Université Pierre et Marie Curie.
Année universitaire 2011/2012

Unité d'enseignement LP206.
Mathématiques pour physiciens I

Examen du 24 janvier 2012

Deuxième session

Durée : 2 h

Les calculatrices et les documents sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.

Exercice I

Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$y'''' + y'' + y = 0.$$

Exercice II

On veut calculer l'intégrale

$$I = \int_{x=0}^{\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)}\, dx$$

pour tout $a > 0$.

1. Montrer que I converge.
2. En écrivant que $\int_0^\infty = \int_0^{\sqrt{a}} + \int_{\sqrt{a}}^\infty$ et en faisant un changement de variable dans la dernière intégrale, mettre I sous la forme d'une intégrale de $x = 0$ à $\sqrt{a}$.
3. Calculer I à l'aide du changement de variable $x \mapsto u = x - a/x$. (On rappelle que $\int_{x=0}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Exercice III

Dans cet exercice, on se propose de trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$2\, x\, y'(x) + y(x) = 3\, x \cos(x^{3/2}), \quad \text{où } x \in\,]0, +\infty[. \tag{1}$$

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Donner la solution générale de l'équation homogène associée à (1). (On pourra remarquer que les variables x et y sont séparées.)
2. On cherche ici une solution particulière de (1) développable en série entière. afteheading

a. Rappeler l'expression des développements en série entière de $\cos x$ et de $\sin x$; préciser leur domaine de convergence.

b. Montrer que la fonction $x \mapsto 3\,x \cos(x^{3/2})$ coïncide sur $[0, +\infty[$ avec la somme d'une série entière que l'on précisera.

c. Soit $y_0 \colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Donner les conditions sur les coefficients a_n pour que y_0 soit solution de l'équation (1) sur l'intervalle $[0, R[$.

d. En déduire que la solution particulière recherchée est

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3\,n+1}}{(2\,n+1)!}.$$

Quel est son rayon de convergence R ?

e. Exprimer cette série entière en termes de fonctions simples.

3. Donner la solution générale de l'équation (1) sur $]0, +\infty[$.

Exercice IV

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\,\pi$-périodique, définie pour tout $x \in [0, 2\,\pi[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha\,x}$.

1. Représenter schématiquement f sur $[-\pi, \pi]$.
2. *a.* Calculer les coefficients c_n de la série de Fourier exponentielle de f.

   b. En déduire les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier trigonométrique de f. (On pourra utiliser la formule d'Euler.)
3. Calculer
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}$$
à l'aide de la réponse à la question 2.
4. *a.* Calculer de même
$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}.$$

   b. Faire le développement limité de $u\,(\mathrm{e}^u + 1)/(\mathrm{e}^u - 1)$ à l'ordre $o(u^2)$ au voisinage de $u = 0$.

   c. En déduire $\lim_{\alpha \to 0} S(\alpha)$.

   d. Justifier que
$$\lim_{\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}.$$
   En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.
5. Rappeler l'énoncé du théorème de Parseval.

   Retrouver à l'aide de ce théorème le résultat de la question 4.*a*.