Chapitre ÉM-VIII

Équations de Maxwell

A. Courant de déplacement

Le champ électromagnétique a été déterminé dans les chapitres précédents à partir des quatre équations locales

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{ÉM-VIII.1}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{ÉM-VIII.2}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{ÉM-VIII.3}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} \tag{ÉM-VIII.4}$$

et des conditions sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à l'infini.

D'après l'équation ÉM-VIII.4,

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} = 0 \tag{ÉM-VIII.5}$$

puisque la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Or cette équation, correcte dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires, ne l'est plus dans le cas général. En raison de la conservation locale de la charge (cf. § OÉC-III.B), on doit en effet avoir

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0, \tag{ÉM-VIII.6}$$

ce qui impose de modifier l'équation ÉM-VIII.4. Or $\varrho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$, donc

$$\operatorname{div}\left(\vec{\jmath} + \varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0. \tag{ÉM-VIII.7}$$

La solution la plus simple, confirmée par l'expérience, est donc de rajouter à $\vec{\jmath}$ dans l'équation ÉM-VIII.4 le terme, appelé ***courant de déplacement***,

$$\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Le courant *de déplacement* est notamment non nul entre les armatures d'un condensateur appartenant à un circuit parcouru par un courant. Il permet que le courant *de charges* ($\vec{\jmath}$) arrivant à une armature par le reste du circuit soit identique à celui partant de l'autre armature, bien que $\vec{\jmath}$ soit nul entre les armatures.

On obtient ainsi la version définitive des ***équations de Maxwell*** :

$$\boldsymbol{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}}, \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Gauss}})} \tag{ÉM-VIII.8}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}, \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Faraday}})} \tag{ÉM-VIII.9}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{div}\vec{B} = 0}, \qquad ※1 \tag{ÉM-VIII.10}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}. \qquad \text{(\textbf{\textit{équation de Maxwell-Ampère}})} \tag{ÉM-VIII.11}$$

Avec la force de Lorentz et les conditions aux limites sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les équations de Maxwell déterminent complètement le mouvement de particules chargées. Elles sont linéaires, donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent au principe de superposition. La détermination directe de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à partir des équations de Maxwell est néanmoins délicate en régime non stationnaire car les champs électrique et magnétique sont alors couplés. Il est en fait plus simple de passer par les potentiels.

B. Potentiels

Remarquons d'abord que la constante

$$\boldsymbol{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \approx 3 \times 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} \qquad \text{(ÉM-VIII.12)}$$

a la dimension d'une vitesse. Nous verrons qu'il s'agit de la ***vitesse de la lumière dans le vide***.

D'après les équations ÉM-VIII.9 et ÉM-VIII.10,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \text{(ÉM-VIII.13)}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}, \qquad \text{(ÉM-VIII.14)}$$

où V et $\vec{A}$ sont respectivement les potentiels scalaire et vectoriel. Introduisons-les dans les équations ÉM-VIII.8 et ÉM-VIII.11. On obtient

$$-\Delta V - \frac{\partial(\mathrm{div}\, \vec{A})}{\partial t} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \qquad \text{(ÉM-VIII.15)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\, \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0\, \vec{\jmath} - \varepsilon_0\, \mu_0\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \varepsilon_0\, \mu_0\, \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \qquad \text{(ÉM-VIII.16)}$$

On peut réécrire ces équations de la manière suivante :

$$\Box V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial V}{\partial t}\right), \qquad \text{(ÉM-VIII.17)}$$

$$\Box \vec{A} = -\mu_0\, \vec{\jmath} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial V}{\partial t}\right), \qquad \text{(ÉM-VIII.18)}$$

où $\Box$ est l'opérateur ***d'Alembertien*** défini par

$$\boldsymbol{\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}}. \qquad \text{(ÉM-VIII.19)}$$

Le même terme

$$\mathrm{div}\, \vec{A} + \frac{1}{c^2}\, \frac{\partial V}{\partial t}$$

apparaît dans les deux équations. Or les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de V et $\vec{A}$ ne déterminent pas les potentiels de manière unique. En effet, pour toute fonction f, si

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f, \qquad \text{(ÉM-VIII.20)}$$

alors

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}', \qquad \text{(ÉM-VIII.21)}$$

puisque le rotationnel d'un gradient est nul. De même, comme

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V - \left(\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \frac{\partial\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(V - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}, \qquad \text{(ÉM-VIII.22)}$$

on a

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \qquad \text{(ÉM-VIII.23)}$$

avec

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}. \qquad \text{(ÉM-VIII.24)}$$

1. Parfois appelée « équation de Maxwell-flux » car elle est reliée au flux du champ magnétique, ou encore « équation de Maxwell-Thomson ».

