Chapitre OÉC-III

Notions d'électrocinétique

A. Densité de courant, intensité

Nous avons jusqu'ici considéré uniquement des charges statiques, lesquelles sont seulement sources du champ électrostatique. L'expression du champ électrique change lorsque les charges sont en mouvement. Par ailleurs, les courants de charges sources produisent non seulement un champ électrique, mais aussi un champ magnétique, lequel se traduit par une force magnétique exercée sur une charge test en mouvement. Il est donc nécessaire de quantifier la notion de ***courant*** de charges.

Soit $\mathcal{S}$ une surface orientée. On appelle ***intensité*** électrique $I_{\mathcal{S}}$ la valeur de la charge traversant $\mathcal{S}$ par unité de temps, comptée positivement si elle franchit $\mathcal{S}$ dans le même sens que l'orientation de la surface, et négativement sinon. Si $\text{đ}Q_{\mathcal{S}}$ est la charge traversant $\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$,

$$\boldsymbol{I_{\mathcal{S}} = \frac{\text{đ}Q_{\mathcal{S}}}{\mathrm{d}t}}\,. \tag{OÉC-III.1}$$

Considérons un milieu contenant ν particules par unité de volume, toutes de charge q, et calculons l'intensité $\text{đ}I$ traversant une surface élémentaire $\text{đ}S$ orientée selon un vecteur $\vec{n}$. Notons $\vec{v}$ la vitesse des particules par rapport à un référentiel dans lequel $\text{đ}S$ est fixe Projetons $\text{đ}S$ sur le plan perpendiculaire à $\vec{v}$ et notons $\text{đ}S_\perp$ la surface projetée ainsi que l'aire de celle-ci. Les charges traversant $\text{đ}S$ entre $t-\mathrm{d}t$ et t sont dans l'espace compris entre $\text{đ}S$ et le translaté par $-\vec{v}\,\mathrm{d}t$ de $\text{đ}S$. Le volume $\text{đ}^2\tau$ [1] de cet espace est le même que celui entre $\text{đ}S_\perp$ et le translaté par $-\vec{v}\,\mathrm{d}t$ de cette surface, donc $\text{đ}^2\tau = v\,\mathrm{d}t\,\text{đ}S_\perp$, où $v = \|\vec{v}\|$. Il contient une charge $\text{đ}^2Q = \nu\,q\,\text{đ}^2\tau$.

Notons α l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{n}$. Supposons $\alpha \in [0, \pi/2]$: on a alors $\text{đ}I = +\text{đ}^2Q/\mathrm{d}t$ car la charge đ^2Q traverse $\text{đ}S$ dans le sens de $+\vec{n}$; par ailleurs, α est aussi l'angle entre $\text{đ}S$ et $\text{đ}S_\perp$, donc $v\,\text{đ}S_\perp = +v\,\text{đ}S\cos\alpha = \vec{v}\cdot\text{đ}\vec{S}$ et $\text{đ}I = \nu\,q\,\vec{v}\cdot\text{đ}\vec{S}$. Inversement, si $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, $\text{đ}I = -\text{đ}^2Q/\mathrm{d}t$ car la charge đ^2Q traverse $\text{đ}S$ dans le sens de $-\vec{n}$; mais comme on a alors $v\,\text{đ}S_\perp = -v\,\text{đ}S\cos\alpha = -\vec{v}\cdot\text{đ}\vec{S}$, on retrouve la même expression pour $\text{đ}I$ que dans le cas où $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Dans tous les cas,

$$\text{đ}I = \nu\,q\,\vec{v}\cdot\text{đ}\vec{S}. \tag{OÉC-III.2}$$

Plus généralement, si les particules n'ont pas toutes la même vitesse, il faut remplacer $\vec{v}$ par la vitesse moyenne, $\langle\vec{v}\rangle$.

Enfin, le milieu peut contenir plusieurs types de particules (indice $k = 1, 2, \ldots$), de nombre volumique ν_k, de charge individuelle q_k et de vitesse moyenne $\langle\vec{v}_k\rangle$. En faisant la somme sur tous ces types, on obtient

$$\boldsymbol{\text{đ}I = \vec{\jmath}\cdot\text{đ}\vec{S}}, \tag{OÉC-III.3}$$

avec

$$\boldsymbol{\vec{\jmath} = \sum_k \nu_k\,q_k\,\langle\vec{v}_k\rangle}, \tag{OÉC-III.4}$$

La quantité $\vec{\jmath}$ est appelée la ***densité volumique de courant***. On peut aussi l'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\vec{\jmath} = \sum_k \varrho_k\,\langle\vec{v}_k\rangle}, \tag{OÉC-III.5}$$

où $\varrho_k = \nu_k\,q_k$ est la densité volumique de charge portée par les particules de type k. Remarquer qu'on peut très bien avoir un courant dans un corps neutre.

1. La notation đ^2x (ou d^2x pour une différentielle, c.-à-d. pour une variation infinitésimale) désigne une quantité infinitésimale du second ordre, pas le carré d'une quantité (ou variation) infinitésimale du premier ordre (celle-ci serait notée $\text{đ}x^2$ ou $\mathrm{d}x^2$). Ainsi, $\int_{\mathcal{S}} \text{đ}^2Q$ est la charge $\text{đ}Q$ traversant la surface $\mathcal{S}$ pendant $\mathrm{d}t$.

L'intensité à travers une surface orientée finie $\mathcal{S}$ est

$$\boldsymbol{I_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} đI}. \tag{OÉC-III.6}$$

Montrons que, **pour un système localement neutre en tout point, la densité volumique de courant est indépendante du référentiel**. Rappelons que la vitesse d'un porteur de charge situé en un point M est donnée par

$$(\vec{v}_k)_{/\mathcal{K}} = (\vec{v}_k)_{/\mathcal{K}'} + \vec{v}_{\mathrm{e}}(M), \tag{OÉC-III.7}$$

où $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ sont deux référentiels, $\vec{v}_{\mathrm{e}}(M) = \vec{v}_{/\mathcal{K}}(O') + \vec{\omega}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}} \times \overrightarrow{O'M}$ est la vitesse d'entraînement de M, O' est l'origine d'un repère de $\mathcal{K}'$ et $\vec{\omega}_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}}$ est la vitesse angulaire de $\mathcal{K}'$ par rapport à $\mathcal{K}$. En un point M,

$$\begin{aligned}\vec{\jmath}_{/\mathcal{K}} &= \sum_k \varrho_k\,(\vec{v}_k)_{/\mathcal{K}} = \sum_k \varrho_k\,(\vec{v}_k)_{/\mathcal{K}'} + \Big(\sum_k \varrho_k\Big)\,\vec{v}_{\mathrm{e}}(M)\\ &= \sum_k \varrho_k\,(\vec{v}_k)_{/\mathcal{K}'} \qquad \text{(puisque le métal est neutre)}\\ &= \vec{\jmath}_{/\mathcal{K}'}.\end{aligned} \tag{OÉC-III.8}$$

Calculons $\vec{\jmath}$ dans un corps métallique neutre (il est donc inutile de préciser le référentiel). Celui-ci contient deux types de porteurs de charges : les électrons de conduction (indice « − ») et les ions du réseau cristallin (indice « + ») ; ces derniers sont fixes les uns par rapport aux autres. Le corps étant neutre, on peut calculer $\vec{\jmath}$ à partir des vitesses des porteurs par rapport au référentiel $\mathcal{K}_+$ dans lequel les ions de la portion infinitésimale de conducteur sont fixes (par abus de langage, on parlera parfois de vitesses « par rapport au métal », car le réseau constitue l'essentiel de la masse du métal). On a

$$\boldsymbol{\vec{\jmath}} = \varrho_-\,(\vec{v}_-)_{/\mathcal{K}_+} + \varrho_+\,(\vec{v}_+)_{/\mathcal{K}_+} \boldsymbol{= \varrho_-\,(\vec{v}_-)_{/\mathcal{K}_+}}. \tag{OÉC-III.9}$$

Dans un conducteur métallique, seule compte la vitesse relative des électrons par rapport au réseau. (Noter que dans un conducteur métallique, les électrons se déplacent en sens inverse de la densité de courant.) Dans un électrolyte, en revanche, il faut tenir compte de la vitesse de chaque type d'ion.

