

# Chapitre OÉC-II

## Ondes mécaniques

### A. Cordes vibrantes

Nous étudions dans cette section la propagation des ondes sur une corde tendue. Établissons d'abord l'équation d'onde qui les décrit.

#### 1. Équation d'onde

Nous adoptons les hypothèses et notations suivantes :

- La corde est tendue entre deux points fixes distants de  $L$ . On notera  $Ox$  l'axe selon lequel la corde est tendue lorsqu'elle est au repos ;
- La corde est souple, sans rigidité. Ceci signifie qu'elle peut être pliée sans effort. En pratique, il faut pour cela qu'elle soit mince. En conséquence, la force de tension est tangente à la corde en tout point de celle-ci ;
- La corde est homogène. Sa masse linéique  $\mu$  est donc identique en tout point de la corde. En notant  $m$  la masse totale de la corde, on a donc  $\mu = m/L$  ;
- La corde vibre dans le plan  $Oxy$  et un point de la corde ne se déplace que selon  $\vec{u}_y$  ;
- Le déplacement  $y(x, t)$  de chaque point de la corde est faible. La corde étant tendue, l'angle entre la tangente à la corde (donc aussi la force de tension) et l'axe  $Ox$  est faible également ;
- La gravité est négligeable devant la tension de la corde.

Appelons  $\vec{F}(x, t)$  la force de tension exercée, à l'instant  $t$ , au point d'abscisse  $x$  sur la portion de corde située aux abscisses  $x' \leq x$  par la portion située en  $x' > x$ . Considérons un élément de corde compris entre le point  $M$ , d'abscisse  $x$ , et le point  $N$  voisin, d'abscisse  $x + dx$ . Les forces extérieures exercées sur l'élément  $MN$  sont  $\vec{F}(x + dx, t)$  en  $N$  et  $-\vec{F}(x, t)$  en  $M$ . En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à  $MN$ , de masse  $dm$ , on obtient

$$dm \vec{a} = \vec{F}(x + dx, t) - \vec{F}(x, t), \quad (\text{OÉC-II.1})$$

soit, en projetant,

$$dm a_x = F_x(x + dx, t) - F_x(x, t), \quad (\text{OÉC-II.2})$$

$$dm a_y = F_y(x + dx, t) - F_y(x, t). \quad (\text{OÉC-II.3})$$

Par hypothèse,  $a_x = 0$ , donc  $F_x$  ne dépend pas de  $x$ .

Au premier ordre,  $F_y(x + dx, t) \approx F_y(x, t) + (\partial F_y / \partial x) dx$ , donc

$$dm a_y = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx. \quad (\text{OÉC-II.4})$$

Comme  $dm = \mu dx$  et que  $a_y = \partial^2 y / \partial t^2$ , on obtient en simplifiant par  $dx$  que

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (\text{OÉC-II.5})$$

Par ailleurs,  $\vec{F}$  est tangent à la courbe, donc

$$F_y = F_x \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (\text{OÉC-II.6})$$

d'où

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (\text{OÉC-II.7})$$

puisque  $F_x$  ne dépend pas de  $x$ .

Enfin,

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = |F_x| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx F_x, \quad (\text{OÉC-II.8})$$

puisque  $|\partial y/\partial x| \ll 1$  et qu'on doit avoir  $F_x > 0$  pour que la corde soit tendue. En notant  $F$  la norme de  $\vec{F}$ , on obtient donc

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (\text{OÉC-II.9})$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert à une dimension pour  $y(x, t)$  en posant

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (\text{OÉC-II.10})$$

Cette équation a justement été établie pour la première fois par Jean Le Rond d'Alembert, en 1747.

On en connaît déjà la solution générale :

$$y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct), \quad (\text{OÉC-II.11})$$

où  $y_+$  et  $y_-$  sont des ondes progressives transversales se propageant, à la célérité  $c$  sans se déformer, respectivement vers les  $x$  croissants et décroissants.

En appliquant les opérateurs  $\partial/\partial t$  et  $F\partial/\partial x$  à l'équation OÉC-II.9, on obtient la même équation pour les variables  $v_y$  et  $F_y$  au lieu de  $y$ .

## 2. Relation entre la tension et la vitesse vibrationnelle

La vitesse vibrationnelle est la vitesse  $\vec{v}$  de déplacement d'un point du milieu (à bien distinguer de la célérité  $c$  de l'onde). Ici,  $\vec{v} = v_y \vec{u}_y$  avec  $v_y = \partial y/\partial t$ .

Pour l'onde progressive  $y_+$  vers les  $x$  croissants,

$$\frac{\partial y_+}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial y_+}{\partial t} = -\frac{v_{y,+}}{c}. \quad (\text{OÉC-II.12})$$

Par ailleurs,  $F_y = F_x \partial y/\partial x$ , donc

$$F_y \approx F \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (\text{OÉC-II.13})$$

donc

$$F_{y,+} = -Z v_{y,+}, \quad (\text{OÉC-II.14})$$

où

$$Z := \frac{F}{c} \quad (\text{OÉC-II.15})$$

est une constante positive portant le nom d'**impédance de la corde**.

Pour une onde progressive  $y_-$  vers les  $x$  décroissants,

$$\frac{\partial y_-}{\partial x} = +\frac{1}{c} \frac{\partial y_-}{\partial t} = +\frac{v_{y,-}}{c}, \quad (\text{OÉC-II.16})$$

donc

$$F_{y,-} = +Z v_{y,-}. \quad (\text{OÉC-II.17})$$

Remarquer qu'on obtient la même relation en introduisant la tension  $F_{y,\uparrow}$  exercée par l'«aval», là où va l'onde progressive, sur l'«amont», là d'où elle vient. Pour  $y_+$ ,  $F_{y,\uparrow} = F_{y,+}$ , mais pour  $y_-$ ,  $F_{y,\uparrow} = -F_{y,-}$ . Dans les deux cas,