Il est toujours possible de trouver une fonction f et de redéfinir V et $\vec{A}$ de telle sorte que

$$\mathbf{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{ÉM-VIII.25}$$

Cette condition est appelée ***jauge de Lorenz*** (sans « t » : ce n'est pas le même physicien que celui de la force de *Lorentz*). Elle généralise la jauge de Coulomb ($\operatorname{div}\vec{A} = 0$) dans le cas de sources et de champs non stationnaires.

En jauge de Lorenz, les équations ÉM-VIII.17 et ÉM-VIII.18 deviennent

$$\Box V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{ÉM-VIII.26}$$

$$\Box \vec{A} = -\mu_0\,\vec{\jmath}. \tag{ÉM-VIII.27}$$

Les solutions de ces équations, avec les conditions supplémentaires $V(\infty) = 0$ et $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$, valables pour une distribution de sources localisée ou dont la densité décroît suffisamment rapidement avec la distance, sont les suivantes :

$$\boldsymbol{V(M,t) = \iiint_P \frac{\varrho(P, t - PM/c)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}\,\mathrm{d}\tau}, \tag{ÉM-VIII.28}$$

$$\boldsymbol{\vec{A}(M,t) = \iiint_P \frac{\mu_0\,\vec{\jmath}(P, t - PM/c)}{4\,\pi\,PM}\,\mathrm{d}\tau}. \tag{ÉM-VIII.29}$$

Ces solutions sont appelées ***potentiels retardés*** car les valeurs des potentiels en un point M à un instant t dépendent de celles des sources en tous les points P à l'instant antérieur $t - PM/c$. La quantité PM/c correspond au temps de propagation de P à M à la vitesse c des effets d'une variation des sources.

Une autre solution mathématique est celle des ***potentiels avancés***, où « $t - PM/c$ » est remplacé par « $t + PM/c$ ». Cette solution n'est pas physique car les potentiels (et les champs) dépendraient des valeurs des sources à un instant ultérieur : elle violerait donc le principe de causalité selon lequel la cause précède l'effet.

Lorsque les sources sont stationnaires, les potentiels retardés se réduisent aux expressions obtenues en électrostatique et en magnétostatique :

$$V(M) = \iiint_P \frac{\varrho(P)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}\,\mathrm{d}\tau, \tag{ÉM-VIII.30}$$

$$\vec{A}(M) = \iiint_P \frac{\mu_0\,\vec{\jmath}(P)}{4\,\pi\,PM}\,\mathrm{d}\tau. \tag{ÉM-VIII.31}$$

Les champs sont alors donnés par les lois de Coulomb et de Biot et Savart :

$$\vec{E}(M) = \iiint_P \frac{\varrho(P)\,\overrightarrow{PM}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^3}\,\mathrm{d}\tau, \tag{ÉM-VIII.32}$$

$$\vec{B}(M) = \iiint_P \frac{\mu_0\,\vec{\jmath}(P) \times \overrightarrow{PM}}{4\,\pi\,PM^3}\,\mathrm{d}\tau. \tag{ÉM-VIII.33}$$

Il ne faut pas en conclure que, pour des sources non stationnaires, les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ peuvent être obtenues à partir des lois de Coulomb et de Biot et Savart en remplaçant $\varrho(P)$ et $\vec{\jmath}(P)$ par $\varrho(P, t - PM/c)$ et $\vec{\jmath}(P, t - PM/c)$. Les expressions correctes, établies par Jefimenko, sont

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \iiint_P \left(\frac{\varrho(P, t - PM/c)\,\overrightarrow{PM}}{PM^3} + \frac{(\partial\varrho/\partial t)(P, t - PM/c)\,\overrightarrow{PM}}{c\,PM^2} - \frac{(\partial\vec{\jmath}/\partial t)(P, t - PM/c)}{c^2\,PM}\right)\mathrm{d}\tau, \tag{ÉM-VIII.34}$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \iiint_P \left(\frac{\vec{\jmath}(P, t - PM/c)}{PM^3} + \frac{(\partial\vec{\jmath}/\partial t)(P, t - PM/c)}{c\,PM^2}\right) \times \overrightarrow{PM}\,\mathrm{d}\tau. \tag{ÉM-VIII.35}$$

Aux termes usuels en électrostatique et en magnétostatique, qui dépendent des valeurs de ϱ et de $\vec{\jmath}$ (mais au temps retardé) et qui décroissent en $1/r^2$, s'ajoutent, dans le cas non stationnaire, des termes dépendant des dérivées de ϱ et de $\vec{\jmath}$ par rapport au temps et qui décroissent en $1/r$. Ces derniers dominent donc à grande distance des sources si celles-ci ne sont pas stationnaires et ce sont eux qui sont à l'origine des ondes électromagnétiques.