Dans un conducteur bidimensionnel (par exemple la surface d'un conducteur tridimensionnel), on peut définir une ***densité surfacique de courant*** $\vec{J}$. Il suffit de remplacer l'élément de surface $đS$ par un élément de longueur $đ\ell$. Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire *normal* à l'élément de longueur et dans le plan localement tangent au conducteur (attention à ne pas prendre $\vec{n}$ tangent à $đ\ell$ ni normal au conducteur), l'intensité $đI$ traversant $đ\ell$ dans le sens de $\vec{n}$ est

$$\boldsymbol{đI = \vec{J} \cdot đ\ell\,\vec{n}}, \tag{OÉC-III.10}$$

où

$$\boldsymbol{\vec{J} = \sum_k \sigma_k\,\vec{v}_k} \tag{OÉC-III.11}$$

et σ_k est la densité surfacique de charge.

Dans une portion $đ\vec{\ell}$ de conducteur filiforme, $\vec{\jmath}$ est parallèle à $đ\vec{\ell}$ dans le référentiel où cette portion est fixe. Si ce conducteur est neutre, $\vec{\jmath}$ est donc tangent en tout point au fil, quel que soit le référentiel.

B. Conservation de la charge

Considérons une surface $\mathcal{S}$ fermée fixe. Pendant une durée $\mathrm{d}t$, une charge $I_{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}t$ sort de $\mathcal{S}$. La variation de la charge Q_{int} contenue dans $\mathcal{S}$ est donc

$$\mathrm{d}Q_{\mathrm{int}} = -I_{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}t. \tag{OÉC-III.12}$$

On a

$$Q_{\mathrm{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \varrho\,đ\tau, \tag{OÉC-III.13}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume de l'espace délimité par $\mathcal{S}$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\mathcal{V}} \varrho\,đ\tau = -\iint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot đ\vec{S}. \tag{OÉC-III.14}$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\mathcal{V}} \varrho\,đ\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,đ\tau \tag{OÉC-III.15}$$

puisque $\mathcal{V}$ est fixe, et

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot đ\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\jmath}\,đ\tau, \tag{OÉC-III.16}$$

donc
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = -\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\jmath}\,\mathrm{d}\tau. \qquad \text{(OÉC-III.17)}$$
Ceci étant vrai pour un volume quelconque, on obtient l'***équation locale de la conservation de la charge*** :
$$\mathbf{div}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \mathbf{0}. \qquad \text{(OÉC-III.18)}$$

C. Approximation des régimes quasi stationnaires

1. Validité

Nous allons dorénavant considérer des circuits électriques en régime stationnaire ou, plus généralement, quasi stationnaire, c.-à-d. dont les tensions et intensités sont constantes ou lentement variables. Précisons ce que nous entendons par là : un circuit est dit vérifier l'***approximation des régimes quasi stationnaires*** (ARQS ; on dit aussi « approximation des régimes quasi permanents ») si
$$L \ll c\,T, \qquad \text{(OÉC-III.19)}$$
où T est le temps caractéristique d'évolution de ses propriétés (par exemple, la période en régime sinusoïdal), L est sa taille maximale et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Ceci revient à dire que le circuit est suffisamment petit[※2] pour que le temps de propagation du champ électromagnétique d'un bout à l'autre du circuit soit négligeable devant T.

Nous montrerons au § ÉM-VIII.A que
$$\mathbf{div}\,\vec{\jmath} \approx \mathbf{0} \qquad \textbf{dans l'ARQS}. \qquad \text{(OÉC-III.20)}$$
Une conséquence immédiate de l'ARQS et de l'équation locale de la conservation de la charge est que $\partial\varrho/\partial t \approx 0$ en tout point d'un circuit : un circuit neutre en tout point au repos reste donc localement neutre en régime lentement variable.

Notons que l'ARQS ne s'applique pas aux condensateurs : des charges s'accumulent bien sur les armatures !

2. Intensité à travers une section de conducteur

Considérons un tronçon de conducteur délimité par une section $\mathcal{S}_1$, un section $\mathcal{S}_2$ et par la surface extérieure $\mathcal{S}_0$ de la portion de conducteur comprise entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. La surface $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ est fermée. Dans l'ARQS, on a $\operatorname{div} \vec{\jmath} = 0$, donc
$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\jmath}\,\mathrm{d}\tau = 0, \qquad \text{(OÉC-III.21)}$$
où $\mathcal{V}$ est le volume compris dans $\mathcal{S}$. Par ailleurs,
$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}_0} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \qquad \text{(OÉC-III.22)}$$
L'intégrale $\iint_{\mathcal{S}_0} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ est nulle puisque les charges ne franchissent pas la surface extérieure $\mathcal{S}_0$ et qu'il ne peut y avoir d'accumulation de charge dans l'ARQS (là encore, rappelons que celle-ci ne s'applique pas aux condensateurs). Orientons la surface $\mathcal{S}_1$ dans le même sens que $\mathcal{S}_2$. Les intensités I_1 et I_2, orientées de S_1 vers S_2, à travers ces deux surfaces valent
$$I_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{\jmath} \cdot (-\mathrm{d}\vec{S}) \qquad \text{et} \qquad I_2 = \iint_{\mathcal{S}_2} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}. \qquad \text{(OÉC-III.23)}$$
On a donc
$$\boldsymbol{I_1 = I_2}. \qquad \text{(OÉC-III.24)}$$
L'intensité traversant une section du conducteur étant la même en tout point d'un conducteur filiforme (dans l'ARQS), lorsqu'on parlera, sans préciser, de l'***intensité*** électrique dans un conducteur, il s'agira de l'intensité à travers une section quelconque.

2. Pour de grands circuits, par exemple pour les câbles intercontinentaux sous-marins, il faut tenir compte du temps de propagation (on obtient alors l'équation dite « des télégraphistes »).

3. Loi des nœuds (1re loi de Kirchhoff)

On peut appliquer le même raisonnement en un ***nœud***, c.-à-d. un embranchement où plusieurs ***branches*** conductrices se rejoignent. Notons I_k l'intensité dans la branche nº k. Posons $s_k = -1$ pour les branches dont le courant est orienté vers le nœud (courant entrant dans le nœud) et $s_k = +1$ pour celles dont le courant est à rebours du nœud (courant sortant). On obtient la ***loi des nœuds***, ou ***1re loi de Kirchhoff***,

$$\sum_k s_k\, I_k = 0, \tag{OÉC-III.25}$$

qui peut aussi s'écrire

$$\sum_{\substack{\text{courants}\\\text{entrants}}} I_k = \sum_{\substack{\text{courants}\\\text{sortants}}} I_k. \tag{OÉC-III.26}$$

D. Tension, intensité et puissance électrique

1. Tension et intensité ; conventions générateur et récepteur

Un ***dipôle électrocinétique*** (sans rapport avec les dipôles électriques du chapitre ÉM-III ou les dipôles magnétiques du § ÉM-V.F) est une portion de conducteur délimitée par deux surfaces équipotentielles. Deux quantités nous intéresseront particulièrement : l'intensité du courant qui le parcourt et la différence de potentiel, ou ***tension*** ※3, entre ses bornes.

Nous allons dans ce qui suit donner la relation entre ces quantités pour différents dipôles. Notons I_{AB} l'intensité du courant orienté de la borne A du dipôle vers sa borne B et $U_{AB} = V_A - V_B$ ou $U_{BA} = V_B - V_A$ la différence de potentiel entre ses bornes. Sur le schéma d'un circuit, l'orientation de I_{AB} est marquée par une flèche dirigée de A vers B posée sur le fil conducteur relié à A ou B. L'orientation de U_{AB} est marquée par une flèche parallèle au dipôle et dirigée de B vers A. Deux conventions sont possibles pour relier la tension et l'intensité si le sens n'est pas explicitement indiqué en indice par les bornes :

- ***convention récepteur*** : **tension *U* et intensité *I* en sens opposés**, c.-à-d. que l'on prend soit $U = U_{AB}$ et $I = I_{AB}$, soit $U = U_{BA}$ et $I = I_{BA}$;
- ***convention générateur*** : **tension *U* et intensité *I* dans le même sens**, c.-à-d. que l'on prend soit $U = U_{BA}$ et $I = I_{AB}$, soit $U = U_{AB}$ et $I = I_{BA}$.