$$F_{y,\uparrow} = -Z v_{y,\pm}. \quad (\text{OÉC-II.18})$$

Dans le cas général où  $y = y_+ + y_-$ , on a  $F_y = F_{y,+} + F_{y,-}$ , donc

$$F_y = -Z (v_{y,+} - v_{y,-}). \quad (\text{OÉC-II.19})$$

### 3. Aspects énergétiques

#### a. Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue à l'instant  $t$  par la portion de corde située aux abscisses  $x' \geq x$  de la part de la portion aux abscisses  $x' < x$  est

$$\mathcal{P}(x, t) = -\vec{F}(x, t) \cdot \vec{v}(x, t) = -(F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y) \cdot v_y \vec{u}_y = -F_y v_y, \quad (\text{OÉC-II.20})$$

soit

$$\mathcal{P} = Z (v_{y,+}^2 - v_{y,-}^2). \quad (\text{OÉC-II.21})$$

Chacune des ondes progressives  $y_+$  et  $y_-$  transporte donc une puissance positive dans le sens de propagation de l'onde : une puissance  $\mathcal{P}_+ = Z v_{y,+}^2$  vers les  $x$  croissants pour  $y_+$  ; une puissance  $-\mathcal{P}_- = -Z v_{y,-}^2$  vers les  $x$  croissants pour  $y_-$ , soit une puissance  $\mathcal{P}_- = Z v_{y,-}^2$  vers les  $x$  décroissants.

#### b. Puissance moyenne d'une onde sinusoïdale

Intéressons-nous en particulier au cas d'une onde progressive sinusoïdale,

$$y_{\sin}(x, t) = A \cos(\omega t - k_x x + \phi). \quad (\text{OÉC-II.22})$$

On a

$$v_{y,\sin}(x, t) = -\omega A \sin(\omega t - k_x x + \phi), \quad (\text{OÉC-II.23})$$

donc

$$\mathcal{P}_{\sin}(x, t) = Z \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - k_x x + \phi). \quad (\text{OÉC-II.24})$$

La moyenne de la fonction  $x \mapsto \sin^2 x$  valant 1/2 (cf. § Compl-A), la moyenne temporelle de la puissance d'une onde progressive sinusoïdale vaut

$$\langle \mathcal{P}_{\sin} \rangle_t = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} \mathcal{P}_{\sin}(x, t') dt' = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2, \quad (\text{OÉC-II.25})$$

indépendamment de  $t$  et de  $x$ .

## B. Ondes sonores

### 1. Équation d'onde à une dimension

On s'intéresse ici aux ondes sonores (on dit aussi « acoustiques ») se propageant dans un fluide contenu dans un tuyau d'axe  $Ox$  et de section  $S$  constante. Pour traiter le problème, on va faire les hypothèses suivantes :

- Les différents champs ne dépendent que de la seule coordonnée spatiale,  $x$  ;
- Le fluide est non visqueux : la seule force interne à considérer est donc celle résultant de la pression ;
- Les perturbations du milieu sont de faible ampleur et les vitesses de vibration sont faibles ;
- La pesanteur est négligeable.

Considérons un élément de fluide compris entre les surfaces d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ . La force extérieure exercée sur l'élément au niveau de la surface en  $x$  vaut  $p(x) S \vec{u}_x$ , où  $p$  est la pression totale dans le fluide ; celle exercée en  $x + dx$  vaut  $-p(x + dx) S \vec{u}_x$ .

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à l'élément de fluide, on obtient

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = (p[x] - p[x + dx]) S \vec{u}_x. \quad (\text{OÉC-II.26})$$

Comme  $dm = \rho S dx$ , où  $\rho$  est la masse volumique du fluide, et que  $\vec{v} = v(x, t) \vec{u}_x$ , on obtient en faisant un développement limité de  $p(x + dx)$  au premier ordre et en simplifiant par  $dx$  et  $S$  que

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{OÉC-II.27})$$

Enfin,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (\text{OÉC-II.28})$$

car le terme advectif  $v \partial v / \partial x$  est négligeable devant le terme  $\partial v / \partial t$  d'après l'hypothèse que la vitesse vibrationnelle est faible.

On en déduit que

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{OÉC-II.29})$$

La dérivée  $\partial p/\partial x$  peut être calculée à partir de la compressibilité du milieu,

$$\chi = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (\text{OÉC-II.30})$$

où  $V$  est le volume considéré. Pour l'élément de volume au repos entre  $x$  et  $x + dx$  et dont les faces se déplacent respectivement en  $x + \psi(x, t)$  et  $x + dx + \psi(x + dx, t)$ , le volume au repos vaut

$$V = ([x + dx] - x) S = S dx \quad (\text{OÉC-II.31})$$

et le volume perturbé,

$$V + \delta V = ([x + dx + \psi(x + dx, t)] - [x + \psi(x, t)]) S = S dx + (\psi[x + dx, t] - \psi[x, t]) S. \quad (\text{OÉC-II.32})$$

La variation de volume est donc

$$\delta V = (\psi[x + dx, t] - \psi[x, t]) S \approx S \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \quad (\text{OÉC-II.33})$$

Une pression  $\hat{p}$  uniforme (indépendante de la position) règne au repos dans le milieu. Quand l'onde le traverse, la pression devient  $p = \hat{p} + \delta p$ , où  $\delta p$  est la **surpression** (ou **pression acoustique**). On a donc

$$\begin{aligned} \chi &= - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial (\hat{p} + \delta p)} = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \delta p} \approx - \frac{1}{V} \frac{\delta V}{\delta p} \\ &= - \frac{1}{S dx} \frac{S (\partial \psi / \partial x) dx}{\delta p} = - \frac{1}{\delta p} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{OÉC-II.34})$$

soit

$$\delta p = - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{OÉC-II.35})$$

Comme

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{OÉC-II.36})$$

que  $v = \partial \psi / \partial t$ , que  $p = \hat{p} + p$ , que  $\partial \hat{p} / \partial x = 0$  et que  $\chi$  ne dépend pas de  $x$ , on obtient

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = + \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (\text{OÉC-II.37})$$

Le champ  $\psi$  obéit donc à l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \chi \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (\text{OÉC-II.38})$$

dont la solution est de la forme

$$\psi(x, t) = \psi_+(x - ct) + \psi_-(x + ct), \quad (\text{OÉC-II.39})$$

où  $\psi_+$  et  $\psi_-$  sont des ondes progressives vers les  $x$  croissants et décroissants, respectivement, de célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho}}. \quad (\text{OÉC-II.40})$$

Ces ondes sont longitudinales puisque le déplacement  $\psi$  est parallèle à la direction de propagation  $x$ .