En régime quasi stationnaire, le temps de propagation PM/c est négligeable devant le temps d'évolution du système (ce qui revient à négliger le courant de déplacement). Près des sources, les potentiels $V(M,t)$ et

$\vec{A}(M,t)$ sont alors donnés par ÉM-VIII.30 et ÉM-VIII.31 avec $\varrho(P,t)$ et $\vec{j}(P,t)$ au lieu de $\varrho(P)$ et $\vec{j}(P)$.

$$V(M,t) \approx \iiint_P \frac{\varrho(P,t)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM}\,đ\tau, \qquad \text{(ÉM-VIII.36)}$$

$$\vec{A}(M,t) \approx \iiint_P \frac{\mu_0\,\vec{j}(P,t)}{4\,\pi\,PM}\,đ\tau. \qquad \text{(ÉM-VIII.37)}$$

De même pour $\vec{B}(M,t)$ à partir de ÉM-VIII.33. En revanche, à cause du terme « $\partial\vec{A}/\partial t$ » dans ÉM-VIII.13, il ne suffit pas de remplacer $\varrho(P)$ par $\varrho(P,t)$ dans ÉM-VIII.32 pour obtenir $\vec{E}(M,t)$.

c. Théorème de Poynting

Une particule de charge q se déplaçant à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel galiléen reçoit du champ électromagnétique une puissance

$$\mathcal{P}_q = q\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = q\,\vec{E}\cdot\vec{v}. \qquad \text{(ÉM-VIII.38)}$$

Un volume $đ\tau$ contenant différents types de porteurs de charge reçoit une puissance

$$đ\mathcal{P} = \sum_k \nu_k\,đ\tau\,q_k\,\vec{E}\cdot\vec{v}_k = \vec{j}\cdot\vec{E}\,đ\tau. \qquad \text{(ÉM-VIII.39)}$$

La puissance électromagnétique reçue par les charges dans un volume $\mathcal{V}$ fixe est donc

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_\mathcal{V} = \iiint_\mathcal{V} \vec{j}\cdot\vec{E}\,đ\tau}. \qquad \text{(ÉM-VIII.40)}$$

Réécrivons ce terme en utilisant ÉM-VIII.11 :

$$\mathcal{P}_\mathcal{V} = \iiint_\mathcal{V} \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}\,đ\tau. \qquad \text{(ÉM-VIII.41)}$$

Or

$$\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}, \qquad \text{(ÉM-VIII.42)}$$

donc

$$\mathcal{P}_\mathcal{V} = -\iiint_\mathcal{V}\left(\mathrm{div}\left[\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right] + \frac{\vec{B}}{\mu_0}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)đ\tau \qquad \text{(ÉM-VIII.43)}$$

$$= -\oiint_\mathcal{S}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)\cdot đ\vec{S} - \iiint_\mathcal{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}\right)đ\tau, \qquad \text{(ÉM-VIII.44)}$$

où l'on a appliqué le théorème d'Ostrogradski à la surface $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$. Le volume étant fixe, on peut réécrire cette expression sous la forme

$$\boldsymbol{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_\mathcal{V}\left(\frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}\right)đ\tau = \mathcal{P}_\mathcal{V} + \oiint_\mathcal{S}\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)\cdot đ\vec{S}} \qquad \text{(ÉM-VIII.45)}$$

(***théorème de Poynting***). La quantité

$$\boldsymbol{u_{EB} = \frac{\varepsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\,\mu_0}} \qquad \text{(ÉM-VIII.46)}$$

peut s'interpréter comme la ***densité d'énergie électromagnétique associée au champ*** ; son intégrale est l'***énergie électromagnétique*** $\mathcal{E}$ contenue dans $\mathcal{V}$. La quantité

$$\boldsymbol{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}} \qquad \text{(ÉM-VIII.47)}$$

est le ***vecteur de Poynting*** [※2] et son intégrale sur $\mathcal{S}$ est le ***flux d'énergie électromagnétique*** à travers $\mathcal{S}$ (positif s'il y a un flux net vers l'extérieur).

Le théorème de Poynting traduit la conservation de l'énergie : la variation de l'énergie électromagné-

2. La preuve du théorème de Poynting utilise le théorème d'Ostrogradski, valable pour une surface fermée, et ne fait intervenir que la divergence du vecteur de Poynting. La divergence d'un rotationnel étant nulle, $\vec{\Pi} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f}$ satisferait aussi le théorème pour n'importe quelle fonction $\vec{f}$.

   Le flux d'énergie électromagnétique à travers une surface ouverte dépend en revanche de la fonction $\vec{f}$. Nous admettrons que la densité de flux d'énergie électromagnétique est bien donnée par l'expression ÉM-VIII.47.

tique dans un volume est due au travail des forces électromagnétiques sur les charges dans ce volume ou (inclusivement) à un échange d'énergie avec l'extérieur par la surface de ce volume.

On peut de même associer une ***densité (volumique) de quantité de mouvement***

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \tag{ÉM-VIII.48}$$

au champ électromagnétique.