Comme leurs noms l'indiquent, la convention récepteur est par défaut adoptée pour un récepteur (résistor, bobine, condensateur…) et la convention générateur est adoptée par défaut pour un générateur, mais rien n'interdit de s'en écarter. Il faut alors juste le préciser sur le schéma ou, dans les équations, en écrivant explicitement U_{AB} plutôt que U.

Remarque. Un dipôle (une batterie rechargeable, par exemple) peut fonctionner comme un récepteur à certains moments et comme un générateur à d'autres. ■

2. Puissance électrique

La force électrique exercée sur un électron vaut $\vec{F} = -e\,\vec{E}$. La puissance électrique reçue par l'électron vaut $\vec{F}\cdot\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron par rapport au conducteur, supposé galiléen. En sommant sur tous les électrons présents dans un volume $đ\tau$, on obtient la ***puissance électrique reçue*** par ce volume,

$$đ\mathcal{P} = -e\,\vec{E}\cdot\vec{v}\,\nu\,đ\tau = \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,đ\tau. \tag{OÉC-III.27}$$

Une ***ligne de courant*** est une courbe sur laquelle $\vec{\jmath}$ est tangent à la courbe en tout point. Un ***tube de courant élémentaire*** est l'ensemble des lignes de courant traversant une surface infinitésimale de conducteur. Découpons (on admet que c'est possible) le volume $\mathcal{V}$ d'un dipôle délimité par deux surfaces équipotentielles situées en A et B en tubes de courant élémentaires (dans le sens de la longueur) et en sections équipotentielles $\mathcal{S}$ séparées par une distance infinitésimale (dans le sens de la largeur). Les éléments résultant de cette partition de l'espace ont un volume

$$đ\tau = đ\vec{\ell}\cdot đ\vec{S}, \tag{OÉC-III.28}$$

où $đ\vec{\ell} = đ\ell\,\vec{u}$ est la longueur du tube de courant entre deux sections et $đ\vec{S} = đS\,\vec{n}$ est la surface de la section de

3. Certains auteurs distinguent « tension » ($\int_A^B \vec{E}\cdot đ\vec{\ell}$) et « différence de potentiel » ($V_A - V_B$). La valeur de cette dernière dépend d'ailleurs de la jauge utilisée pour définir V (cf. § ÉM-VIII.B). Voir « Tension électrique et/ou différence de potentiel ? », par David Augier (`http://augier.david.free.fr/notes/tension.pdf`). Les deux quantités sont identiques en régime stationnaire et nous esquiverons cette question.

tube de courant. Les sections étant équipotentielles, $\vec{E} = E\,\vec{n}$ et $\vec{E}\cdot đ\vec{\ell} = -\mathrm{d}V$. Par ailleurs, le courant passant dans le tube vaut $đI = \vec{\jmath}\cdot đ\vec{S}$ avec $\vec{\jmath} = j\,\vec{u}$. On a donc

$$đ\mathcal{P} = \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,đ\tau = (j\,\vec{u}\cdot E\,\vec{n})\,(đ\ell\,\vec{u}\cdot đS\,\vec{n}) = (j\,\vec{u}\cdot đS\,\vec{n})\,(đ\ell\,\vec{u}\cdot E\,\vec{n}) = (\vec{\jmath}\cdot đ\vec{S})\,(\vec{E}\cdot đ\vec{\ell}) = đI\,(-\mathrm{d}V). \quad \text{(OÉC-III.29)}$$

En intégrant sur une section équipotentielle, puis de A à B, on obtient

$$\mathcal{P}_{AB} = \int_A^B \left(-\mathrm{d}V\left[\iint_S đI\right]\right) = \int_A^B -\mathrm{d}V\,I_{AB} = I_{AB}\int_A^B -\mathrm{d}V, \quad \text{(OÉC-III.30)}$$

puisque l'intensité est la même à travers chaque section.

La **puissance électrique reçue par un dipôle *AB*** vaut donc

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_{AB} = U_{AB}\,I_{AB} = \begin{cases} U\,I & \textbf{en convention récepteur,} \\ -U\,I & \textbf{en convention générateur.}\end{cases}} \quad \text{(OÉC-III.31)}$$

Si U et I sont de même signe en convention récepteur, $\mathcal{P} > 0$ et le dipôle reçoit de la puissance électrique : il fonctionne bien en récepteur. Si U et I sont de signes opposés en convention récepteur, ou, ce qui revient au même, de même signe en convention générateur, $\mathcal{P} < 0$: le dipôle reçoit une puissance négative, c.-à-d. qu'il fournit la puissance électrique $-\mathcal{P} > 0$ au circuit : il fonctionne en générateur.

3. 2e loi de Kirchhoff, loi des mailles

La ***2e loi de Kirchhoff*** n'est qu'une relation de Chasles appliquée aux tensions : $U_{AB} = V_A - V_B$ et $U_{BC} = V_B - V_C$, donc, avec $U_{AC} = V_A - V_C$,

$$\boldsymbol{U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}}. \quad \text{(OÉC-III.32)}$$

En particulier, sur une ***maille***, c.-à-d. une portion de circuit dont les deux extrémités A_1 et A_n sont identiques,

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n-1} U_{A_k A_{k+1}} = 0} \qquad \textbf{(loi des mailles)}. \quad \text{(OÉC-III.33)}$$

Remarque. Cette relation n'est plus valable dans un champ magnétique externe variable : cf. chap. ÉM-VII. (En revanche, le champ magnétique produit par le courant circulant dans les bobines est déjà pris en compte dans les tensions de celles-ci.) ■

E. Conducteur ohmique. Résistors

1. Loi d'Ohm

Un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à un champ électrique $\vec{E}$ subit une force $\vec{F} = -e\,\vec{E}$[※4]. Considérons en particulier un électron libre se déplaçant dans un conducteur et prenons pour $\vec{E}$ le champ moyenné à une échelle mésoscopique. Supposons en outre que le champ puisse être traité comme uniforme et stationnaire sur la distance et la durée considérées. La deuxième loi de Newton donne $m\,\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = -e\,\vec{E}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron par rapport au conducteur, supposé galiléen, soit, après intégration,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) - \frac{e\,\vec{E}\,t}{m}. \quad \text{(OÉC-III.34)}$$

La vitesse de l'électron, et par conséquent la densité de courant, devrait ainsi tendre vers l'infini. Dans un circuit, l'électron n'est en fait pas complètement libre. Il subit des collisions avec le réseau cristallin[※5], ce que l'on modélise dans le modèle de Drude par une force de frottement

$$\vec{F}_\mathrm{c} = -m\,\vec{v}/\tau_\mathrm{c}, \quad \text{(OÉC-III.35)}$$

où la constante positive τ_c est un temps caractéristique. La deuxième loi de Newton prend alors la forme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau_\mathrm{c}} = -\frac{e\,\vec{E}}{m}. \quad \text{(OÉC-III.36)}$$

4. En présence d'un champ magnétique, il y a en outre une force magnétique transverse au mouvement. Cette force est responsable de l'effet Hall.
5. Il n'y a bien sûr pas de contact direct entre les électrons de conduction et les noyaux ou électrons liés à ceux-ci : les collisions sont dues aux fluctuations spatiales, au voisinage des nœuds du réseau, du champ électrique autour de sa valeur moyenne, ici notée « $\vec{E}$ » ; elles sont donc aussi de nature électromagnétique.

