# Quelques techniques d'algèbre linéaire

Michel Fioc

6 mars 2014

On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Notations**

| | |
|---|---|
| $\mathcal{M}_{p,n}$ | ensemble des matrices à $p$ lignes et $n$ colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$ |
| $\mathcal{M}_n$ | ensemble des matrices carrées de taille $n$ |
| $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ | sous-espace vectoriel engendré par les [combinaisons linéaires] des vecteurs $v_1$ à $v_n$ |
| $A_{i,*}$ | $i$-ième vecteur ligne d'une matrice $A$ |
| $A_{*,j}$ | $j$-ième vecteur colonne de $A$ |

# I. Par les déterminants

## 1. Calcul de déterminant

Ceci n'a de sens que pour $p = n$.

Pour $A = (a) \in \mathcal{M}_1$, $\det A = a$, et pour $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2$, $\det A = a\,d - b\,c$. Pour une matrice de taille $n \geqslant 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

- soit on choisit une ligne $i$ et on somme sur les colonnes :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, c_{i,j}\ ;$$

- soit on choisit une colonne $j$ et on somme sur les lignes :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, c_{i,j}.$$

Dans ces expressions, $c_{i,j}$ est le *cofacteur* de $a_{i,j}$, défini par

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j}\, m_{i,j},$$

où $m_{i,j}$ est le *mineur* associé à $a_{i,j}$, c.-à-d. le déterminant de la matrice $\check{A}_{i,j}$ de taille $n-1$ obtenue en retranchant la ligne $i$ et la colonne $j$ à $A$.

On a donc à calculer $n$ déterminants de taille $n-1$, calculés chacun d'entre eux à partir de $n-1$ déterminants de taille $n-2$, etc., jusqu'à ce qu'on arrive à des matrices de taille 1 (ou 2 en pratique, puisque l'expression d'un déterminant de taille 2 est à connaître).

## 2. Calcul de l'inverse

$A$ est inversible ssi $\det A \neq 0$. On a alors

$$A^{-1} = \frac{C^{\intercal}}{\det A},$$

où $C$ est la *comatrice* de $A$, c.-à-d. la matrice constituée des cofacteurs $c_{i,j}$ des éléments $a_{i,j}$ de $A$.

***Remarque.*** $n$ de ces cofacteurs ont déjà été calculés avec $\det A$. Il n'y en a donc plus que $n^2 - n$ à calculer.

## 3. Calcul du rang

Une matrice $Q$ est une *matrice extraite* (on dit aussi *sous-matrice*) de $A$ si $Q$ est obtenue en supprimant des lignes ou (inclusivement) des colonnes de $A$.

Le *rang* $r = \operatorname{rg} A$ de $A$ est la taille de la plus grande matrice (carrée) extraite de $A$ qui soit inversible. Une telle matrice est dite *principale* (il peut y en avoir plusieurs). On a

$$r = \dim \operatorname{Vect}(A_{1,*}, \ldots, A_{p,*}) = \dim \operatorname{Vect}(A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}) \leqslant q = \min(p, n).$$

Pour calculer le rang, il suffit de partir de $k = q$ et de calculer les déterminants des matrices carrées de taille $k$ extraites de $A$. Dès qu'on trouve une matrice extraite $Q$ telle que $\det Q \neq 0$, on sait que $r = k$ et on s'arrête. Si toutes les matrices extraites de taille $k$ sont non inversibles, on passe à celles de taille $k = q - 1$, puis $k = q - 2$, etc., jusqu'à trouver une sous-matrice qui soit inversible.

***Cas particulier : $A \in \mathcal{M}_n$.*** $\operatorname{rg} A = n$ si $\det A \neq 0$ et $\operatorname{rg} A < n$ sinon.

## 4. Résolution de système linéaire

Considérons un système linéaire à $p$ équations et $n$ inconnues,

$$A \cdot X = B,$$

où $A \in \mathcal{M}_{p,n}$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{K}^n$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)^\intercal \in \mathbb{K}^p$.

## *a.* Cas particulier : $p = n$ et $A$ inversible

### i. 1^re^ méthode : utilisation de l'inverse

On calcule $A^{-1}$, puis

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

### ii. 2^e^ méthode : formules de Cramer

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

où l'on a remplacé dans le déterminant du numérateur la $i$-ième colonne par $B$.

