x/2} \sin\frac{\sqrt{3}\ x}{2} + C\ \mathrm{e}^{x/2} \cos\frac{\sqrt{3}\ x}{2} + D\ \mathrm{e}^{x/2} \sin\frac{\sqrt{3}\ x}{2}.$$

Exercice II

1. Notons $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+a^2/x^2)}$. f est continue sur $]0, \infty[$. Il suffit donc d'étudier la convergence de l'intégrale à ses bornes.

   f tend vers une limite finie (0) quand $x \to 0$: elle est donc intégrable au voisinage de 0.

   Quand $x \to \infty$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-(x^2+a^2/x^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \geqslant 1$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. f l'est donc aussi.

2. Posons $y = a/x$. On a $\mathrm{d}x = -a\ \mathrm{d}y/y^2$, $(x \to \sqrt{a} \Leftrightarrow y \to \sqrt{a})$ et $(x \to \infty \Leftrightarrow y \to 0)$, donc

$$\int_{x=\sqrt{a}}^{\infty} = \int_{y=\sqrt{a}}^{0} \frac{-a\ \mathrm{e}^{-(a^2/y^2+y^2)}}{y^2}\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{\sqrt{a}} \frac{a\ \mathrm{e}^{-(a^2/y^2+y^2)}}{y^2}\ \mathrm{d}y.$$

   La variable y dans l'intégrale est muette et peut donc être renotée x, d'où

$$I = \int_{x=0}^{\sqrt{a}} \mathrm{e}^{-(x^2+a^2/x^2)} \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

3. On a $u^2 = x^2 - 2\ a + a^2/x^2$, $\mathrm{d}u = (1 + a/x^2)\ \mathrm{d}x$, $(x \to 0 \Leftrightarrow u \to -\infty)$ et $(x \to \sqrt{a} \Leftrightarrow u \to 0)$, donc

$$I = \int_{u=-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-(u^2+2\ a)}\ \mathrm{d}u \overset{z=-u}{=} \mathrm{e}^{-2\ a} \int_{z=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\ \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-2\ a}\ \sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice III

1. L'équation homogène associée est $2\,x\,y_\mathrm{h}' + y_\mathrm{h} = 0$. On peut séparer les variables :
$$\frac{y_\mathrm{h}'}{y_\mathrm{h}} = (\ln y_\mathrm{h})' = -\frac{1}{2\,x} = -\frac{1}{2}\,(\ln x)' = (\ln x^{-1/2})'.$$
Après intégration, on obtient
$$y_\mathrm{h}(x) = \frac{C}{\sqrt{x}},$$
où $C \in \mathbb{R}$.

2. *a.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!}.$$

   b. $\forall\, x > 0$,
$$3\,x\,\cos(x^{3/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{3\,x^{3\,k+1}}{(2\,k)!}.$$

   c. On a $y_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$, donc y_0 est solution de (1) sur $[0, R[$ si et seulement si
$$\forall\, x \in [0, R[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2\,n+1)\,a_n\,x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{3\,x^{3\,k+1}}{(2\,k)!}.$$
Les termes correspondant à une même puissance de x doivent être identiques de part et d'autre du signe « = ». Si $n = 3\,k+1$, on obtient que
$$(2\,n+1)\,a_n = \frac{3\,(-1)^k}{(2\,k)!}, \quad \text{soit} \quad a_{3\,k+1} = \frac{3\,(-1)^k}{3\,(2\,k+1)\,(2\,k)!} = \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}.$$
Pour $n \neq 3\,k+1$, on doit avoir $a_n = 0$, donc $a_{3\,k} = a_{3\,k+2} = 0$.

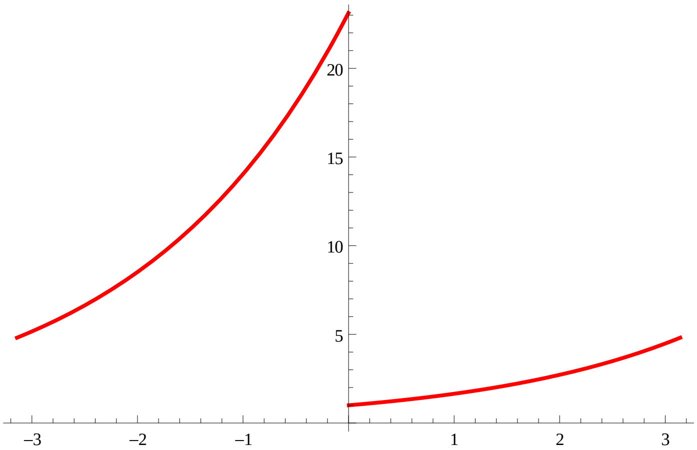
   d. On déduit de ce calcul qu'il existe au plus une série entière de rayon R non nul dont la somme est solution de l'équation (1) sur $[0, R[$: il s'agit de
$$y_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{x^{3\,k+1}}{(2\,k+1)!}.$$
On a
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/(2\,k+1)!}{1/(2\,k)!} = 0 =: \ell.$$
D'après la règle de d'Alembert, $R = 1/\ell = \infty$.

   e. Il suffit d'écrire $x^{3\,k+1}$ comme $(x^{3/2})^{2\,k+1}/\sqrt{x}$ et de reconnaître le développement en série entière d'une fonction sinus :
$$y_0(x) = \frac{\sin(x\,\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

3. L'équation étant linéaire, on obtient la solution générale y comme somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée :
$$y(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_0(x) = \frac{\sin(x\,\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice IV

1.