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution de l'équation homogène (c.-à-d. sans second membre) est de la forme

$$\vec{v}_{\mathrm{h}}(t) = \vec{\lambda}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{c}}}, \tag{OÉC-III.37}$$

où $\vec{\lambda}$ est une constante vectorielle. On peut considérer $\vec{E}$ comme constant sur une durée de l'ordre de τ_{c} et sur la distance parcourue pendant celle-ci. Une solution particulière est donc

$$\vec{v}_{\mathrm{p}} = -\frac{e\,\tau_{\mathrm{c}}}{m}\,\vec{E} \tag{OÉC-III.38}$$

et la solution générale est

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\mathrm{h}}(t) + \vec{v}_{\mathrm{p}} = \vec{\lambda}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{c}}} - \frac{e\,\tau_{\mathrm{c}}}{m}\,\vec{E}, \tag{OÉC-III.39}$$

où $\vec{\lambda}$ dépend des conditions initiales pour cet électron. À l'issue d'un régime transitoire durant quelques τ_{c} pendant lequel $\vec{v}_{\mathrm{h}}(t)$ tend vers $\vec{0}$, un régime permanent s'établit dans lequel $\vec{v}_{\mathrm{h}}(t)$ est négligeable. Le régime transitoire étant très bref, on peut considérer qu'on est toujours en régime permanent et que, en moyenne,

$$\langle\vec{v}\rangle \approx -\frac{e\,\tau_{\mathrm{c}}}{m}\,\vec{E}. \tag{OÉC-III.40}$$

Cette vitesse moyenne des électrons dans le conducteur, appelée ***vitesse de dérive***, est extrêmement faible[※6] : quelques 10^{-2} mm/s. En revanche, le signal électrique se propage à une vitesse de l'ordre de celle de la lumière.

De même, en moyenne,

$$\vec{j} \approx \nu\,(-e)\,\langle\vec{v}\rangle = \frac{\nu\,e^2\,\tau_{\mathrm{c}}}{m}\,\vec{E}. \tag{OÉC-III.41}$$

On obtiendrait le même résultat en considérant les interactions des électrons avec le réseau comme des collisions remettant à zéro leur vitesse (par rapport au réseau) plutôt que comme une force de frottement fluide : τ_{c} correspondrait alors au temps moyen entre deux collisions, $\langle\vec{v}\rangle$ à la vitesse moyenne et $\sqrt{\langle v^2\rangle}\,\tau_{\mathrm{c}}$ au libre parcours moyen entre deux collisions.

On a ainsi obtenu la ***loi d'Ohm locale*** :

$$\boldsymbol{\vec{j} = \gamma\,\vec{E}}, \tag{OÉC-III.42}$$

où la constante positive

$$\gamma = \frac{\nu\,e^2\,\tau_{\mathrm{c}}}{m} \tag{OÉC-III.43}$$

est la ***conductivité*** électrique du milieu. La loi d'Ohm peut aussi s'écrire

$$\boldsymbol{\vec{E} = \eta\,\vec{j}}, \tag{OÉC-III.44}$$

où $\boldsymbol{\eta = 1/\gamma}$ est la ***résistivité*** du milieu.

Un conducteur dans lequel $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$, avec $\gamma \approx \mathrm{c^{te}}$, s'appelle un ***conducteur ohmique*** ou, plus simplement, une ***résistance***[※7]. À l'équilibre, on a $\vec{j} = \vec{0}$, donc $\vec{E} = \vec{0}$, en accord avec ce qui avait été établi au § ÉM-IV.B.1.

Intégrons cette relation sur une portion AB de fil du circuit, de section S constante et de longueur ℓ grande devant le diamètre du fil. Orientons-la par un vecteur $\vec{n}$ et notons I_{AB} l'intensité orientée de A vers B. On a

$$\vec{j} = \frac{I_{AB}}{S}\,\vec{n}, \tag{OÉC-III.45}$$

donc, sur une longueur $\mathrm{d}\ell$,

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \eta\,\frac{I_{AB}}{S}\,\vec{n}\cdot\mathrm{d}\ell\,\vec{n} = \frac{\eta\,\mathrm{d}\ell}{S}\,I_{AB}. \tag{OÉC-III.46}$$

En intégrant de A à B, on obtient

$$U_{AB} = V_A - V_B = R\,I_{AB}, \tag{OÉC-III.47}$$

soit la ***loi d'Ohm globale***

$$\boldsymbol{U = R\,I} \qquad \textbf{(en convention récepteur)}, \tag{OÉC-III.48}$$

où

$$\boldsymbol{R = \frac{\eta\,\ell}{S}} \tag{OÉC-III.49}$$

est la ***résistance*** de la portion AB. L'unité d'une résistance dans le Système International d'unités est l'***ohm*** (symbole « Ω »). On utilise parfois aussi la ***conductance***, $\boldsymbol{G = 1/R}$ (en ***siemens*** dans le SI ; symbole « S »).

6. La vitesse quadratique moyenne, $\sqrt{\langle v^2\rangle}$, est en revanche élevée.
7. Rigoureusement, il faudrait distinguer le ***résistor***, dipôle électrocinétique, de la « résistance », nombre caractérisant la conduction dans ce dipôle. Par un abus de langage similaire, on appelle souvent « capacités » les condensateurs et « inductances » les bobines.

2. Loi de Joule. Effet Joule

La puissance électrique reçue par un volume $đ\tau$ de conducteur ohmique est

$$đ\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E}\, đ\tau = \boldsymbol{\gamma\, E^2\, đ\tau = \eta\, j^2\, đ\tau} \qquad (\textit{\textbf{loi de Joule locale}}). \tag{OÉC-III.50}$$

Comme $\gamma > 0$, $đ\mathcal{P}_J$ est toujours positive. Cette puissance est fournie aux électrons de conduction, dont la vitesse de dérive (c.-à-d. la vitesse vectorielle moyenne du flot d'électrons) atteint quasi instantanément la valeur de l'équation OÉC-III.40. La puissance électrique reçue ne sert alors plus à accélérer les électrons, mais est dissipée[※8] lors des collisions de ceux-ci avec les ions. Ceci se traduit par une hausse de la température du conducteur (et donc, notamment, de la vitesse quadratique des électrons). Ce phénomène porte le nom d'***effet Joule***.

En termes thermodynamiques, le travail électrique reçu par le conducteur accroît son énergie interne mais également, en raison du caractère irréversible de la dissipation d'énergie lors des collisions, son entropie. La température ne pouvant augmenter indéfiniment, soit le conducteur fond (comme un fusible), ce qui interrompt le passage du courant, soit il transfère de la chaleur à son environnement (par conduction, convection et rayonnement) : c'est le principe de fonctionnement des radiateurs électriques.

De même, la puissance reçue par un résistor est

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_J &= U\,I \qquad \text{en convention récepteur,} \\ &= \frac{U^2}{R} = \boldsymbol{R\,I^2} \qquad (\textit{\textbf{loi de Joule globale}}),\ \text{indépendamment de la convention.} \end{aligned} \tag{OÉC-III.51}$$

F. Autres dipôles usuels

Outre les résistances, étudiées au § OÉC-III.E, nous nous intéresserons aux condensateurs, aux bobines et aux générateurs.

1. Condensateurs

Les condensateurs ne sont pas des dipôles ohmiques puisque leurs armatures sont séparées par un isolant et que le courant de charges ne traverse pas celui-ci[※9]. Nous admettrons que dans l'ARQS[※10], les relations établies au § ÉM-IV.C pour la capacité, la relation entre charge et différence de potentiel ainsi que l'expression de l'énergie restent valables.

La seule différence est que les charges sur les armatures sont reliées à l'intensité par

$$\boldsymbol{I_{AB} = \frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}t}}, \tag{OÉC-III.52}$$

soit

$$\boldsymbol{I = C\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}} \qquad \textbf{en convention récepteur}. \tag{OÉC-III.53}$$

Le condensateur reçoit une puissance

$$\mathcal{P} = U\,I \qquad \text{en convention récepteur} \tag{OÉC-III.54}$$

$$= C\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\,U = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\ \text{(indépendamment de la convention),} \tag{OÉC-III.55}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{E} = \frac{C\,U^2}{2}} \tag{OÉC-III.56}$$

est l'***énergie emmagasinée dans le condensateur*** (cf. § ÉM-IV.C.3).