## *b.* Cas général

### i. Calcul du rang et réécriture du système

La première chose à faire est de calculer le rang $r$ de $A$ (§ I.3). Soit $Q$ une matrice principale extraite de $A$ (son rang est donc $r$). Permutons les $p$ lignes de $A$, d'une part, et les $n$ colonnes de $A$, d'autre part, de manière à obtenir une matrice $A'$ telle que

$$\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \ldots & a'_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r,1} & \ldots & a'_{r,r} \end{pmatrix} = Q.$$

Appliquons aux $p$ éléments de $B$ la même permutation qu'aux lignes de $A$, et aux $n$ éléments de $X$ la même permutation qu'aux colonnes de $A$. On obtient ainsi des vecteurs $B'$ et $X'$ satisfaisant le système linéaire $A' \cdot X' = B'$. Les inconnues $x'_1$ à $x'_r$ sont appelées *inconnues principales* ; si $n > r$, $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ sont des *paramètres*. Les lignes $L'_1$ à $L'_r$ du système sont les *équations principales*.

#### ii. Existence de solutions

Pour savoir si le système admet au moins une solution (on dit qu'il est *compatible*), on procède de la manière suivante :

- pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$, on construit la *matrice bordante* (carrée de taille $r+1$)
$$\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{r,1} & b'_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{r,1} & \cdots & a'_{r,r} & b'_r \\ a'_{k,1} & \cdots & a'_{k,r} & b'_k \end{pmatrix}$$
et on calcule son déterminant (dit *caractéristique*). Dès qu'un déterminant caractéristique est non nul, on sait que le système n'admet aucune solution et on s'arrête ;
- si tous les déterminants caractéristiques sont nuls, le système admet au moins une solution. On passe alors à sa résolution (§ I.4.*b*.iii).

***Remarque.*** Le système est toujours compatible si $p = r$ ou s'il est homogène ($B = 0$). Il est alors inutile de calculer les déterminants caractéristiques.

#### iii. Résolution

Si le système est compatible, l'ensemble des solutions constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - r$, c.-à-d. que la solution $(x'_1, \ldots, x'_r)$ va dépendre des $n - r$ paramètres $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$. Les lignes $L'_{r+1}$ à $L'_p$ du système sont liées aux $r$ premières et n'apportent aucune contrainte sur la solution : seules les équations principales comptent. On a
$$Q \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 - (a'_{1,r+1}\, x'_{r+1} + \cdots a'_{1,n}\, x'_n) \\ \vdots \\ b'_r - (a'_{r,r+1}\, x'_{r+1} + \cdots a'_{r,n}\, x'_n) \end{pmatrix}$$
avec $Q$ carrée et inversible. Se reporter alors au § I.4.*a*.

## 5. Réduction d'endomorphisme

### *a*. Diagonalisation

Une matrice $A$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telle que
$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$
(toutes ces matrices sont carrées de taille $n$). En d'autres termes, si $A$ est la matrice dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'une application linéaire $u$ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ (c.-à-d. un *endomorphisme*), $u$ est représentée par une matrice diagonale $D$ dans une certaine base $(v_1, \ldots, v_n)$ et $P$ est la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(v_1, \ldots, v_n)$ (c.-à-d. que la $j$-ième colonne de $P$ correspond aux composantes de $v_j$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$).

Un scalaire $\lambda$ est une *valeur propre* de $A$ ssi il existe un vecteur *non nul* $X$, appelé *vecteur propre* associé à $\lambda$, tel que
$$A \cdot X = \lambda\, X.$$
On peut aussi écrire ceci
$$(A - \lambda\, I) \cdot X = 0, \qquad \text{c.-à-d. } X \in \ker(A - \lambda\, I) \setminus \{0\}.$$
Pour que $X$ soit non nul, il faut que $A - \lambda\, I$ ne soit pas inversible, c.-à-d. que
$$\det(A - \lambda\, I) = 0.$$
On appelle *polynôme caractéristique* en la variable $\lambda$ le déterminant $\det(A - \lambda\, I)$. Toute valeur propre $\lambda_k$ est une racine de ce polynôme. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a
$$\det(A - \lambda\, I) = \prod_{k=1}^{q} (\lambda_k - \lambda)^{m_k},$$
où $q$ est le nombre de valeurs propres distinctes et $m_k$ la multiplicité de la racine $\lambda_k$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (c.-à-d. si on se restreint à des matrices à coefficients réels), pour que $A$ soit diagonalisable, il est nécessaire mais non suffisant que $\det(A - \lambda\, I)$ puisse s'écrire sous la forme ci-dessus.