En appliquant les opérateurs  $\partial/\partial t$  et  $(-1/\chi)\partial/\partial x$  à l'équation OÉC-II.38, on obtient la même équation pour les variables  $v$  et  $\delta p$  au lieu de  $\psi$ .

## 2. Compressibilité d'un gaz parfait

La compressibilité  $\chi$  se calcule aisément dans le cas où le fluide où se propage l'onde est un gaz parfait. Il faut cependant préciser le type de transformation subie par l'élément de volume quand l'onde le parcourt. On distingue notamment deux cas :

- Transformation isotherme à une température  $T$  constante dans le gaz :  $\chi = \chi_T$ . Il faut pour cela que le volume ait le temps d'échanger de la chaleur avec l'extérieur ;
- Transformation adiabatique :  $\chi = \chi_s$ .

Or le temps de traversée de l'élément par l'onde est bien inférieur au temps caractéristique d'échange de chaleur avec l'extérieur au volume. La température de l'élément ne peut donc être maintenue constante et

la transformation est quasi adiabatique. Par ailleurs, le passage de l'onde ne provoque pas de changement irréversible du milieu, donc l'entropie est conservée (d'où le « S » en indice de  $\chi$ ). Enfin, la perturbation étant de faible ampleur, on peut considérer que la transformation est quasi statique. On peut donc appliquer la loi de Laplace,  $pV^\gamma = c^{\text{te}}$ , à l'élément de volume, où  $\gamma = C_p/C_V$  et  $C_p$  et  $C_V$  sont, respectivement, les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Différencions la relation  $pV^\gamma = c^{\text{te}}$ . On obtient

$$dpV^\gamma + \gamma pV^{\gamma-1}dV = 0, \quad (\text{OÉC-II.41})$$

soit

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\gamma p}. \quad (\text{OÉC-II.42})$$

En utilisant la loi des gaz parfaits,  $pV = nRT$ , où  $n$  est le nombre de moles dans le volume  $V$ , et en écrivant que  $n = m/M$ , où  $m = \rho V$  est la masse de l'élément et  $M$  la masse molaire du gaz, on obtient

$$\chi_s = \frac{V}{\gamma nRT} = \frac{M}{\gamma \rho RT}. \quad (\text{OÉC-II.43})$$

La célérité du son est donc donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (\text{OÉC-II.44})$$

Pour l'air, composé à 80 % de  $N_2$  (28 g/mol) et à 20 % d' $O_2$  (32 g/mol),  $M = (0,8 \times 28 + 0,2 \times 32)$  g/mol =  $28,8 \times 10^{-3}$  kg/mol. Ces deux gaz sont diatomiques, donc, aux températures usuelles,  $\gamma = 7/5$ . À  $T = 20^\circ\text{C} = 293$  K,

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,32 \times 293}{28,8 \times 10^{-3}}} = 344 \text{ m/s}, \quad (\text{OÉC-II.45})$$

un résultat très proche de la valeur expérimentale.

La célérité des ondes acoustiques est supérieure dans les liquides (1500 m/s dans l'eau) et les solides (plusieurs km/s ; il y a aussi des ondes transversales, mais celles-ci sont plus lentes que les ondes longitudinales).

### 3. Relation entre surpression et vitesse vibrationnelle

La vitesse vibrationnelle  $\vec{v}$  de déplacement d'un point du milieu vaut ici  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  avec  $v = \partial\psi/\partial t$ .

Pour l'onde progressive  $\psi_+$  vers les  $x$  croissants,

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial\psi_+}{\partial t} = -\frac{v_+}{c}. \quad (\text{OÉC-II.46})$$

La force due à la surpression exercée par la partie du milieu située aux abscisses  $x' > x$  sur la partie  $x' \leq x$  vaut  $F(x, t)\vec{u}_x$  avec

$$F(x, t) = -S\delta p(x, t) = \frac{S}{\chi} \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{S}{\chi c} v_+, \quad (\text{OÉC-II.47})$$

donc

$$F_+ = -Zv_+, \quad (\text{OÉC-II.48})$$

où

$$Z := \frac{S}{\chi c} \quad (\text{OÉC-II.49})$$

est une constante positive portant le nom d'**impédance du tuyau**.

Pour une onde progressive  $\psi_-$  vers les  $x$  décroissants,

$$\frac{\partial\psi_-}{\partial x} = +\frac{1}{c} \frac{\partial\psi_-}{\partial t} = +\frac{v_-}{c}, \quad (\text{OÉC-II.50})$$

donc

$$F_- = +Zv_-. \quad (\text{OÉC-II.51})$$

Comme pour la corde vibrante, on obtient une relation générale en introduisant la force  $F_\uparrow$  exercée par l'« aval », là où va l'onde progressive, sur l'« amont », là d'où elle vient. Pour  $\psi_+$ ,  $F_\uparrow = F_+$ , mais pour  $\psi_-$ ,  $F_\uparrow = -F_-$ . Dans les deux cas,

$$F_\uparrow = -Zv_\pm. \quad (\text{OÉC-II.52})$$

Dans le cas général où  $\psi = \psi_+ + \psi_-$ , on a  $F = F_+ + F_-$ , donc

$$F = -Z(v_+ - v_-). \quad (\text{OÉC-II.53})$$

On définit aussi l'*impédance caractéristique* par

$$z = \frac{Z}{S} = \frac{1}{\chi c}. \quad (\text{OÉC-II.54})$$

De  $F = -\delta p S$ , on déduit que

$$\delta p = z (v_+ - v_-). \quad (\text{OÉC-II.55})$$

## 4. Aspects énergétiques

### a. Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue à l'instant  $t$ , du fait de la surpression, par l'air dans la portion de tuyau située aux abscisses  $x' \geq x$  de la part de la portion aux abscisses  $x' < x$  est

$$\mathcal{P}(x, t) = \delta p(x, t) S \vec{u}_x \cdot \vec{v}(x, t) = \delta p S v = Z (v_+^2 - v_-^2). \quad (\text{OÉC-II.56})$$

Comme pour la corde vibrante, chacune des ondes progressives  $\psi_+$  et  $\psi_-$  transporte donc une puissance positive dans le sens de propagation de l'onde : une puissance  $\mathcal{P}_+ = Z v_+^2$  vers les  $x$  croissants pour  $\psi_+$  ; une puissance  $-Z v_-^2$  vers les  $x$  croissants pour  $\psi_-$ , soit une puissance  $\mathcal{P}_- = Z v_-^2$  vers les  $x$  décroissants.