2. Loi d'Ohm généralisée

Appliquons la loi d'Ohm à un circuit AB fermé, c.-à-d. tel que $B = A$, ne comportant que des dipôles ohmiques (y compris les fils). On a $V_A - V_B = R\,I$ et comme $A = B$, $V_A = V_B$, donc $I = 0$: aucun courant ne

8. « Dissipée » ne signifie pas que cette puissance est perdue, mais qu'elle est conservée sous une forme dégradée.
9. En revanche, il y a un courant dit « de déplacement » (cf. § ÉM-VIII.A).
10. Il faut en fait distinguer deux ARQS différentes (cf. « Remarques sur l'approximation des régimes quasi stationnaires en électromagnétisme », par André Domps (2003), *Bulletin de l'union des physiciens* 97, 159) : l'ARQS électrique, applicable aux condensateurs, et l'ARQS magnétique, applicable aux autres conducteurs. C'est cette dernière qu'on entend généralement par « ARQS » sans précision.

peut circuler ! L'insertion de condensateurs chargés permet la circulation transitoire de courants, mais un équilibre électrostatique est rapidement atteint et le courant devient alors nul.

Pour avoir un courant permanent dans le circuit, il faut introduire d'autres types de dipôles, ce qui oblige à généraliser la loi d'Ohm. Dans un conducteur purement ohmique, $\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E}$, avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$. Cette dernière relation n'est plus vraie si les sources du champ ne sont pas statiques. Si le circuit se déplace dans un champ magnétique, il faut rajouter une force magnétique à la force $\vec{F}$ exercée sur les électrons. Enfin, les champs ne sont pas les seules causes possibles du déplacement des charges : dans une pile, par exemple, ce sont des réactions chimiques dans l'électrolyte qui provoquent le mouvement des ions entre la cathode et l'anode, et indirectement celui des électrons dans le circuit connecté aux bornes de la pile. On peut rassembler tous ces termes dans un ***champ électromoteur*** $\vec{f}_\mathrm{m}$. La loi d'Ohm locale prend alors la forme suivante

$$\boldsymbol{\vec{\jmath} = \gamma\,(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V + \vec{f}_\mathrm{m})} \qquad (\textit{\textbf{loi d'Ohm locale généralisée}}), \tag{OÉC-III.57}$$

soit

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \eta\,\vec{\jmath} - \vec{f}_\mathrm{m}, \tag{OÉC-III.58}$$

ce qui, en intégrant de A à B donne

$$\boldsymbol{V_A - V_B = R\,I_{AB} - \epsilon_{AB}} \qquad (\textit{\textbf{loi d'Ohm globale généralisée}}), \tag{OÉC-III.59}$$

où

$$\boldsymbol{\epsilon_{AB} = \int_A^B \vec{f}_\mathrm{m}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}} \tag{OÉC-III.60}$$

est la ***force électromotrice*** (f.é.m.). Contrairement à ce que son nom suggère, il ne s'agit pas d'une force. Elle a d'ailleurs la dimension d'une tension. Certains auteurs préfèrent l'appeler l'***électromotance***.

On a donc

$$\boldsymbol{U = \begin{cases} R\,I - \epsilon & \textbf{en convention récepteur}, \\ \epsilon - R\,I & \textbf{en convention générateur}. \end{cases}} \tag{OÉC-III.61}$$

a. Générateurs

Un ***générateur de tension idéal*** (on dit aussi une ***source de tension idéale***) est un dipôle électrocinétique capable d'imposer entre ses bornes une tension indépendante de l'intensité qui le parcourt. Il doit pour cela avoir une résistance négligeable ; la tension entre ses bornes est donc

$$\boldsymbol{U = \epsilon} \qquad \textbf{en convention générateur}. \tag{OÉC-III.62}$$

La puissance fournie par un tel générateur est

$$\boldsymbol{\mathcal{P} = \epsilon\,I} \qquad \textbf{en convention générateur}. \tag{OÉC-III.63}$$

Un générateur de tension non idéal peut être modélisé comme l'association en série d'un générateur de tension idéal et d'une résistance.

Un ***générateur de courant idéal*** est à l'inverse capable d'imposer dans le fil auquel il est branché une intensité indépendante de la tension entre ses bornes. Un générateur de courant non idéal peut être modélisé comme l'association en parallèle d'un générateur de courant idéal et d'une résistance.

Contrairement aux autres dipôles considérés dans ce chapitre, un générateur est polarisé, c.-à-d. que le comportement du circuit dépend dans le sens dans lequel il est branché. Le sens adopté pour orienter la force électromotrice doit être indiqué sur le schéma.

b. Bobine

Dans une bobine (cf. § ÉM-VII.D),

$$\boldsymbol{\epsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}} \tag{OÉC-III.64}$$

est la ***force électromotrice d'induction***, où

$$\boldsymbol{\Phi = L\,I} \tag{OÉC-III.65}$$

est le ***flux à travers la bobine du champ magnétique créé par la bobine elle-même***, et L est l'***[auto-]inductance***, ou ***inductance propre***, de celle-ci. L'unité de l'inductance est le ***henry*** (symbole « H »). Pour une bobine de résistance négligeable, on a donc

$$\boldsymbol{U = L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} \qquad \textbf{en convention récepteur}. \tag{OÉC-III.66}$$

La puissance reçue par la bobine est

$$\mathcal{P} = U\,I \qquad \text{en convention récepteur} \tag{OÉC-III.67}$$

$$= L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,I = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}, \tag{OÉC-III.68}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{E} = \frac{L\,I^2}{2}} \tag{OÉC-III.69}$$

est l'***énergie emmagasinée dans la bobine***.

3. Association de résistances, de bobines

La résistance $R_{\text{sér}}$ équivalente à un ensemble de résistances R_k en série est

$$\boldsymbol{R_{\text{sér}} = \sum_k R_k}. \tag{OÉC-III.70}$$

La résistance R_{par} équivalente à un ensemble de résistance R_k en parallèle est donnée par

$$\boldsymbol{\frac{1}{R_{\text{par}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}}. \tag{OÉC-III.71}$$

De même, dans les deux cas, pour des bobines en remplaçant R par l'inductance L.

G. Régime sinusoïdal

1. Régimes transitoire et permanent

Considérons un circuit ne comportant que des générateurs, des résistors, des condensateurs et des bobines. Les f.é.m. des générateurs sont imposées et les résistances, capacités et inductances des différents composants sont constantes. Le but est de déterminer l'intensité du courant dans les différentes branches du circuit et la tension aux bornes des dipôles. Ces intensités et tensions sont reliées par un système d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (dépendant des résistances, capacités et inductances) et dont le second membre fait intervenir des combinaisons linéaires des f.é.m. des générateurs.

Considérons le cas d'un ***régime sinusoïdal***, c.-à-d. où ces f.é.m. sont sinusoïdales et ont toutes la même pulsation. On obtient le même genre de comportement que pour un oscillateur forcé sinusoïdalement :

- Lorsqu'on allume le circuit, le circuit est en ***régime transitoire***. Ce régime prend rapidement fin à cause des résistances, car celles-ci sont équivalentes à des forces de frottement ;
- On entre alors dans un ***régime permanent*** dans lequel les tensions aux bornes de tous les composants et les intensités dans ceux-ci sont sinusoïdales et de même pulsation que les générateurs. Seuls l'amplitude et le déphasage de ces quantités sont donc à déterminer.

Nous supposons dans la suite de cette section que le régime permanent est atteint.

Si ω est la pulsation des f.é.m., l'intensité (réelle) I traversant un dipôle prend la forme

$$I(t) = I_0 \cos(\omega\,t + \varphi_0), \tag{OÉC-III.72}$$

où I_0 est l'amplitude (> 0), $\varphi(t) = \omega\,t + \varphi_0$ est la phase à l'instant t et φ_0 est la phase à l'origine. Il est souvent plus commode de raisonner en nombres complexes : on a $\boldsymbol{I(t) = \mathrm{Re}\,\underline{I}(t)}$, où

$$\boldsymbol{\underline{I}(t) = I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t+\varphi_0)} = \underline{I}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}} \tag{OÉC-III.73}$$

est l'intensité en ***représentation complexe*** [※11] [※12] et

$$\boldsymbol{\underline{I}_0 = I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_0}} \tag{OÉC-III.74}$$

est l'***amplitude complexe***.