L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda_k$ constitue un sous-espace vectoriel $E_k$ de $\mathbb{K}^n$ appelé *sous-espace propre* associé à $\lambda_k$. On a $\dim E_k \leqslant m_k$. La matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ssi, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $\dim E_k = m_k$. C'est en particulier le cas si $q = n$.

La procédure à suivre pour diagonaliser $A$ est la suivante :

- chercher les $q$ racines $\lambda_k$ du polynôme caractéristique et leur multiplicité ;
- pour chaque $\lambda_k$, résoudre le système linéaire $(A - \lambda_k I) \cdot X = 0$, c.-à-d. déterminer $E_k$.
  Si $\dim E_k < m_k$, la matrice n'est pas diagonalisable. Passer alors au § I.5.*b* ;
- déterminer $m_k$ vecteurs propres indépendants $X_{k,1}, \ldots, X_{k,m_k}$ [※1] de $E_k$ (constituant donc une base de $E_k$) ;
- construire la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_q \end{pmatrix},$$

  où chaque valeur propre $\lambda_k$ apparaît $m_k$ fois sur la diagonale ;
- construire la matrice de passage $P$ en mettant les vecteurs $X_{1,1}, \ldots, X_{1,m_1}$ sur les $m_1$ premières colonnes, les vecteurs $X_{2,1}, \ldots, X_{2,m_2}$ sur les $m_2$ suivantes, etc.

## *b.* Trigonalisation

Une matrice $A$ est *trigonalisable* s'il existe une matrice triangulaire $T$ (on la prendra triangulaire supérieure) et une matrice inversible $P$ telle que

$$A = P \cdot T \cdot P^{-1}$$

(toutes ces matrices sont carrées de taille $n$). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

Contrairement à la diagonalisation, où, à l'ordre près des termes diagonaux, on obtient toujours la même matrice $D$ (mais pas $P$), il y a plusieurs façons de trigonaliser une matrice, donc plusieurs $T$ possibles. En revanche, à l'ordre près, $T$ comprend sur sa diagonale toutes les valeurs propres en nombre égal à leur multiplicité.

La méthode de Jordan décrite ci-dessous permet d'obtenir une matrice $T$ particulièrement simple :

- chercher les $q$ racines $\lambda_k$ du polynôme caractéristique et leur multiplicité ;
- pour chaque $\lambda_k$, résoudre le système linéaire $(A - \lambda_k I) \cdot X = 0$, c.-à-d. déterminer $E_k$ et $d_k = \dim E_k$ ;
- déterminer $d_k$ vecteurs propres indépendants $X_{k,1}, \ldots, X_{k,d_k}$.

  ***Remarque.*** $d_k \geqslant 1$, donc il y en a au moins un ;
- si $d_k < m_k$, déterminer $m_k - d_k$ vecteurs supplémentaires $X_{k,j}$, avec $j \in [\![d_k + 1, m_k]\!]$, par l'itération suivante : pour chaque $j$, trouver un $X_{k,j}$ solution de

$$(A - \lambda_k I) \cdot X_{k,j} = X_{k,j-1}.$$

  ***Remarque.*** Les vecteurs $X_{k,d_k+1}, \ldots, X_{k,m_k}$ ne sont pas des vecteurs propres ;
- construire la matrice triangulaire supérieure $T$ comprenant $m_1$ fois $\lambda_1$, $m_2$ fois $\lambda_2$, etc. sur la diagonale (comme $D$) et soit 0, soit 1 sur la surdiagonale (c'est-à-dire l'ensemble des coefficients $t_{i,i+1}$ avec $i \in [\![1, n-1]\!]$) : au-dessus de chaque $\lambda_k$, mettre
  - 0 pour les $d_k$ premières valeurs de $\lambda_k$ ;
  - 1 pour les $m_k - d_k$ suivantes (donc si $m_k > d_k$) ;
- construire la matrice de passage $P$ en mettant les vecteurs $X_{1,1}, \ldots, X_{1,m_1}$ sur les $m_1$ premières colonnes, les vecteurs $X_{2,1}, \ldots, X_{2,m_2}$ sur les $m_2$ suivantes, etc.

***Remarque.*** Si la matrice est diagonalisable, cette méthode fournit $T = D$.

1. Attention, $X_{i,j}$ désigne un vecteur, pas l'élément sur la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne d'une matrice $X$.