### b. Cas d'une onde progressive sinusoïdale

Pour une onde progressive sinusoïdale,

$$\psi_{\sin}(x, t) = A \cos(\omega t - k_x x + \hat{\phi}), \quad (\text{OÉC-II.57})$$

et on a de la même manière

$$\mathcal{P}_{\sin}(x, t) = Z \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - k_x x + \hat{\phi}) \quad (\text{OÉC-II.58})$$

et

$$\langle \mathcal{P}_{\sin} \rangle_t = \frac{1}{2} Z \omega^2 A^2, \quad (\text{OÉC-II.59})$$

indépendamment de  $t$  et de  $x$ .

### c. Intensité acoustique et niveau sonore

On appelle *intensité acoustique* la quantité

$$I = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle_t}{S}. \quad (\text{OÉC-II.60})$$

Pour une onde progressive sinusoïdale,

$$I_{\sin} = \frac{1}{2} z \omega^2 A^2. \quad (\text{OÉC-II.61})$$

L'intensité acoustique s'exprime en  $\text{W}/\text{m}^2$  dans le système international. On utilise fréquemment à la place le *niveau d'intensité acoustique en décibels (dB)*, défini par rapport à l'*intensité de référence*  $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$  par

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}. \quad (\text{OÉC-II.62})$$

Pour une oreille normale, le seuil d'audibilité décroît de 70 dB vers 30 Hz à 10 dB vers 2 kHz et remonte à 50 dB vers 20 kHz. Le seuil de douleur est d'environ 120 dB sur tout l'intervalle de fréquence.

L'amplitude de déplacement d'une onde acoustique est extrêmement faible : à une fréquence de 1000 Hz,  $A \approx 10^{-10} \text{ m}$  pour un niveau sonore de 20 dB.

## 5. Ondes à trois dimensions. Ondes sphériques

D'une manière plus générale que dans les tuyaux, la surpression dans un fluide obéit à l'équation de d'Alembert à trois dimensions,

$$\Delta \delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{OÉC-II.63})$$

avec  $c = 1/\sqrt{\chi \rho}$ . Cette équation admet notamment des solutions sphériques de la forme

$$\delta p(r, t) = \frac{f_+(r - ct)}{r} + \frac{f_-(r + ct)}{r}. \quad (\text{OÉC-II.64})$$

Pour une source ponctuelle isotrope, la solution se réduit à

$$\delta p(r, t) = \frac{f_+(r - ct)}{r}. \quad (\text{OÉC-II.65})$$

Pour déterminer la vitesse, on utilise la relation

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \delta p, \quad (\text{OÉC-II.66})$$

qui généralise à trois dimensions l'égalité  $\rho \partial v / \partial t = -\partial \delta p / \partial x$  obtenue pour les tuyaux. Pour une onde acoustique sphérique,  $\vec{v} = v(r, t) \vec{u}_r$  (l'onde est longitudinale) et la relation OÉC-II.66 se réduit à

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial r}. \quad (\text{OÉC-II.67})$$

En raison du facteur  $1/r$  dans l'expression de  $\delta p$ , la vitesse vibrationnelle n'obéit pas à l'équation de d'Alembert car elle est somme d'un terme en  $1/r^2$  et d'un terme en  $1/r$ . À grande distance, le premier est négligeable et l'on obtient à nouveau que

$$\delta p(r, t) \approx z v(r, t). \quad (\text{OÉC-II.68})$$

La puissance traversant une portion de surface sphérique d'aire  $S$  située à la distance  $r$  de la source est donc

$$\mathcal{P}(r, t) = \delta p(r, t) S v(r, t) = z v^2(r, t) S = \frac{(\delta p)^2(r, t)}{z} S. \quad (\text{OÉC-II.69})$$

Pour une surface vue sous un angle solide  $\Omega$ ,  $S = \Omega r^2$ , donc

$$\mathcal{P} = \frac{f_+^2(r - ct)}{z} \Omega. \quad (\text{OÉC-II.70})$$

En particulier, pour une onde sinusoïdale,

$$\delta p(r, t) = \frac{a}{r} \cos(\omega t - kr + \phi). \quad (\text{OÉC-II.71})$$

Avec  $I = \langle \mathcal{P} \rangle_t / S$ , on obtient que

$$I = \frac{a^2 \omega^2}{2zr^2}. \quad (\text{OÉC-II.72})$$

L'intensité varie donc comme l'inverse du carré de la distance.

## c. Ondes stationnaires

On sait depuis les études réalisées par Pythagore et ses disciples au 6<sup>e</sup> siècle av. J.-C. sur un monocorde que la musique entretient des liens étroits avec l'arithmétique : les sons produits par deux parties d'une même corde vibrante paraissent en effet d'autant plus consonants que le quotient des longueurs des parties forme une fraction dont le numérateur et dénominateur sont de petits entiers (après réduction de la fraction), et ce, que les sons soient successifs (mélodie) ou simultanés (harmonie). Le même phénomène peut être observé dans des tuyaux de section constante. Les cordes vibrantes et les tuyaux constituant des modèles très simplifiés des instruments de musique à cordes et à vent, intéressons-nous aux sons qui peuvent être créés dans ces dispositifs avant de donner quelques éléments de théorie musicale.

### 1. Corde vibrante

On a établi que le déplacement transversal d'une corde vibrante obéit à l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{OÉC-II.73})$$

et on sait que la solution de cette équation est de la forme

$$y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct), \quad (\text{OÉC-II.74})$$

mais on n'a pas encore exploité le fait que la corde est fixée à ses extrémités, c.-à-d. que

$$y(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(x = L, t) = 0. \quad (\text{OÉC-II.75})$$

à tout instant.