On obtient ainsi immédiatement que

$$\frac{\mathrm{d}\underline{I}(t)}{\mathrm{d}t} = (\mathrm{i}\,\omega\,\underline{I}_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t} = (\underline{I}_0\,\omega\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/2})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}. \tag{OÉC-III.75}$$

11. On peut aussi adopter la définition $\underline{I}(t) = \underline{I}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega\,t}$. La « représentation analytique d'un signal » permet de généraliser cette méthode à des fonctions non sinusoïdales (voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_signal`).
12. L'unité imaginaire est souvent notée « j » plutôt que « i » par les électroniciens pour éviter la confusion avec l'intensité lorsque celle-ci est représentée par « i ». Nous préférons ici noter « I » l'intensité et réserver le symbole « j » pour la densité volumique de courant.

Le facteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$ apparaissant dans tous les termes, il peut être simplifié. L'introduction des nombres complexes en régime sinusoïdal permanent permet donc de convertir le système d'équations différentielles en un système linéaire ordinaire indépendant du temps. Les intensités et tensions peuvent alors être obtenues par une simple inversion de matrice.

2. Impédances complexes

a. Impédances des résistances, bobines et capacités

On appelle ***impédance complexe*** le rapport (constant en régime sinusoïdal permanent)

$$\boldsymbol{Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}}. \qquad \text{(OÉC-III.76)}$$

Pour une résistance, $U = R\,I$, donc

$$\boldsymbol{Z_R = R}. \qquad \text{(OÉC-III.77)}$$

Pour une bobine, $U = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, soit

$$\underline{U}_0 = L\,(\mathrm{i}\,\omega\,\underline{I}_0), \qquad \text{(OÉC-III.78)}$$

donc

$$\boldsymbol{Z_L = \mathrm{i}\,\omega\,L}. \qquad \text{(OÉC-III.79)}$$

Pour un condensateur, $I = C\,\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$, soit

$$\underline{I}_0 = C\,(\mathrm{i}\,\omega\,\underline{U}_0), \qquad \text{(OÉC-III.80)}$$

donc

$$\boldsymbol{Z_C = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\,C}}. \qquad \text{(OÉC-III.81)}$$

b. Association d'impédances

Un ensemble de dipôles d'impédance Z_k en série est équivalent à un dipôle d'impédance

$$\boldsymbol{Z_{\text{sér}} = \sum_k Z_k}. \qquad \text{(OÉC-III.82)}$$

Le même ensemble de dipôles en parallèle est équivalent à un dipôle d'impédance Z_{par} donnée par

$$\boldsymbol{\frac{1}{Z_{\text{par}}} = \sum_k \frac{1}{Z_k}}. \qquad \text{(OÉC-III.83)}$$

3. Puissances

L'utilisation des nombres complexes ne pose pas de problème tant qu'on considère des combinaisons linéaires à coefficients réels de tensions et d'intensités. En effet, si λ_1 et λ_2 sont des réels et que $f_1 = \operatorname{Re}\underline{f_1}$ et $f_2 = \operatorname{Re}\underline{f_2}$, alors

$$\lambda_1\,f_1 + \lambda_2\,f_2 = \lambda_1\operatorname{Re}\underline{f_1} + \lambda_2\operatorname{Re}\underline{f_2} = \operatorname{Re}(\lambda_1\,\underline{f_1} + \lambda_2\,\underline{f_2}). \qquad \text{(OÉC-III.84)}$$

En revanche, en général,

$$f_1\,f_2 \neq \operatorname{Re}(\underline{f_1}\,\underline{f_2}). \qquad \text{(OÉC-III.85)}$$

On n'a donc pas $\underline{\mathcal{P}} = \underline{U}\,\underline{I}$. Pour une tension $U = U_0\cos(\omega\,t + \varphi_U)$ et une intensité $I = I_0\cos(\omega\,t + \varphi_I)$, la puissance instantanée reçue vaut

$$\mathcal{P}(t) = U_0\,I_0\,\frac{\cos(2\,\omega\,t + \varphi_U + \varphi_I) + \cos(\varphi_U - \varphi_I)}{2}, \qquad \text{(OÉC-III.86)}$$

car $\cos a\cos b = (\cos[a+b] + \cos[a-b])/2$. La puissance instantanée est de pulsation $2\,\omega$. Sa valeur moyenne sur une période ou sur un temps suffisamment long vaut

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{U_0\,I_0\cos(\varphi_U - \varphi_I)}{2} = \operatorname{Re}\!\left(\frac{U_0\,I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\varphi_U - \varphi_I)}}{2}\right) = \operatorname{Re}\!\left(\frac{\underline{U}\,\underline{I}^*}{2}\right), \qquad \text{(OÉC-III.87)}$$

où $\underline{I}^* = I_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(\omega\,t + \varphi_I)}$ désigne la quantité conjuguée de $\underline{I}$. En notation complexe, la puissance moyenne reçue vaut donc

$$\boldsymbol{\langle\mathcal{P}\rangle = \operatorname{Re}\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle, \quad \text{où } \langle\underline{\mathcal{P}}\rangle = \frac{\underline{U}\,\underline{I}^*}{2}}. \qquad \text{(OÉC-III.88)}$$

Pour une bobine ou un condensateur, $\underline{U}\,\underline{I}^*$ est un nombre imaginaire, donc **la puissance (réelle) moyenne** $\langle\mathcal{P}\rangle$ **reçue en régime sinusoïdal permanent est nulle. Pour une résistance,**

$$\langle\underline{\mathcal{P}}\rangle = \frac{R\,\underline{I}\,\underline{I}^*}{2} = \frac{R\,|\underline{I}|^2}{2} = \langle\mathcal{P}\rangle > 0. \qquad \text{(OÉC-III.89)}$$

4. Filtrage

Un ***filtre*** électronique est un dispositif qui reçoit un signal électrique temporel en entrée, l'***excitation***, et fournit en sortie un signal, la ***réponse***, dont certaines fréquences sont atténuées ou au contraire amplifiées. Le filtre est caractérisé par sa ***fonction de transfert*** complexe, H. Pour un signal d'entrée $\underline{U}_\mathrm{e}(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{U}_{\mathrm{e},0}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega$ et un signal de sortie $\underline{U}_\mathrm{s}(t) = \int_{\omega=0}^{\infty} \underline{U}_{\mathrm{s},0}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega$, tous deux donnés en représentation complexe, la fonction de transfert[※13] est définie par

$$\boldsymbol{H(\omega) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{s},0}(\omega)}{\underline{U}_{\mathrm{e},0}(\omega)}}. \qquad \text{(OÉC-III.90)}$$

On appelle ***gain*** la quantité

$$\boldsymbol{G(\omega) = |H|(\omega)}. \qquad \text{(OÉC-III.91)}$$

On l'exprime souvent en ***décibels*** (unité sans dimension notée « dB ») :

$$\boldsymbol{G_\mathrm{dB}(\omega) = 20\log_{10} G(\omega)}. \qquad \text{(OÉC-III.92)}$$

La représentation de G_dB en fonction de $\log_{10}\omega$[※14] s'appelle un ***diagramme de Bode***.

L'autre quantité que l'on peut extraire de H est le ***déphasage*** du signal de sortie par rapport au signal d'entrée, donné par l'argument principal de H, c.-à-d. (si $H(\omega) \neq 0$) **l'unique nombre $\varphi_0(\omega)$ dans $]-\pi,\pi]$ tel que**

$$\boldsymbol{H(\omega) = G(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_0(\omega)}}. \qquad \text{(OÉC-III.93)}$$

Pour des signaux d'entrée et de sortie de phases respectives $\varphi_\mathrm{e}(t) = \omega\,t + \varphi_{\mathrm{e},0}$ et $\varphi_\mathrm{s}(t') = \omega\,t' + \varphi_{\mathrm{s},0}$, on a $\varphi_0 = \varphi_{\mathrm{s},0} - \varphi_{\mathrm{e},0}$ (avec $\pm 2\,\pi$ si nécessaire pour que φ_0 soit dans $]-\pi,\pi]$). Les phases sont égales pour $t' = t - \varphi_0/\omega$. Si $\varphi_0 > 0$ (resp. < 0), $t' < t$ et le signal de sortie est en avance (resp. en retard) par rapport au signal d'entrée. Les deux signaux sont dits ***en phase*** quand $\varphi_0 = 0$; ***en opposition de phase*** quand $\varphi_0 = \pi$; ***en quadrature de phase*** quand $\varphi_0 = \pm\pi/2$.