2. *a.*

$$c_n = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} e^{(\alpha - i\,n)\,x}\,dx = \frac{1}{2\,\pi}\left[\frac{e^{(\alpha-i\,n)\,x}}{\alpha - i\,n}\right]_0^{2\,\pi} = \frac{e^{2\,\pi\,\alpha}-1}{2\,\pi\,(\alpha - i\,n)}$$
$$= \frac{(e^{2\,\pi\,\alpha}-1)\,(\alpha + i\,n)}{2\,\pi\,(\alpha^2+n^2)}.$$

b.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{i\,n\,x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n})\,\cos(n\,x) + \sum_{n=1}^{\infty} i\,(c_n - c_{-n})\,\sin(n\,x)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\cos[n\,x] + b_n\,\sin[n\,x]).$$

On a donc

$$a_n = (c_n + c_{-n}) = \frac{\alpha\,(e^{2\,\pi\,\alpha}-1)}{\pi\,(\alpha^2+n^2)} \quad \text{(y compris pour } n = 0\text{)},$$
$$b_n = i\,(c_n - c_{-n}) = \frac{-n\,(e^{2\,\pi\,\alpha}-1)}{\pi\,(\alpha^2+n^2)}.$$

3. La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\,\pi$-périodique, donc, d'après le théorème de Dirichlet, $\widetilde{f}(x) = (f[x^-] + f[x^+])/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. f est de plus continue en π, donc $f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi)$, d'où

$$\widetilde{f}(\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,\cos[n\,\pi] + b_n\,\sin[n\,\pi]) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,a_n$$
$$= \alpha\,\frac{e^{2\,\pi\,\alpha}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2\,\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-1]^n}{\alpha^2+n^2}\right) = f(\pi) = e^{\alpha\,\pi}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2} = \frac{\pi\,e^{\alpha\,\pi}}{\alpha\,(e^{2\,\pi\,\alpha}-1)} - \frac{1}{2\,\alpha^2}.$$

4. *a.* Il faut se placer en $x = 0$, mais il s'agit d'un point de discontinuité de f. On a donc

$$\widetilde{f}(0) = \frac{f(0^+) + f([2\ \pi]^-)}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha}}{2} = \alpha\ \frac{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{2\ \alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}\right),$$

d'où

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} = \frac{\pi}{2\ \alpha}\ \frac{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} + 1}{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1} - \frac{1}{2\ \alpha^2}.$$

b.

$$\begin{aligned} u\ \frac{\mathrm{e}^u + 1}{\mathrm{e}^u - 1} &= u\ \frac{1 + u + u^2/2 + o(u^2) + 1}{1 + u + u^2/2 + u^3/6 + o(u^3) - 1} = \frac{2 + u + u^2/2 + o(u^2)}{1 + u/2 + u^2/6 + o(u^2)} \\ &= \left(2 + u + \frac{u^2}{2} + o[u^2]\right)\left(1 - \left[\frac{u}{2} + \frac{u^2}{6}\right] + \left[\frac{u}{2}\right]^2 + o[u^2]\right) \\ &= \left(2 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + o(u^2)\right) \\ &= \left(2 + u + \frac{u^2}{2}\right) - \left(u + \frac{u^2}{2}\right) + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 2 + \frac{u^2}{6} + o(u^2). \end{aligned}$$

c. Posons $u = 2\ \pi\ \alpha$.

$$S(\alpha) = \frac{\pi}{2\ \alpha}\ \frac{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} + 1}{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1} - \frac{1}{2\ \alpha^2} = \frac{1}{4\ \alpha^2}\left(2 + \frac{[2\ \pi\ \alpha]^2}{6} + o[\alpha^2]\right) - \frac{1}{2\ \alpha^2} = \frac{\pi^2}{6} + o(1).$$

On a donc $\lim_{\alpha \to 0} S(\alpha) = \pi^2/6$.

d. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|1/(\alpha^2 + n^2)| \leqslant 1/n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge : S est ainsi normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $\mathbb{R}$. Comme, de plus, $\lim_{\alpha \to 0}(1/[\alpha^2 + n^2]) = 1/n^2 \in \mathbb{R}$, on peut intervertir les limites (théorème de la double limite) :

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Pour toute fonction périodique de (module) carré intégrable sur une période T (en particulier, pour toute fonction continue par morceaux),

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\ \pi} \int_0^{2\ \pi} \mathrm{e}^{2\ \alpha\ x}\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{4\ \pi\ \alpha} - 1}{4\ \pi\ \alpha} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1)^2}{4\ \pi^2}\ \frac{\alpha^2 + n^2}{(\alpha^2 + n^2)^2} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1)^2}{4\ \pi^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\ \frac{\mathrm{e}^{4\ \pi\ \alpha} - 1}{(\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1)^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{\pi}{2\ \alpha}\ \frac{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} + 1}{\mathrm{e}^{2\ \pi\ \alpha} - 1} - \frac{1}{2\ \alpha^2}.$$