Il en résulte que, pour tout  $t$ ,

$$y(-ct) = -y_+(-ct) \quad \text{et} \quad y_-(L + ct) = -y_+(L - ct). \quad (\text{OÉC-II.76})$$

Posons  $t = t' - L/c$ . On a

$$y_-(ct) = -y_+(-ct) = -y_+(L - ct') = y_-(L + ct') = y_-(2L + ct). \quad (\text{OÉC-II.77})$$

La fonction  $y_-$  est ainsi de période spatiale  $2L$ , et donc aussi de période temporelle  $T = 2L/c$ . Il en est évidemment de même pour  $y_+$  et donc pour leur somme  $y$ .

Cherchons en particulier des solutions  $y_n$  sinusoïdales en temps<sup>\*1</sup>. Les fonctions  $y_{n,+}$  et  $y_{n,-}$  doivent alors être également sinusoïdales temporellement, donc de la forme

$$y_{n,\pm} = A_{\pm} \cos(\omega t \mp kx + \phi_{\pm}). \quad (\text{OÉC-II.78})$$

Pour cette étude, il est commode d'utiliser la représentation complexe, dans laquelle  $y_n(x, t) = \text{Re } \underline{y}_n(x, t)$  avec

$$\underline{y}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i(\omega t - kx)} + \underline{A}_- e^{i(\omega t + kx)} \quad (\text{OÉC-II.79})$$

et  $\omega$  et  $k$  positifs. Les fonctions  $y_n$  étant linéairement indépendantes, la condition  $y(x = 0, t) = 0$  doit être vérifiée pour chacune d'entre elles, c.-à-d.  $y_n(x = 0, t) = 0$ . Ceci impose que

$$\underline{A}_+ + \underline{A}_- = 0, \quad (\text{OÉC-II.80})$$

donc

$$\underline{y}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2i \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx). \quad (\text{OÉC-II.81})$$

La condition  $y(x = L, t) = 0$  doit être vérifiée pour chaque  $y_n$ , ce qui impose que

$$\sin(kL) = 0. \quad (\text{OÉC-II.82})$$

Le nombre d'onde doit donc prendre des valeurs discrètes

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{OÉC-II.83})$$

(d'où l'indice «  $n$  » introduit précédemment. Remarquer que  $n \in \mathbb{Z}^-$  est exclu car on a défini  $y_{n,+}$  et  $y_{n,-}$  avec  $k > 0$ ). Les longueurs d'onde, pulsations, fréquences et périodes temporelles correspondantes valent

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad (\text{OÉC-II.84})$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}, \quad (\text{OÉC-II.85})$$

$$v_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, \quad (\text{OÉC-II.86})$$

$$T_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2L}{nc}. \quad (\text{OÉC-II.87})$$

Posons

$$-2i \underline{A}_+ = C_n e^{i\phi_n} \quad \text{avec } C_n > 0. \quad (\text{OÉC-II.88})$$

On obtient alors

$$y_n(x, t) = \text{Re}(C_n e^{i\phi_n} e^{i\omega_n t} \sin[k_n x]) = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.89})$$

La fonction  $y_n$  s'écrit comme le produit d'une fonction de  $x$  et d'une fonction de  $t$  : il s'agit donc d'une **onde stationnaire**. On appelle cette solution un **mode propre** et  $v_n$  est sa **fréquence propre**. La solution générale  $y$  sera une somme des modes propres  $y_n$ . Chaque fréquence propre  $v_n$  est un multiple entier de la

1. La signification de l'indice  $n$  apparaîtra plus loin. Disons seulement ici que, les fonctions  $y$ ,  $y_-$  et  $y_+$  étant périodiques de même période, on peut les décomposer en séries de Fourier, c.-à-d. en sommes infinies discrètes de sinusoïdes ( $y_n$ ,  $y_{n,+}$ ,  $y_{n,-}$ ) indicées par un entier  $n$ , chaque sinusoïde de pulsation égale à un multiple entier de la pulsation  $2\pi/T$ .



fréquence fondamentale  $\nu_1 = c/(2L)$ .

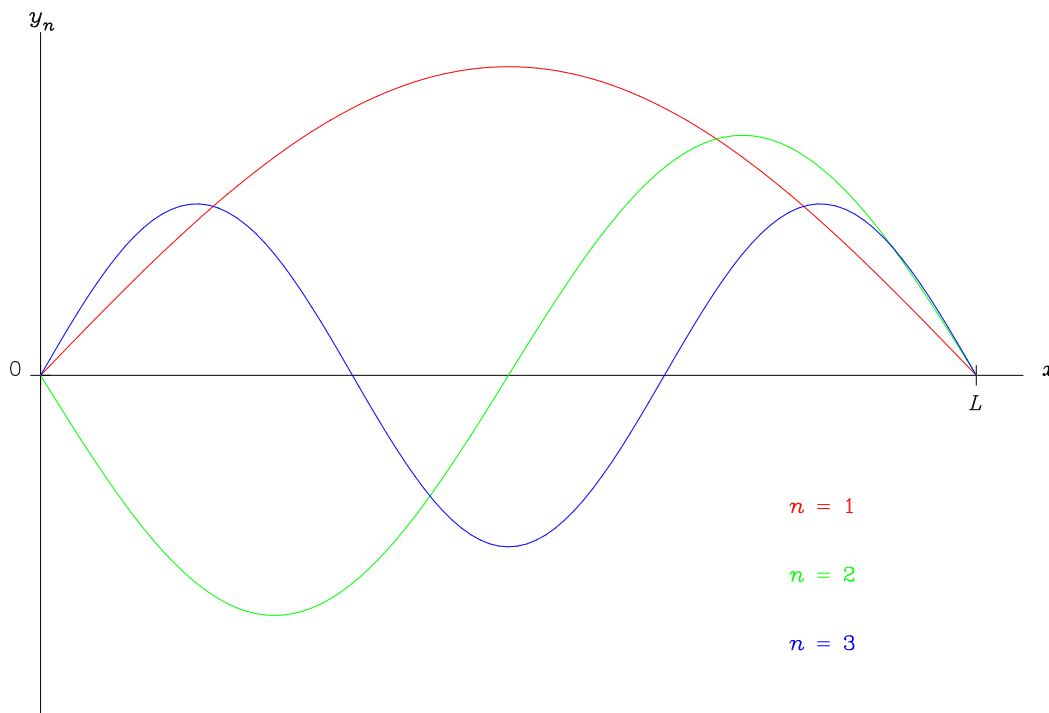


Figure OÉC-II.1. – Trois premiers modes de vibration de la corde à un instant  $t$ . L'amplitude  $C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$  est arbitraire.