Les filtres idéaux les plus simples sont les suivants :

- **filtre passe-bas (ou coupe-haut)** : ne laisse passer que les basses fréquences ;
- **filtre passe-haut (ou coupe-bas)** : ne laisse passer que les hautes fréquences ;
- **filtre passe-bande** : ne laisse passer que les fréquences contenues dans un certain intervalle ;
- **filtre coupe-bande** : ne laisse passer que les fréquences hors d'un certain intervalle.

Les filtres réels se contentent d'atténuer le signal. Nous allons en présenter quelques-uns.

a. Filtres passe-bas et passe-haut

Considérons un circuit électrique, alimenté par un générateur de tension $\underline{U}_\mathrm{e}(t)$ et constitué d'une résistance R et d'un condensateur C en série. Pour chaque pulsation ω, on a $\underline{U}_{\mathrm{e},0} = \underline{U}_{R,0} + \underline{U}_{C,0}$ avec $\underline{U}_{R,0} = R\,\underline{I}_0$ et $\underline{U}_{C,0} = \underline{I}_0/(\mathrm{i}\,\omega\,C)$, d'où

$$\underline{U}_{R,0} = \underline{U}_{\mathrm{e},0}\,\frac{\mathrm{i}\,\omega\,R\,C}{1 + \mathrm{i}\,\omega\,R\,C} \quad \text{et} \quad \underline{U}_{C,0} = \underline{U}_{\mathrm{e},0}\,\frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega\,R\,C}. \qquad \text{(OÉC-III.94)}$$

Prenons comme sortie la tension au bornes du condensateur. On a

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega\,R\,C}, \qquad \text{(OÉC-III.95)}$$

donc

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\,R\,C)^2}}. \qquad \text{(OÉC-III.96)}$$

La fonction G vaut 1 en $\omega = 0$ et décroît en tendant vers 0 quand $\omega \to \infty$. Il s'agit donc d'un filtre passe-bas. On peut caractériser celui-ci par sa ***pulsation de coupure*** ω_c, définie par

$$\boldsymbol{G(\omega_\mathrm{c}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\max_{\omega\geqslant 0} G(\omega)}. \qquad \text{(OÉC-III.97)}$$

13. Les électroniciens l'écrivent souvent « $\underline{H}(\omega)$ », voire « $\underline{H}(\mathrm{i}\,\omega)$ », pour souligner que H est une fonction à valeurs complexes et que ω n'apparaît dans son expression, du fait des dérivations et intégrations par rapport au temps, que sous la forme de puissances entières de $\mathrm{i}\,\omega$.
14. Plus précisément, l'argument d'un logarithme devant être sans dimension, ω doit être divisé par une pulsation quelconque dans cette expression, par exemple $2\,\pi$ rad/s.

On obtient ici $\omega_c = 1/(R\,C)$. En décibels, on a

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega_c) = \max_{\omega \geqslant 0} G_{\mathrm{dB}}(\omega) - 3\,\mathrm{dB}. \tag{OÉC-III.98}$$

En effet, $\log_{10} 2 \approx 0{,}3$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega_c = 20\log_{10}(1/\sqrt{2}) = 20 \times (-1/2)\log_{10} 2$.

On obtient le déphasage en multipliant H par la quantité conjuguée :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,\omega/\omega_c} = \frac{1 - \mathrm{i}\,\omega/\omega_c}{1 + (\omega/\omega_c)^2} = G(\omega)\,\frac{1 - \mathrm{i}\,\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}, \tag{OÉC-III.99}$$

donc

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sin\varphi_0 = -\frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \leqslant 0, \tag{OÉC-III.100}$$

c.-à-d. $\varphi_0 \in [-\pi/2, 0]$ et $\varphi_0 = -\arctan(\omega/\omega_c)$. Ce déphasage vaut 0 en $\omega = 0$, tend en décroissant vers $-\pi/2$ quand $\omega \to \infty$ et prend la valeur $-\pi/4$ en ω_c.

Si l'on remplace le condensateur par une bobine d'inductance L, on obtient un filtre passe-haut. On obtient aussi un filtre passe-haut dans le circuit RC en prenant la tension au bornes de la résistance comme signal de sortie.

b. Filtre passe-bande

On obtient un filtre passe-bande en prenant en sortie la tension aux bornes de la résistance d'un circuit RLC en série alimenté par une tension $\underline{U}_e(t)$. Pour chaque pulsation ω, on a $\underline{U}_{e,0} = \underline{U}_{R,0} + \underline{U}_{L,0} + \underline{U}_{C,0}$ avec $\underline{U}_{R,0} = R\,\underline{I}_0$, $\underline{U}_{L,0} = \mathrm{i}\,\omega\,L\,\underline{I}_0$ et $\underline{U}_{C,0} = \underline{I}_0/(\mathrm{i}\,\omega\,C)$, d'où

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,(\omega\,L/R - 1/[\omega\,R\,C])}. \tag{OÉC-III.101}$$

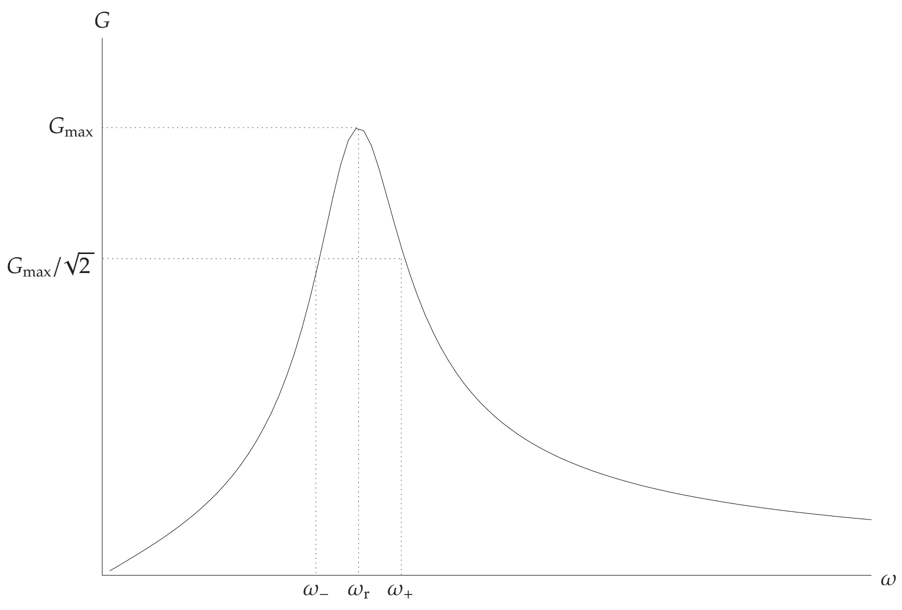
On en déduit que

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\,L/R - 1/[\omega\,R\,C])^2}}. \tag{OÉC-III.102}$$

Le module vaut 0 en $\omega = 0$, croît pour atteindre la valeur 1 en

$$\omega_r = 1/\sqrt{L\,C} \tag{OÉC-III.103}$$

et décroît ensuite vers 0 quand $\omega \to \infty$. Le système ne répond de manière importante à l'excitation à laquelle il est soumis que dans un certain intervalle de fréquences. Un tel phénomène s'appelle une ***résonance*** et la pulsation pour laquelle le pic est atteint (ici, ω_r) est la ***pulsation de résonance*** ※[15].