En musique, les modes propres sont aussi appelés des **harmoniques** ; celui pour  $n = 1$  est le **fondamental**. L'étude qui vient d'être faite s'applique bien à des cordes pincées, comme celles d'une guitare acoustique. En appuyant la corde avec un doigt contre le manche de l'instrument, on fixe la longueur  $L$  sur laquelle la corde peut vibrer, donc la longueur d'onde du fondamental<sup>\*2</sup>.

Les valeurs des  $C_n$  et  $\phi_n$  des différents harmoniques définissent le **timbre** de l'instrument pour cette note<sup>\*3</sup>.

Les modes propres sont des fonctions sinusoidales du temps, d'amplitude de déplacement  $C_n |\sin(k_n x)|$ . Les points pour lesquels cette amplitude est minimale sont appelés des **nœuds** de déplacement. Dans le cas présent, cette amplitude minimale est même nulle. Les points de la corde situés en  $x = 0$  et  $x = L$  sont immobiles à tout instant et sont donc évidemment des nœuds. C'est aussi vrai, pour le mode  $n$ , de tous les points pour lesquels  $\sin(k_n x) = 0$ . Notons  $x_{\text{nd}}(y_n, \cdot)$  l'abscisse de ces nœuds. On doit avoir  $k_n x_{\text{nd}}(y_n, \cdot) = q\pi$  avec  $q$  entier et  $x_{\text{nd}}(y_n, \cdot) \in [0, L]$ , soit

$$x_{\text{nd}}(y_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{OÉC-II.90})$$

Les points de la corde dont l'amplitude de déplacement pour le mode  $n$  est maximale sont appelés des **ventres** de déplacement. Notons  $x_{\text{vt}}(y_n, \cdot)$  l'abscisse de ces ventres. On doit avoir  $k_n x_{\text{vt}}(y_n, \cdot) = m\pi + \pi/2$  avec  $m$  entier et  $x_{\text{vt}}(y_n, \cdot) \in [0, L]$ , soit

$$x_{\text{vt}}(y_n, m) = \frac{(m + 1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket. \quad (\text{OÉC-II.91})$$

2. Plus exactement, on place le doigt entre deux frettes. La longueur utile de la corde est celle de la partie entre le chevalet et la frette la plus proche de celui-ci.  
3. En réalité, on entend surtout le son produit par la table d'harmonie et amplifié par la caisse de résonance. La table est excitée par les cordes via le chevalet sur lequel celles-ci sont tendues.

## 2. Tuyau

Le cas d'un tuyau parcouru par des ondes acoustiques se traite de manière analogue, mais présente plus de variété selon que les extrémités du tuyau sont fermées ou ouvertes.

### a. Deux extrémités fermées

En une extrémité fermée, le déplacement longitudinal est nul. On a donc les conditions aux limites

$$\psi(x=0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x=L, t) = 0 \quad (\text{OÉC-II.92})$$

pour tout  $t$ . Ce sont les mêmes que pour le déplacement transversal  $y$  sur la corde vibrante, donc on obtient exactement les mêmes résultats (nombre d'onde, fréquence, etc., de chaque mode propre  $\psi_n$ ; nœuds et ventres de  $\psi_n$ ) avec la substitution  $y \mapsto \psi$ .

La surpression est donnée par

$$\delta p = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{OÉC-II.93})$$

En représentation complexe, on déduit de

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i(\omega_n t - k_n x)} + \underline{A}_- e^{i(\omega_n t + k_n x)} \quad (\text{OÉC-II.94})$$

que

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{i k_n}{\chi} (\underline{A}_+ e^{i(\omega_n t - k_n x)} - \underline{A}_- e^{i(\omega_n t + k_n x)}). \quad (\text{OÉC-II.95})$$

Puisque  $\underline{A}_- = -\underline{A}_+$  d'après la condition sur  $\psi$  en  $x=0$ , on obtient que

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ e^{i \omega_n t} (e^{-i k_n x} + e^{i k_n x}) = 2 \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ e^{i \omega_n t} \cos(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.96})$$

Posons

$$2 \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i \hat{\phi}'_n}. \quad (\text{OÉC-II.97})$$

En représentation réelle, pour le mode  $n$ , on a alors

$$\delta p_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \hat{\phi}'_n) \cos(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.98})$$

Dans le cas d'un tuyau fermé, les nœuds de pression sont les points d'abscisse

$$x_{\text{nd}}^{\text{f-f}}(\delta p_n, m) = \frac{(m+1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad (\text{OÉC-II.99})$$

c.-à-d. les ventres de déplacement  $x_{\text{vt}}^{\text{f-f}}(\psi_n, \cdot)$ . Les ventres de pression sont les points d'abscisse

$$x_{\text{vt}}^{\text{f-f}}(\delta p_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad (\text{OÉC-II.100})$$

c.-à-d. les nœuds de déplacement  $x_{\text{nd}}^{\text{f-f}}(\psi_n, \cdot)$ .

### b. Une extrémité fermée, l'autre ouverte

Prenons l'extrémité fermée en  $x=0$  et l'extrémité ouverte en  $x=L$ . **En une extrémité ouverte, la surpression chute à zéro** sur une très courte distance (cf. § OÉC-IV.c.2).

On a encore  $\psi(x=0, t) = 0$ , donc  $\underline{A}_- = -\underline{A}_+$  et

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = 2 \frac{i k}{\chi} \underline{A}_+ e^{i \omega t} \cos(kx). \quad (\text{OÉC-II.101})$$

Comme  $\delta p(x=L, t) = 0$ , on a

$$\cos(kL) = 0. \quad (\text{OÉC-II.102})$$

Le nombre d'onde prend donc les valeurs discrètes

$$k_n = -\frac{\pi}{2L} + n \frac{\pi}{L} = (n-1/2) \frac{\pi}{L} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{OÉC-II.103})$$

Les longueurs d'onde, pulsations, fréquences et périodes temporelles correspondantes valent

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n-1/2}, \quad (\text{OÉC-II.104})$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{(n-1/2)\pi c}{L}, \quad (\text{OÉC-II.105})$$

$$v_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{(n-1/2)c}{2L}, \quad (\text{OÉC-II.106})$$

$$T_n = \frac{1}{v_n} = \frac{2L}{(n-1/2)c}. \quad (\text{OÉC-II.107})$$

La fréquence des différents harmoniques est donc un multiple *impair* de la fréquence fondamentale  $v_1 = c/(4L)$  (la moitié de celle obtenue dans les cas fermé-fermé et ouvert-ouvert).

Posons

$$2 \frac{i k_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i\phi'_n}. \quad (\text{OÉC-II.108})$$

On a alors

$$\delta p_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \phi'_n) \cos(k_n x) \quad (\text{OÉC-II.109})$$

et

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} (e^{-ik_n x} - e^{ik_n x}) = -2i \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} \sin(k_n x) = -\frac{\chi C'_n}{k_n} e^{i(\omega_n t + \phi'_n)} \sin(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.110})$$

Donc

$$\psi_n(x, t) = -\frac{\chi C'_n}{k_n} \cos(\omega_n t + \phi'_n) \sin(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.111})$$

Le  $n$ -ième mode propre admet donc des nœuds de déplacement pour  $\sin(k_n x) = 0$ , c.-à-d. pour

$$x_{\text{nd}}^{\text{f-o}}(\psi_n, m) = \frac{mL}{n-1/2} \quad \text{avec } m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \quad (\text{OÉC-II.112})$$

Les ventres de déplacement sont les points d'abscisse

$$x_{\text{vt}}^{\text{f-o}}(\psi_n, m) = \frac{(m+1/2)L}{n-1/2} \quad \text{avec } m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \quad (\text{OÉC-II.113})$$

### c. Deux extrémités ouvertes

Lorsque les deux extrémités sont ouvertes,

$$\delta p(x=0, t) = 0 \quad \text{et} \quad \delta p(x=L, t) = 0 \quad (\text{OÉC-II.114})$$

à tout instant, donc, pour une onde sinusoïdale,

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{ik}{\chi} (\underline{A}_+ e^{i(\omega t - kx)} - \underline{A}_- e^{i(\omega t + kx)}). \quad (\text{OÉC-II.115})$$

La condition  $\delta p(x=0, t) = 0$  impose que

$$\underline{A}_- = \underline{A}_+, \quad (\text{OÉC-II.116})$$

donc

$$\underline{\delta p}_n(x, t) = \frac{ik}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} (e^{-ikx} - e^{ikx}) = -2i \frac{ik}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx) = 2 \frac{k}{\chi} \underline{A}_+ e^{i\omega t} \sin(kx). \quad (\text{OÉC-II.117})$$

La condition  $\delta p(x=L, t) = 0$  impose que

$$\sin(kL) = 0. \quad (\text{OÉC-II.118})$$

Le nombre d'onde prend donc les valeurs discrètes

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, \quad (\text{OÉC-II.119})$$

les mêmes que pour un tuyau fermé aux deux extrémités.

Posons

$$2 \frac{k_n}{\chi} \underline{A}_+ = C'_n e^{i\phi'_n}. \quad (\text{OÉC-II.120})$$

On a

$$\delta p_n(x, t) = \text{Re } \underline{\delta p}_n(x, t) = C'_n \cos(\omega_n t + \phi'_n) \sin(k_n x). \quad (\text{OÉC-II.121})$$

Par ailleurs,

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{A}_+ e^{i\omega_n t} (e^{-ik_n x} + e^{ik_n x}) = \frac{2\chi C'_n}{k_n} e^{i(\omega_n t + \phi'_n)} \cos(k_n x), \tag{OÉC-II.122}$$

donc

$$\psi_n(x, t) = \frac{2\chi C'_n}{k_n} \cos(\omega_n t + \phi'_n) \cos(k_n x). \tag{OÉC-II.123}$$

Le  $n$ -ième mode propre admet donc des nœuds de déplacement pour  $\cos(k_n x) = 0$ , c.-à-d. pour

$$x_{nd}^{o-o}(\psi_n, m) = \frac{(m + 1/2)L}{n} \quad \text{avec } m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket. \tag{OÉC-II.124}$$

Les ventres de déplacement sont les points d'abscisse

$$x_{vt}^{o-o}(\psi_n, q) = \frac{qL}{n} \quad \text{avec } q \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{OÉC-II.125}$$

Les nœuds (resp. ventres) de déplacement  $x_{nd}^{o-o}(\psi_n, \cdot)$  (resp.  $x_{vt}^{o-o}(\psi_n, \cdot)$ ) sont les ventres (resp. nœuds) de surpression  $x_{vt}^{o-o}(\delta p_n, \cdot)$  (resp.  $x_{nd}^{o-o}(\delta p_n, \cdot)$ ).

Par ailleurs, les termes «  $\cos(kx)$  » et «  $\sin(kx)$  » étant permutés dans les expressions du déplacement et de la surpression entre les cas ouvert-ouvert et fermé-fermé, les nœuds (resp. ventres) de déplacement du cas ouvert-ouvert sont les nœuds (resp. ventres) de surpression du cas fermé-fermé. De même, les nœuds (resp. ventres) de surpression du cas ouvert-ouvert sont les nœuds (resp. ventres) de déplacement du cas fermé-fermé.