15. Ce phénomène de résonance pour des fréquences dans $]0, \infty[$ peut aussi être observé, sous certaines conditions sur R, L et C, en prenant comme signal de sortie la tension aux bornes soit de la capacité, soit de la bobine. La pulsation de résonance est alors inférieure à ω_r pour la capacité et supérieure à ω_r pour la bobine. Dans les deux cas, G est supérieur à 1 à la résonance : il y a donc amplification du signal.

Les pulsations de coupure sont obtenues pour $(\omega\,L/R - 1/[\omega\,R\,C])^2 = 1$, soit

$$\omega^2 \pm \frac{R}{L}\,\omega - \omega_c^2 = 0, \tag{OÉC-III.104}$$

donc

$$\omega = \pm\,\frac{R}{2\,L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4\,L^2} + \omega_r^2}\,, \tag{OÉC-III.105}$$

où les deux « ± » sont indépendants. La pulsation doit être positive, donc il n'y a que deux pulsations de coupure,

$$\omega_- = -\,\frac{R}{2\,L} + \sqrt{\frac{R^2}{4\,L^2} + \omega_r^2} \quad \text{et} \quad \omega_+ = +\,\frac{R}{2\,L} + \sqrt{\frac{R^2}{4\,L^2} + \omega_r^2}\,. \tag{OÉC-III.106}$$

L'intervalle $[\omega_-, \omega_+]$ constitue la ***bande passante*** du filtre et $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ est sa ***largeur***.

Un filtre passe-bande est caractérisé par son ***facteur de qualité***,

$$\boldsymbol{Q = \omega_r/\Delta\omega}. \tag{OÉC-III.107}$$

Plus celui-ci est grand, plus la bande passante est étroite et piquée, donc plus le filtre est sélectif. Dans le cas où le signal de sortie est la tension aux bornes de la résistance du circuit RLC en série, $Q = \sqrt{L/C}/R$.

Intéressons-nous maintenant à la phase de H. On a

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{i}\,Q\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)} = G(\omega)\,\frac{1 - \mathrm{i}\,Q\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)}{\sqrt{1 + Q^2\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)^2}}\,, \tag{OÉC-III.108}$$

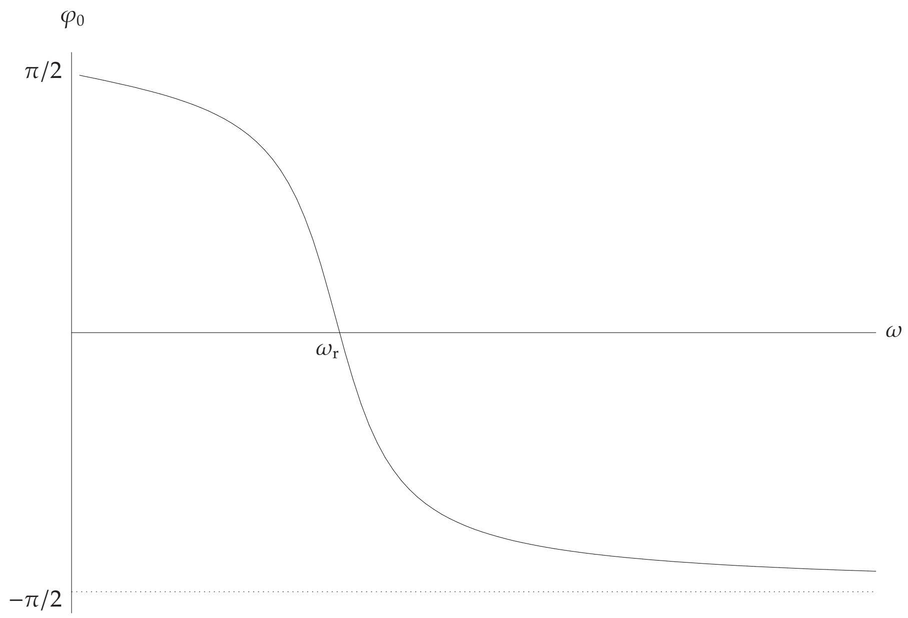
donc

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \sin\varphi_0 = -\,\frac{Q\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)}{\sqrt{1 + Q^2\,(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)^2}}\,. \tag{OÉC-III.109}$$

Comme $\cos\varphi_0 \geqslant 0$,

$$\varphi_0 = -\arctan(Q\,[\omega/\omega_r - \omega_r/\omega]). \tag{OÉC-III.110}$$

Le déphasage φ_0 vaut $+\pi/2$ quand $\omega \to 0$, croît en tendant vers $-\pi/2$ quand $\omega \to \infty$ et est nul en ω_r.



Si on prend comme signal de sortie la tension aux bornes de l'ensemble LC, on obtient un filtre coupe-bande.

H. AC/DC. Valeurs efficaces et crête à crête

1. Définitions

Les oscilloscopes et les multimètres proposent deux modes de visualisation des tensions ou d'affichage de leurs valeurs : le ***mode DC*** (de l'anglais « *direct current* ») et le ***mode AC*** (de l'anglais « *alternative current* »). En mode DC, le signal brut $f(t)$ est utilisé ; en mode AC, les composantes à basse fréquence sont éliminées, ce qui revient à retrancher la moyenne $\langle f\rangle$ du signal, moyenne évaluée sur une durée suffisamment longue :

$$\boldsymbol{f^{\mathrm{DC}}(t) = f(t)\,;} \tag{OÉC-III.111}$$

$$\boldsymbol{f^{\mathrm{AC}}(t) = f(t) - \langle f\rangle.} \tag{OÉC-III.112}$$

Les appareils fournissent notamment l'amplitude crête à crête et la valeur efficace. L'***amplitude crête à crête*** est définie par

$$\boldsymbol{f_{\text{c-c}} = \max f(t) - \min f(t),} \tag{OÉC-III.113}$$

où le maximum et le minimum sont évalués sur une durée suffisamment longue. On voit immédiatement que $f^{\mathrm{AC}}_{\text{c-c}} = f^{\mathrm{DC}}_{\text{c-c}}$.

L'amplitude crête à crête est sensible au bruit et il est souvent préférable d'utiliser la ***valeur efficace***,

$$\boldsymbol{f_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\langle f^2\rangle}\,,} \tag{OÉC-III.114}$$

où la moyenne se fait sur une durée suffisamment longue. Pour une résistance, cette valeur est proportionnelle à la puissance dissipée moyenne.

2. Cas d'un signal de la forme « sinusoïde + constante »

Intéressons-nous en particulier à un signal de la forme

$$f(t) = A\cos(\omega\,t + \varphi_0) + K. \tag{OÉC-III.115}$$

On a alors $f_{\text{c-c}} = (A + K) - (-A + K) = 2\,A$, soit le double de l'amplitude (au sens usuel) du terme sinusoïdal.

Le signal étant périodique, on peut calculer sa moyenne sur une période $T = 2\,\pi/\omega$:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\Big(A\cos[\omega\,t + \varphi_0] + K\Big)\,\mathrm{d}t = K, \tag{OÉC-III.116}$$

donc $f^{\mathrm{AC}}(t) = A\cos(\omega\,t + \varphi_0)$. On a par ailleurs

$$\langle f^2\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} A^2\cos^2(\omega\,t + \varphi_0)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} 2\,A\cos(\omega\,t + \varphi_0)\,K\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} K^2\,\mathrm{d}t \tag{OÉC-III.117}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{A^2}{2}\Big(1 + \cos[2\,(\omega\,t + \varphi_0)]\Big)\,\mathrm{d}t + 0 + K^2 \tag{OÉC-III.118}$$

(car $\cos(2\,x) = 2\cos^2 x - 1$ et la moyenne de $\cos(\omega\,t + \varphi_0)$ est nulle sur une période), soit

$$\langle f^2\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T}\frac{A^2\,T}{2} + K^2 = \frac{A^2}{2} + K^2, \tag{OÉC-III.119}$$

donc, pour un signal de la forme OÉC-III.115,

$$\boldsymbol{f^{\mathrm{DC}}_{\mathrm{eff}} = \sqrt{A^2/2 + K^2}\,,} \tag{OÉC-III.120}$$

$$\boldsymbol{f^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\,.} \tag{OÉC-III.121}$$