### 3. Cordes et tuyaux sonores : récapitulatif

Cas	$k_n$	$\alpha$	$y_n, \psi_n$ $x_{nd}$	$x_{vt}$	$\alpha$	$F_{y,n}^{*4}, \delta p_n$ $x_{nd}$	$x_{vt}$
Corde, tuyau f-f	$\frac{n}{L} \pi$	$\sin(k_n x)$	$\frac{qL}{n}$	$\frac{m + 1/2}{n} L$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m + 1/2}{n} L$	$\frac{qL}{n}$
Tuyau f-o	$\frac{n - 1/2}{L} \pi$	$\sin(k_n x)$	$\frac{mL}{n - 1/2}$	$\frac{m + 1/2}{n - 1/2} L$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m + 1/2}{n - 1/2} L$	$\frac{mL}{n - 1/2}$
Tuyau o-o	$\frac{n}{L} \pi$	$\cos(k_n x)$	$\frac{m + 1/2}{n} L$	$\frac{qL}{n}$	$\sin(k_n x)$	$\frac{qL}{n}$	$\frac{m + 1/2}{n} L$

(avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  et  $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ).

### 4. Quelques notions de musique

Deux sons de fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  paraissent d'autant plus consonants que le rapport  $\nu_2/\nu_1$  est proche d'une fraction irréductible de deux entiers petits.

Les rapports les plus simples sont les suivants :

$\nu_2/\nu_1$	Nom
1/1	unisson
2/1	octave
3/2	quinte parfaite
4/3	quarte parfaite
5/4	tierce majeure

On peut remarquer que, si  $\nu_2/\nu_1$  et  $\nu_3/\nu_2$  forment une quinte et une quarte parfaites, alors  $\nu_3/\nu_1$  constitue une octave.

Le rapport entre une quinte et une quarte constitue un **ton** et vaut  $9/8$  pour des quinte et quarte parfaites. Malheureusement, le rapport entre la quinte (ou la quarte) et l'unisson (ou l'octave) ne correspond alors pas à un nombre entier de tons, c.-à-d. à une puissance entière de  $9/8$ . En revanche,  $3/2$  est assez proche d'une puissance demi-entière de  $9/8$  :  $(9/8)^{7/2} \approx 1,5102$ .

Il est donc assez naturel également qu'on ait cherché à subdiviser l'octave en tons et **demi-tons**, chaque ton correspondant à deux demi-tons. La musique occidentale a trouvé acceptable de découper l'octave en une **gamme** dite **diatonique** constituée de cinq tons et deux demi-tons, ces derniers insérés entre un groupe

4. Les modes de tension d'une corde vibrante n'ont pas été étudiés spécifiquement, mais la relation entre  $F_y$  et  $y$  pour une corde,  $F_y = F \partial y / \partial x$ , étant analogue à celle entre  $\delta p$  et  $\psi$  pour un tuyau ( $\delta p = -\chi^{-1} \partial \psi / \partial x$ ), les résultats obtenus pour  $\delta p_n$  s'appliquent également à  $F_{y,n}$ .

de trois tons et un groupe de deux tons. En partant de *do*, on obtient la gamme de *do* majeur : *do, ré, mi, fa, sol, la, si, do<sup>+</sup>* en allant des graves vers les aigus<sup>\*5</sup>. Les intervalles entre les notes de cette gamme sont les suivants, du grave vers l'aigu :

Intervalle	Nombre de demi-tons
<i>do-ré</i>	2
<i>ré-mi</i>	2
<i>mi-fa</i>	1
<i>fa-sol</i>	2
<i>sol-la</i>	2
<i>la-si</i>	2
<i>si-do<sup>+</sup></i>	1

Les demi-tons (non plus que les tons) ne peuvent cependant pas être à la fois des rationnels et être tous égaux. Il n'y a en réalité pas de solution totalement satisfaisante car 2 n'est la puissance entière (> 1) d'aucun nombre rationnel.

La subdivision de l'octave en douze demi-tons égaux irrationnels a été proposée par Simon Stevin au 16<sup>e</sup> siècle. La gamme ainsi obtenue est dite **tempérée** et a été notamment popularisée par J.S. Bach dans son *Clavier bien tempéré*. Le rapport entre deux notes séparées par un demi-ton doit valoir  $2^{1/12} = 1,0595\dots$ , ce qui donne les rapports de fréquence suivants par rapport au premier *do* :

<i>do</i>	$2^{0/12} = 1$	$= 1/1$
<i>do</i> # (= <i>ré</i> b)	$2^{1/12} = 1,0595\dots$	
<i>ré</i>	$2^{2/12} = 1,1225\dots$	$\approx 9/8$
<i>ré</i> # (= <i>mi</i> b)	$2^{3/12} = 1,1892\dots$	
<i>mi</i>	$2^{4/12} = 1,2599\dots$	$\approx 5/4$
<i>fa</i>	$2^{5/12} = 1,3348\dots$	$\approx 4/3$
<i>fa</i> # (= <i>sol</i> b)	$2^{6/12} = 1,4142\dots$	
<i>sol</i>	$2^{7/12} = 1,4983\dots$	$\approx 3/2$
<i>sol</i> # (= <i>la</i> b)	$2^{8/12} = 1,5874\dots$	$\approx 8/5$
<i>la</i>	$2^{9/12} = 1,6818\dots$	
<i>la</i> # (= <i>si</i> b)	$2^{10/12} = 1,7818\dots$	
<i>si</i>	$2^{11/12} = 1,8877\dots$	
<i>do<sup>+</sup></i>	$2^{12/12} = 2$	$= 2/1$

# = dièse ; b = bémol.

On remarque que la quinte (*do-sol*) et la quarte (*do-fa*) sont quasi parfaites et que la tierce majeure (*do-mi*) est aussi très acceptable.

Le même schéma peut être appliqué de manière itérative aux octaves supérieures et inférieures. En fixant la fréquence d'une note particulière dans une certaine octave, on obtient les fréquences de toutes les notes dans toutes les octaves. On convient classiquement que la fréquence du *la* de la troisième octave vaut 440 Hz.

La gamme tempérée est particulièrement intéressante pour les instruments, tels le piano, ne pouvant jouer qu'à des fréquences discrètes fixées à l'avance (contrairement au violon, pour lequel on peut faire varier continûment la fréquence du son en faisant glisser le doigt sur la corde). Il est en effet possible de transposer toutes les notes du même nombre de demi-tons sans que cela change les rapports de fréquence entre ces notes et donc la mélodie et l'harmonie.

5. La dernière note, ici notée *do<sup>+</sup>* pour la distinguer, est une octave plus aiguë que le premier *do*.